УДК 517.956.45

Д. В. Портнягін (Ін-т фізики конденсованих систем НАН України, Львів)

ОБМЕЖЕНІСТЬ СЛАБКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕДІАГОНАЛЬНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ДВОХ РІВНЯНЬ

We study boundedness of weak solutions of a general nondiagonal parabolic system of nonlinear differential equations with a matrix of coefficients, which satisfies special structural hypotheses. To do this, we use a technique basing on the estimation of a certain function of unknowns.

Изучается ограниченность слабых решений общей недиагональной параболической системы нелинейных дифференциальных уравнений с матрицей коэффициентов, удовлетворяющей специальным структурным условиям. При этом применяется техника, основанная на оценке определенной функции неизвестных.

1. Вступ. У даній роботі будемо вивчати обмеженість слабких розв'язків нелінійної недіагональної параболічної системи двох рівнянь дивергентного вигляду за спеціальних припущень на її структуру.

Існує кілька відомих контрприкладів, які показують, що оцінки Де Джорджі – Неша – Мозера, взагалі кажучи, не справджуються для еліптичної системи, котру можна розглядати як частковий випадок параболічної. Приклад необмеженого розв'язку лінійної еліптичної системи з обмеженими коефіцієнтами було побудовано Де Джорджі в [1]. Існує ще один приклад Й. Нечаса і Й. Сучека нелінійної еліптичної системи з достатньо гладкими коефіцієнтами, але із розв'язком, що не належить навіть до $W^{2,2}$.

Ці, а також багато інших прикладів свідчать про те, що проблема регулярності розв'язку для системи є набагато складнішою, ніж для одного рівняння другого порядку.

Стосовно систем диференціальних рівнянь оцінки Де Джорджі узагальнено тільки на їх спеціальний клас, так звані слабкозв'язані системи. Система називається слабкозв'язаною, якщо вона є переплетеною лише у доданках, що не містять похідних.

Тому представляє інтерес знаходження сильнозв'язаних систем, тобто таких, що є переплетеними у доданках з похідними і розв'язки яких мають певну регулярність.

Техніка, яку ми будемо використовувати, застосовувалася в [2] для слабконелінійних систем (див. також [3 – 5]) і полягає в переході до нової функції, для якої оцінки встановлюються звичайним чином, звідки випливає оцінка для кожної компоненти вектор-функції розв'язку. Ця техніка дозволяє досліджувати нелінійні недіагональні системи.

Основна ідея полягає в наступному: замість того, щоб намагатися встановити оцінки для кожної з компонент розв'язку (u, v), ввести якусь нову функцію компонент розв'язку $H(u, v)$, з оцінок якої можна буде вивести оцінки для кожної компоненти розв'язку (u, v).

У даній роботі, обмежуючись системами рівнянь другого порядку із спеціальною структурою, ми показуємо обмеженість розв'язку нелінійної параболічної системи двох рівнянь, яка зв'язана у найстарших похідних і в якої старші коефіцієнти залежать від x та невідомих u та v.

2. Основні позначення та припущення. Будемо розглядати систему двох рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A^{(1)}(x, u, v, u_x, v_x)\right) &= B^{(1)}(x, t, u, u, v, u_x, v_x), \\ v_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A^{(2)}(x, u, v, u_x, v_x)\right) &= B^{(2)}(x, t, u, u, v, u_x, v_x), \quad (x, t) \in Q \end{aligned} \tag{1}$$

(тут і далі Q — область, в якій розглядається задача), для якої моделлю є система

$$\begin{aligned} u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_1(x,u,v)\nabla u + b_1(x,u,v)\nabla v\right) &= f_1(x,t)\frac{1}{\sqrt{1+|u|+|v|}}, \\ v_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_2(x,u,v)\nabla u + b_2(x,u,v)\nabla v\right) &= f_2(x,t)\frac{1}{\sqrt{1+|u|+|v|}}, \quad (x,t)\in Q, \end{aligned} \tag{2}$$

$$f_j(x,t) \in L^{\tau}(Q), \qquad \tau > \frac{n+2}{2}. \tag{3}$$

Припустимо, що існує функція двох змінних $\tilde{H}(u,v)$ така, що для будь-яких u, $v, x \in \mathbb{R}$

$$C_1(u^2+v^2) \le \tilde{H}(u,v) \le C_2(u^2+v^2), \tag{4}$$

$$0 \le \left|\tilde{H}_u(u,v)\right|, \left|\tilde{H}_v(u,v)\right| \le C_2\left(|u|+|v|\right), \tag{5}$$

$$C_1 \le \left|\tilde{H}_{uu}(u,v)\right|, \left|\tilde{H}_{uv}(u,v)\right|, \left|\tilde{H}_{vv}(u,v)\right| \le C_2, \tag{6}$$

де $C_1 > 0$, $C_2 < \infty$ — константи, і

$$\begin{aligned} a_1(x,u,v)\tilde{H}_u(u,v) + a_2(x,u,v)\tilde{H}_v(u,v) &= \Lambda(x,u,v)\tilde{H}_u(u,v), \\ b_1(x,u,v)\tilde{H}_u(u,v) + b_2(x,u,v)\tilde{H}_v(u,v) &= \Lambda(x,u,v)\tilde{H}_v(u,v) \end{aligned} \tag{7}$$

та

$$a_1\tilde{H}_{uu} + a_2\tilde{H}_{uv} \ge 0, \tag{8}$$

$$\begin{Vmatrix} 2(a_1\tilde{H}_{uu} + a_2\tilde{H}_{uv}) & (a_1+b_2)\tilde{H}_{uv} + b_1\tilde{H}_{uu} + a_2\tilde{H}_{vv} \\ (a_1+b_2)\tilde{H}_{uv} + b_1\tilde{H}_{uu} + a_2\tilde{H}_{vv} & 2(b_1\tilde{H}_{uv} + b_2\tilde{H}_{vv}) \end{Vmatrix} \ge 0. \tag{9}$$

Тут Λ — $(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R})$-вимірна функція така, що

$$0 < \Lambda_1 \le \Lambda(x,u,v) \le \Lambda_2 \quad \forall u,v,x\in\mathbb{R}, \tag{10}$$

Λ_1, Λ_2 — числа. Крім того, припускаємо, що коефіцієнти a_1, a_2, b_1, b_2 задовольняють умову еліптичності (12).

Приклад. Наведемо параболічну систему, що задовольняє введені умови:

$$a_1(u,v) = \Lambda(u,v) - \frac{a_2(u,v)}{\alpha}, \qquad b_2(u,v) = \Lambda(u,v) - b_1(u,v)\alpha,$$

$$\alpha = \frac{H_u}{H_v}, \qquad H = u^2 + v^2 + \varepsilon uv,$$

$$C_1 \le \Lambda(u,v) \le C_2, \qquad |a_2| \le \frac{C_3|\alpha|}{1+|\alpha|},$$

$$|b_1| \le \frac{C_3}{1+|\alpha|}, \qquad |\varepsilon| \le \frac{1}{10}, \qquad C_1 \ge 5C_3 > 0.$$

Задамо граничні умови типу Діріхле:

$$\begin{aligned} &(u-g_1, v-g_2)(x,t) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{для майже усіх} \quad t\in(0,T), \\ &(u,v)(x,0) = (u_0,v_0)(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Розв'язок системи (1) з даними Діріхле (11) розуміємо у слабкому сенсі, як у [6].

Означення 1. *Вимірна вектор-функція* $(u^1, u^2) = (u, v)$ *називається слабким розв'язком задачі* (2.1) – (2.11), *якщо*

$$u^j \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$$

і для всіх $t \in (0, T]$ *і пробних функцій*

$$\varphi \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$$

виконується

$$\int_\Omega u^j \varphi_j(x, t)dx + \iint_{\Omega\times(0,t]} \{-u^j \varphi_{jt} + A_i^j \varphi_{jx_i}\} dx\, d\tau =$$

$$= \int_\Omega u_0^j \varphi_j(x, 0)dx + \iint_{\Omega\times(0,t]} B^j \varphi_j\, dx\, d\tau.$$

Гранична умова (11) *розуміється у слабкому сенсі.*

Означимо граничні норми функцій, що знадобляться у подальшому розгляді.

Означення 2. *Нехай* Ω — *множина в* $\mathbb{R}^n$ (n — *довільне натуральне число*) *і* $\partial\Omega$ — *частина її межі,* $W(\Omega)$ — *довільний соболєвський простір. Для функції* $u(x)$, *заданої на* $\partial\Omega$, *означимо*

$$\|u\|_{W(\partial\Omega)} = \inf_\psi \|\psi\|_{W(\Omega)},$$

де infimum береться по всіх функціях $\psi \in W(\Omega)$ *таких, що* $\psi(x) = u(x)$ *майже скрізь на* $\partial\Omega$. *Позначимо через* $W(\partial\Omega)$ *функціональний простір, для якого вищевказана норма є скінченною.*

Опишемо позначення, величини та функції, що входять до систем (1), (2) та будуть зустрічатися у цій роботі.

Тут і далі $Q = (0, T] \times \Omega$, $S = \partial\Omega \times (0, T]$, $\partial Q \equiv \{\Omega \times \{0\}\} \cup \{\partial\Omega \times (0, T]\}$, Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею, $x \in \Omega$, $T > 0$, $t \in (0, T]$, $n \geq 2$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2$ і за індексами, що повторюються, розуміємо підсумовування, $u, v \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$, $W_0^{1,2}(\Omega)$ — простір функцій із $W^{1,2}(\Omega)$, що зникають на $\partial\Omega$ у сенсі слідів для майже всіх $t \in (0, T]$.

Під параболічністю системи (1) будемо розуміти, що її частина без часових похідних є еліптичною. Поняття еліптичності системи диференціальних рівнянь другого порядку полягає у наступному (як його було введено в [7]):

$$\exists \lambda > 0, \quad 0 < G = G(x) \in L^2(Q) \,\big|\, \forall s \in \mathbb{R}^{2n} \quad \forall r \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$A_i^j(x, r, s)s_j^i \geq \lambda |s|^2 - G. \tag{12}$$

Припускаємо, що коефіцієнти загальної системи $A_i^j(x, r, s)$ є $(\Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R})$-вимірними функціями Каратеодорі, що задовольняють умову еліптичності і умови зростання:

$$\exists \Lambda_2 > 0 \,\big|\, \forall s \in \mathbb{R}^{2n} \quad \forall r \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|A_i^j(x, r, s)\right| \leq \Lambda_2 |s|, \tag{13}$$

а також структурні умови

$$\exists\, a_j(x, r), b_j(x, r) \,\big|\, \forall s \in \mathbb{R}^{2n} \quad \forall r \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$\left|A^{(1)}(x, r, s) - a_1(x, r)s^1 - b_1(x, r)s^2\right| \leq G_1(x, r, s), \tag{14а}$$

$$\left|A^{(2)}(x, r, s) - a_2(x, r)s^1 - b_2(x, r)s^2\right| \leq G_2(x, r, s), \tag{14б}$$

де $a_j(x, r)$, $b_j(x, r)$ задовольняють (4) – (10) і $G_j = G_j(x, r, s) > 0$ є деякими відповідно $(\Omega\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R})$- та $(\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R})$-вимірними функціями Каратеодорі від $x, u, v,$ на які накладаються умови зростання

$$\exists\, G(x)\,\Big|\; \forall r\in\mathbb{R}^2 \quad \forall s\in\mathbb{R}^{2n} \quad \forall x\in\mathbb{R}^n:$$

$$0 \;<\; G_j(x,r,s) \;\le\; \frac{G(x)}{\left(1+|r|^2\right)\left(1+|s|^{\sigma}\right)}$$

з $\sigma > \dfrac{n-2}{n+2}$ та $G,$ що задовольняє умови

$$G(x)\in L^{\theta}(\Omega), \qquad \theta \;>\; \frac{2(n+2)}{4-(1-\sigma)(n+2)}.$$

***Зауваження* 1.** Неважко перевірити, беручи до уваги той факт, що $G\in$ $\in L^{\frac{2(n+2)}{4-(1-\sigma)(n+2)}}$, що із структурних умов (14а), (14б) випливає умова еліптичності (12) з числом λ і функцією $G,$ залежними тільки від даних задачі.

Припускаємо, що праві частини $B^j(x,t,r)$ є $(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R})$-вимірними функціями, що задовольняють умову

$$\forall r\in\mathbb{R}^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \quad \forall t\in\mathbb{R}:\left|B^j(x,t,r)\right| \;\le\; \frac{f_j}{\sqrt{1+|r|}}, \tag{15}$$

де f_j задовольняє (3).

Для простоти викладу використовуватимемо позначення

$$\tilde{u}_0 \;=\; \begin{cases} u_0(x), & x\,\in\,\Omega, \quad t\;=\;0,\\ g_1(x,t), & x\,\in\,\partial\Omega, \quad t\,\in\,(0,T),\end{cases}$$

$$\tilde{v}_0 \;=\; \begin{cases} v_0(x), & x\,\in\,\Omega, \quad t\;=\;0,\\ g_2(x,t), & x\,\in\,\partial\Omega, \quad t\,\in\,(0,T).\end{cases}$$

Крім того, введемо функціональний простір

$$\tilde{W}(Q) \;=\; L^2(W^{1,2}(0,T);\Omega)\,\cap\, L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)),$$

тобто функція u належить до $\tilde{W}(Q),$ якщо інтеграл

$$\int_0^T\int_{\Omega}\left(|u_t|^2+|\nabla u|^2+|u|^2\right)$$

є скінченним.

Припускаємо, що для функцій $g_j(x,t),$ $(u_0,v_0)(x)$ у граничних умовах (11) виконуються умови

$$\tilde{u}_0\,\in\,\tilde{W}(\partial Q), \qquad \tilde{v}_0\,\in\,\tilde{W}(\partial Q),$$

до того ж

$$g_j(x,t)\,\in\,L^{\infty}(S), \qquad (u_0,v_0)(x)\,\in\,L^{\infty}(\overline{\Omega}\times\{0\}).$$

3. Оцінка суми квадратів. Для подальшого розгляду потрібні оцінки інтеграла від суми квадратів просторових похідних від компонент розв'язку задачі (1) – (11).

Теорема 1. *Нехай* (u,v) — *розв'язок задачі* (1) – (11) *і припущення* (14а), (14б) *та* (18) *є виконаними, тоді має місце оцінка*

$$\int_0^T \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) \leq C \tag{16}$$

із сталою C, *що залежить від* f, G, $\|\tilde{u}_0\|_{\tilde{W}(\partial Q)}$, $\|\tilde{v}_0\|_{\tilde{W}(\partial Q)}$, n, Λ_1, Λ_2, ε, $\operatorname{mes} Q$ *і не залежить від* u *та* v.

***Зауваження* 2.** Під $\tilde{u}_0$ та $\tilde{v}_0$ у формулюванні теореми і у подальшому доведенні розуміємо довільні функції з $\tilde{W}(Q)$, що набувають значення $\tilde{u}_0$ чи $\tilde{v}_0$ на параболічній межі області. Тому кінцеве твердження залишається правильним для граничних норм.

Доведення. Помножимо перше з рівнянь (1) на $(u - \tilde{u}_0)$, друге на $(v - \tilde{v}_0)$. Зінтегрувавши по області $\Omega \times (0, t)$ з урахуванням умови еліптичності (12), умови зростання (13), умови на B^j (15), граничних умов, нерівності Юнга та нерівності Соболєва, отримаємо оцінку (16).

4. Оцінки L^∞-норм. Розглянемо питання обмеженості слабких розв'язків системи, коефіцієнти якої задовольняють припущення (14а), (14б). Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай* (u, v) — *розв'язок системи* (1). *Для функції* H, *означеної в* (4) – (8), *має місце оцінка*

$$\|H\|_{L^\infty(Q)} \leq C.$$

Такі самі оцінки виконуються і для компонент розв'язку

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leq C_1, \quad \|v\|_{L^\infty(Q)} \leq C_2,$$

де сталі C_1, C_2 *залежать тільки від* n, f^j, G, Λ_1, $\operatorname{mes} Q$, $|g_{1,2}|_{L^\infty(S)}$, $|u_0, v_0|_{L^\infty(\Omega)}$, *констант в теоремах вкладення і не залежать від* u *та* v.

Для доведення цієї теореми потрібна відома лема Стампак'я.

Лема 1. *Нехай* $\psi(y)$ — *невід'ємна незростаюча функція, означена на* $[k_0, \infty)$, *яка задовольняє умову*

$$\psi(m) \leq \frac{C}{(m-k)^\vartheta}\{\psi(k)\}^\delta \quad \textit{для} \quad m > k \geq k_0$$

з $\vartheta > 0$ *та* $\delta > 1$. *Тоді*

$$\psi(k_0 + d) = 0,$$

де $d = C^{1/\vartheta}\{\psi(k_0)\}^{(\delta-1)/\vartheta} 2^{\delta/(\delta-1)}$.

Доведення див. у роботі [7, с. 8] (лема 4.1).

Також ми використовуємо наступну лему (див. [6, с. 7], твердження 3.1).

Лема 2. *Якщо* $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$, *то виконується нерівність*

$$\int_0^T \int_\Omega u^q \leq C\left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2\right)\left(\operatorname{ess}\sup_{0<t<T} \int_\Omega |u|^2\right)^{2/n}$$

з $q = \dfrac{2(n+2)}{n}$ *та сталою* C, *що залежить лише від* n.

***Доведення теореми* 2.** Домножимо перше рівняння (1) на H_u і додамо друге, домножене на H_v (H буде означене пізніше). Виберемо $(H-k)_+$ в якості пробної функції з $k \geq k_0 = \max\left[\|H(g_1, g_2)\|_{L^\infty(S)}, \|H(u_0, v_0)\|_{L^\infty(\Omega)}\right]$. З подальшого буде видно, що така функція є допустимою. Скориставшись структурними умовами (14а), (14б), умовами на праві частини (15) та зінтегрувавши по τ від 0 до t, $t \le T$, та по x по області Ω, отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(t)}(H-k)^2\chi_{A(k)} + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega\{\langle a_1\nabla u + b_1\nabla v, H_{uu}(H-k)\nabla u + H_{uv}(H-k)\nabla v +$$

$$+ H_u^2\nabla u + H_uH_v\nabla v\rangle + \langle a_2\nabla u + b_2\nabla v, H_{uu}(H-k)\nabla u + H_{uv}(H-k)\nabla v +$$

$$+ H_u^2\nabla u + H_uH_v\nabla v\rangle\}\chi_{A(k)} \le \int\limits_0^t\int\limits_\Omega(f_1H_u + f_2H_v)\frac{1}{\sqrt{1+|u|+|v|}}(H-k)\chi_{A(k)} +$$

$$+ \int\limits_0^t\int\limits_\Omega\{G_1\nabla(H_u(H-k)) + G_2\nabla(H_v(H-k))\}\chi_{A(k)},$$

$\chi_{A(k)}$ — характеристична функція множини $A(k,t) = \{x \in \Omega \,|\, H-k \ge 0\}$. Далі

$$\langle a_1\nabla u + b_1\nabla v, H_{uu}(H-k)\nabla u + H_{uv}(H-k)\nabla v + H_u^2\nabla u + H_uH_v\nabla v\rangle +$$

$$+ \langle a_2\nabla u + b_2\nabla v, H_{uu}(H-k)\nabla u + H_{uv}(H-k)\nabla v + H_u^2\nabla u + H_uH_v\nabla v\rangle =$$

$$= \{[a_1H_u^2 + a_2H_uH_v]|\nabla u|^2 + [(a_1+b_2)H_uH_v + b_1H_u^2 + a_2H_v^2](\nabla u\nabla v) +$$

$$+ [b_1H_uH_v + b_2H_v^2]|\nabla v|^2\} + \{[a_1H_{uu} + a_2H_{uv}]|\nabla u|^2 +$$

$$+ [(a_1+b_2)H_{uv} + b_1H_{uu} + a_2H_{vv}](\nabla u\nabla v) + [b_1H_{uv} + b_2H_{vv}]|\nabla v|^2\}(H-k).$$

Виконавши підстановку

$$F(x) = \sqrt{x},$$

$$H = F(\tilde H),$$

$$H_u = F'\tilde H_u, \qquad H_v = F'\tilde H_v,$$

$$H_{uu} = F''\tilde H_u^2 + F'\tilde H_{uu},$$

$$H_{uv} = F''\tilde H_u\tilde H_v + F'\tilde H_{uv},$$

$$H_v = F''\tilde H_v^2 + F'\tilde H_v,$$

згідно з (7) для першої групи доданків у фігурних дужках знаходимо

$$\{\ldots\} = \Lambda(x,u,v)H_u^2|\nabla u|^2 + \Lambda(x,u,v)H_uH_v(\nabla u\nabla v) + \Lambda(x,u,v)H_v^2|\nabla v|^2 =$$

$$= \Lambda(x,u,v)|\nabla H(u,v)|^2 = \Lambda(x,u,v)F'^2|\nabla\tilde H(u,v)|^2.$$

На підставі (8) для другої групи доданків у фігурних дужках маємо

$$\{\ldots\}(H-k) = \Lambda(x,u,v)F''|\nabla\tilde H(u,v)|^2(H-k) + \{[a_1\tilde H_{uu} + a_2\tilde H_{uv}]|\nabla u|^2 +$$

$$+ [(a_1+b_2)\tilde H_{uv} + b_1\tilde H_{uu} + a_2\tilde H_{vv}](\nabla u\nabla v) + [b_1\tilde H_{uv} + b_2\tilde H_{vv}]|\nabla v|^2\}F'(H-k) \ge$$

$$\ge \Lambda(x,u,v)F''|\nabla\tilde H(u,v)|^2(F(\tilde H)-k).$$

Звідси, використовуючи припущення (5), (6), отримуємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(t)}(F(\tilde H)-k)^2\chi_{A(k)} + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Lambda(x,u,v)\frac{k}{4\tilde H^{3/2}}|\nabla\tilde H(u,v)|^2\chi_{A(k)} \le$$

$$\le \int\limits_0^t\int\limits_\Omega C|f|F'(F(\tilde H)-k)\chi_{A(k)} + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega C|G|(|\nabla u| + |\nabla v|)\chi_{A(k)},$$

де позначено $|f| = |f_1| + |f_2|$. Пригадуючи означення $\tilde{H}$ і виконуючи деякі перетворення, переписуємо це таким чином:

$$\sqrt{k} \int\limits_{\Omega(t)} (\sqrt[4]{\tilde{H}} - \sqrt{k})^2 \chi_{A(\sqrt{k})} + k \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \Lambda_1 \left|\nabla(\sqrt[4]{\tilde{H}} - \sqrt{k})\right|^2 \chi_{A(\sqrt{k})} \le$$

$$\le \int\limits_0^t \int\limits_\Omega C|f|(\sqrt[4]{\tilde{H}} - \sqrt{k})\chi_{A(\sqrt{k})} + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega C|G|(|\nabla u| + |\nabla v|)\chi_{A(k)},$$

де $\chi_{A(\sqrt{k})}$ — характеристична функція множини $A(\sqrt{k}, t) = \{x \in \Omega | \sqrt[4]{\tilde{H}} - \sqrt{k} \ge 0\}$. Оскільки $t \in (0, T]$ є довільним, то беручи supremum, знаходимо

$$\sqrt{k} \sup_{0<t<T} \int\limits_{\Omega(t)} (\sqrt[4]{\tilde{H}} - \sqrt{k})^2 \chi_{A(\sqrt{k})} + k \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Lambda_1 |\nabla(\sqrt[4]{\tilde{H}} - \sqrt{k})|^2 \chi_{A(\sqrt{k})} \le$$

$$\le \int\limits_0^T \int\limits_\Omega C|f|(\sqrt[4]{\tilde{H}} - \sqrt{k})\chi_{A(\sqrt{k})} + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega C|G|(|\nabla u| + |\nabla v|)^{1-\sigma}\chi_{A(k)}. \qquad (17)$$

Застосовуючи узагальнену нерівність Гельдера до правої частини (17), маємо

$$\sqrt{k} \sup_{0<t<T} \int\limits_{\Omega(t)} w^2 + k \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Lambda_1 |\nabla w|^2 \le C\|w\|_{q,Q} \|f\|_{r,Q} \left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \chi_{A(\sqrt{k})} \right)^{1-1/q-1/p} +$$

$$+ C\| |\nabla u| + |\nabla v| \|_{2,Q} \|G\|_{\varepsilon,Q} \left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \chi_{A(\sqrt{k})} \right)^{1-(1-\sigma)/2-1/\varepsilon},$$

де $w = (\sqrt[4]{\tilde{H}} - \sqrt{k})_+$, p та ε було вибрано таким чином, що $\tau > p > (n+2)/2$ і $\theta > \varepsilon > 2(n+2)/[4 - (1-\sigma)(n+2)]$, оскільки неважко перевірити, що остання нерівність виконується. З леми 2 випливає, що

$$\|w\|_{q,Q} \le \left(\sup_{0<t<T} \int\limits_\Omega w^2 + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\nabla w|^2 \right)^{1/2}.$$

Оскільки, не зменшуючи загальності, можна припустити, що $k \ge 1$, то на підставі цієї нерівності і енергетичної оцінки (16) отримуємо

$$\|w\|_{q,Q}^2 \le C\|w\|_{q,Q}\|f\|_{r,Q}\{\psi(\sqrt{k})\}^{1-1/q-1/p} + C\|G\|_{\varepsilon,Q}\{\psi(\sqrt{k})\}^{1-(1-\sigma)/2-1/\varepsilon}. \qquad (18)$$

Тут

$$\psi(\sqrt{k}) = \int\limits_0^T \operatorname{mes} A(\sqrt{k}, t)\, dt.$$

Застосовуючи нерівність Юнга до правої частини (18), одержуємо

$$\|w\|_{q,Q} \le C\{\psi(\sqrt{k})\}^{1-1/q-1/p} + C\{\psi(\sqrt{k})\}^{[1-(1-\sigma)/2-1/\varepsilon]/2}. \qquad (19)$$

Оцінимо

$$(\sqrt{m} - \sqrt{k})\{\psi(\sqrt{m})\}^{1/q} = (\sqrt{m} - \sqrt{k}) \left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \chi_{A(\sqrt{m})} \right)^{1/q} <$$

$$< \left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega w^q \chi_{A(\sqrt{m})} \right)^{1/q} < \|w\|_{q,Q},$$

де $m > k \geq k_0$. Підставляючи це в (19), знаходимо

$$(\sqrt{m} - \sqrt{k})^q \psi(\sqrt{m}) \leq C\{\psi(\sqrt{k})\}^{q(1-1/q-1/p)} + C\{\psi(\sqrt{k})\}^{q(1-2/\varepsilon)/4} =$$

$$= C\{\psi(\sqrt{k})\}^{\delta_1} + C\{\psi(\sqrt{k})\}^{\delta_2}. \tag{20}$$

З припущень щодо f_j та внаслідок вибору p маємо

$$\tau > p > \frac{n+2}{2},$$

звідки

$$\frac{2(n+2)}{2}\left(1 - \frac{n}{2(n+2)} - \frac{1}{p}\right) > 1, \quad \text{і, таким чином,} \quad \delta_1 > 1.$$

З припущень щодо G та внаслідок вибору ε

$$\theta > \varepsilon > \frac{2(n+2)}{4 - (1-\sigma)(n+2)},$$

звідки

$$\frac{2(n+2)}{2n}\left(1 - \frac{1-\sigma}{2} - \frac{1}{\varepsilon}\right) > 1, \quad \text{і, таким чином,} \quad \delta_2 > 1.$$

На підставі леми 1 із співвідношення (20) можемо зробити висновок, що

$$\psi(\sqrt{k_0} + d) = 0$$

для деякого d, достатньо великого, але скінченного, що залежить лише від n, f^j, G, Λ_1, $|g_{1,2}|_{L^\infty(S)}$, $|u_0, v_0|_{L^\infty(\Omega)}$, сталих у теоремах вкладення та не залежить від u та v. І, таким чином,

$$\|\tilde{H}\|_{L^\infty(Q)} \leq C.$$

Неважко бачити, що завдяки (4) такі самі оцінки мають місце і для компонент розв'язку (u, v). Власне,

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \leq C_1, \quad \|v\|_{L^\infty(Q)} \leq C_2.$$

Теорему доведено.

1. *De Giorgi E.* Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico // Boll. Unione mat. ital. – 1968. – P. 135 – 137.
2. *Pozio M. A., Tesei A.* Global existence of solutions for a strongly coupled quasilinear parabolic system // Nonlinear Anal. – 1990. – **12**, № 8. – P. 657 – 689.
3. *Dung L.* Hölder regularity for certain strongly coupled parabolic systems // J. Different. Equat. – 1999. – **151**. – P. 313 – 344.
4. *Wiegner M.* Global solutions to a class of strongly coupled parabolic systems // Math. Ann. – 1992. – **292**. – P. 711 – 727.
5. *Portnyagin D.* A generalization of the maximum principle to nonlinear parabolic systems // Ann. pol. math. – 2003. – **81**, № 3. – P. 217 – 236.
6. *DiBenedetto E.* Degenerate parabolic equations. – New York: Springer, 1993.
7. *Chen Y. Z., Wu L. C.* Second order elliptic equations and elliptic systems. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998.

Одержано 24.04.07,
після доопрацювання — 25.12.08