УДК 519.21

А. О. Погоруй (Житомир. ун-т)

СТАЦІОНАРНІ РОЗПОДІЛИ ЗГАСАЮЧИХ ЕВОЛЮЦІЙ

We study fading random walks on the line. We compute stationary distributions of the Markov fading evolution and study the special semi-Markov case where sojourn times of the renewal process are Erlang-distributed.

Рассматриваются затухающие случайные блуждания на прямой. Вычислены стационарные распределения затухающей марковской эволюции, а также исследован частный полумарковский случай, когда времена пребывания процесса восстановления имеют эрланговские распределения.

1. Вступ. Уперше телеграфний процес, як модель еволюції частинки на прямій, вивчався у роботах Гольдштейна [1] і Каца [2]. Після цього телеграфний процес досліджувався багатьма математиками і фізиками, оскільки такий процес є альтернативою до вінерової моделі броунівського процесу і має важливе значення для практичних застосувань [3 – 9].

Розглядались також різні узагальнення телеграфного процесу на багатовимірні простори та напівмарковські перемикаючі процеси (див. роботи [5 – 11] та наведену в них бібліографію).

У роботі [12] досліджено згасаючу марковську випадкову еволюцію, яка є узагальненням моделі Гольдштейна – Каца прямолінійної еволюції частинки на випадок, коли її швидкість з часом прямує до нуля. Згасаюча еволюція моделює рух частинки на прямій під дією зовнішньої сили, в результаті якої частинка зупиняється у деякій точці, а отже, існує граничний розподіл координати процесу на прямій.

У даній роботі досліджується стаціонарний розподіл згасаючої марковської еволюції із затримкою у відбиваючому екрані, обчислено граничний розподіл згасаючої еволюції з ерлангівськими перемиканнями.

2. Стаціонарний розподіл для марковського випадку з затримуючим екраном. Нехай θ_k, $k \geq 0$, — послідовність незалежних випадкових величин, які мають показникові розподіли $\mathrm{P}\{\theta_k \geq t\} = e^{-\lambda_k t} I\{t \geq 0\}$, $\lambda_k > 0$. Введемо відповідний цій послідовності стохастичний потік $\tau_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k$, $n \geq 1$. Нехай $\xi(t)$ — процес відновлення, який задається формулою $\xi(t) = \max\{n \geq 0 : \tau_n \leq$ $\leq t\}$, $t > 0$.

Розглянемо згасаючий телеграфний процес $\eta(t) = (-a)^{\xi(t)}$, де $0 < a < 1$ — константа, $t \geq 0$, і відповідну йому марковську випадкову еволюцію

$$x(t) = \int_0^t (-a)^{\xi(s)}\, ds.$$

Цей процес відрізняється від розглянутого у роботі [12] тим, що різні θ_k мають різні параметри λ_k, $k \geq 0$. Нехай у точці $x = 0$ процес $x(t)$ має відбиваючий екран із затримкою, тобто якщо $x(t)$ досяг нуля і $\xi(t)$ має непарне значення, то $x(t) = 0$ до тих пір, поки $\xi(t)$ не змінить значення. Наша мета полягає у дослідженні умов існування стаціонарного розподілу ρ процесу $x(t)$ з відбиваючим екраном та одержанні формули для його обчислення.

Розглянемо двокомпонентний марковський процес $\varsigma(t) = (x(t), \xi(t))$. Інфінітезимальний оператор A цього процесу є відомим [5, 6]:

$$A\varphi(x, s) = C(s)\frac{d\varphi(x, s)}{dx} + \lambda_s [P\varphi(x, s) - \varphi(x, s)],$$

де $x \in R$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, функція $\varphi(x, s)$ є неперервно диференційовною по x з обмеженою першою похідною, $P\varphi(x, s) = P\varphi(x, s+1)$, а функція $C(s)$ задається формулою

$$C(s) = (-a)^s.$$

Нехай $\rho(x, s)$ — стаціонарний розподіл процесу $\varsigma(t)$, тоді

$$\sum_{s=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(x, s) A\varphi(x, s)\, dx = 0. \tag{1}$$

Звідси одержуємо рівняння для $\rho(x, s)$, а саме

$$\begin{gathered}
\frac{d\rho(x,0)}{dx} + \lambda_0 \rho(x,0) = 0, \\
-a\frac{d\rho(x,1)}{dx} + \lambda_1 \rho(x,1) - \lambda_0 \rho(x,0) = 0, \\
a^2 \frac{d\rho(x,2)}{dx} + \lambda_2 \rho(x,2) - \lambda_1 \rho(x,1) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-1)^{n-1} a^n \frac{d\rho(x,n)}{dx} + \lambda_n \rho(x,n) - \lambda_{n-1} \rho(x, n-1) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{2}$$

з граничними умовами $\lambda_{2n-1}\rho[0, 2n-1] = a^{2n-1}\rho(0+, 2n-1), n = 1, 2, \ldots$, які отримують із (1) з урахуванням існування в $x = 0$ атомів $\rho[0, 2n-1]$ стаціонарного розподілу $\varsigma(t)$. Розв'язуючи послідовно рівняння системи (2), одержуємо:

для неперервної частини міри ρ

$$\rho(x,0) = c_0 e^{-\lambda_0 x}, \qquad \rho(x,1) = c_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + a\lambda_0} e^{-\lambda_0 x},$$

$$\rho(x,2) = c_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + a\lambda_0} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - a^2\lambda_0} e^{-\lambda_0 x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\rho(x,n) = c_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + a\lambda_0} \cdots \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - (-1)^n a^n \lambda_0} e^{-\lambda_0 x}$$

і для атомів

$$\rho[0, 2n-1] = \frac{a^{2n-1}}{\lambda_{2n-1}} \rho(0+, 2n-1) =$$

$$= c_0 \frac{a^{2n-1}}{\lambda_{2n-1}} \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + a\lambda_0} \cdots \frac{\lambda_{2n-2}}{\lambda_{2n-1} + a^{2n-1}\lambda_0}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Константа c_0 є нормуючим множником, який визначається з рівності

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(x,n)\, dx + \sum_{m=1}^{\infty} \rho[0, 2m-1] = 1. \tag{3}$$

Звідси для існування невиродженого розподілу $\rho(\cdot)$ необхідно, щоб збігались ряди

$$\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1 + a\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1 + a\lambda_0}\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - a^2\lambda_0} + \ldots + \frac{1}{\lambda_1 + a\lambda_0} \cdots$$

$$\cdots \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - (-1)^n a^n \lambda_0} + \ldots \tag{4}$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n-1}}{\lambda_{2n-1}} \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + a\lambda_0} \frac{\lambda_2}{\lambda_3 + a^3\lambda_0} \cdots \frac{\lambda_{2n-2}}{\lambda_{2n-1} + a^{2n-1}\lambda_0}. \tag{5}$$

Неважко переконатись, що коли $0 < a < 1$ і $\lambda = \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots$, то ряд (4) є розбіжним. Зазначимо, що без відбиваючого екрану такий процес має стаціонарний розподіл [12]. Позначимо n-й член ряду (4) через d_n. Використовуючи критерій Раабе для збіжності рядів, можна сформулювати достатню умову збіжності ряду (4):

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{d_n}{d_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n + (-1)^n a^{n+1}\lambda_0}{\lambda_n} = p > 1.$$

Позначимо n-й член ряду (5) через s_n. Для збіжності ряду (5) достатньо, щоб

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{s_n}{s_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{\lambda^2_{2n+1} - a^2\lambda_{2n}\lambda_{2n-1} + a^{2n+1}\lambda_0\lambda_{2n+1}}{a^2\lambda_{2n}\lambda_{2n-1}} = p > 1.$$

Зокрема, ряди (4), (5) збігаються, якщо існує $N \geq 1$ таке, що для всіх $n \geq N$ $\lambda_n = b^n$, де $b > a$, і в цьому випадку існує стаціонарний розподіл процесу $x(t)$ з неперервною частиною $\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho(x, n)$ та атомом $\rho[0] = \sum_{n=1}^{\infty}\rho[0, 2n - - 1]$. Позначимо через σ_1, σ_2 суми рядів (4), (5) відповідно. Тоді стаціонарний розподіл процесу $x(t)$ має вигляд

$$\rho(x) = \frac{\lambda_0\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}e^{-\lambda_0 x}, \qquad \rho[0] = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

3. Ерлангівський випадок. Нехай процес відновлення $\xi(t)$ задається формулою $\xi(t) = \max\{n \geq 0 : \tau_n \leq t\}$, $t > 0$, де $\tau_n = \sum_{k=0}^{n}\theta_k$, θ_k — незалежні випадкові величини з ерлангівським розподілом зі щільністю

$$f_k(t) = \frac{dF_k(t)}{dt} = \lambda^2 t e^{-\lambda t} I\{t \geq 0\}, \quad \lambda > 0.$$

У цьому випадку випадкова еволюція $x(t) = \int_0^t (-a)^{\xi(s)}\, ds$ є напівмарковською. Обчислимо граничний розподіл цього не марковського процесу.

Розглянемо випадкову величину $\sigma = \int_0^{\infty}(-a)^{\xi(s)}\, ds$. Оскільки θ_k однаково розподілені і $\sigma = (\theta_1 + a^2\theta_3 + \ldots) - a(\theta_2 + a^2\theta_4 + \ldots)$, то для знаходження функції розподілу $F_\sigma(x) = \mathrm{P}\{\sigma \leq x\}$ досить знайти розподіл величини $\eta = = \theta_1 + a^2\theta_3 + \ldots$. Для спрощення викладок покладемо $\lambda = 1$. Позначимо $F(x) = \mathrm{P}\{\eta \leq x\}$, тоді

$$F(x) = \mathrm{P}\{\theta_1 + a^2\eta' \le x\} = \int_0^\infty ue^{-u}\,\mathrm{P}\{u + a^2\eta' \le x\}\,du =$$

$$= \int_0^\infty ue^{-u}\,\mathrm{P}\left\{\eta' \le \frac{x-u}{a^2}\right\}du,$$

де η' — випадкова величина, однаково розподілена з η.

Отже,

$$F(x) = \int_0^\infty ue^{-u} F\left\{\frac{x-u}{a^2}\right\}du. \tag{6}$$

Неважко переконатись, що $F(0) = 0$. Будемо шукати $F(x)$ у вигляді ряду

$$F(x) = 1 + (a_{01}x + a_{02})e^{-x} + (a_{11}x + a_{12})e^{-x/a^2} + \ldots$$

$$\ldots + (a_{n1}x + a_{n2})e^{-x/a^{2n}} + \ldots . \tag{7}$$

Звідси з урахуванням (6) маємо

$$F(x) = \int_0^\infty ue^{-u}\left[1 + \left(a_{01}\frac{x-u}{a^2} + a_{02}\right)e^{-\frac{x-u}{a^2}} + \left(a_{11}\frac{x-u}{a^2} + a_{12}\right)e^{-\frac{x-u}{a^4}} + \right.$$

$$\left. + \left(a_{21}\frac{x-u}{a^2} + a_{22}\right)e^{-\frac{x-u}{a^6}} + \ldots\right]du =$$

$$= 1 - xe^{-x} - e^{-x} + a_{01}a^2\frac{(a^2x - x + 2a^2)e^{-x} + (a^2x - x - 2a^2)e^{-x/a^2}}{(a^2-1)^3} +$$

$$+ a_{02}a^2\frac{(x - a^2x - a^2)e^{-x} + a^2e^{-x/a^2}}{(a^2-1)^2} +$$

$$+ a_{11}a^6\frac{(a^4x - x + 2a^4)e^{-x} + (a^4x - x + 2a^4)e^{-x/a^4}}{(a^4-1)^3} +$$

$$+ a_{12}a^4\frac{(x - a^4x - a^4)e^{-x} + a^4e^{-x/a^4}}{(a^4-1)^2} +$$

$$+ a_{21}a^{10}\frac{(a^6x - x + 2a^6)e^{-x} + (a^6x - x + 2a^6)e^{-x/a^6}}{(a^6-1)^3} +$$

$$+ a_{22}a^6\frac{(x - a^6x - a^6)e^{-x} + a^6e^{-x/a^6}}{(a^6-1)^2} + \ldots, \tag{8}$$

звідки, в свою чергу, з урахуванням (7) одержуємо:

при xe^{-x}

$$a_{01} = -1 + a_{01}\frac{a^2}{(a^2-1)^2} + a_{02}\frac{a^2}{1-a^2} + a_{11}\frac{a^6}{(a^4-1)^2} + a_{12}\frac{a^4}{1-a^4} +$$

$$+ a_{21}\frac{a^{10}}{(a^6-1)^2} + a_{22}\frac{a^6}{1-a^6} + \ldots + a_{n1}\frac{a^{4n+2}}{(a^{2n+2}-1)^2} + a_{n2}\frac{a^{2n+2}}{1-a^{2n+2}} + \ldots,$$

при e^{-x}

$$a_{02} = -1 + a_{01}\frac{2a^4}{(a^2-1)^3} - a_{02}\frac{a^4}{(a^2-1)^2} + a_{11}\frac{2a^{10}}{(a^4-1)^3} - a_{12}\frac{a^8}{(a^4-1)^2} +$$

$$+ a_{21}\frac{2a^{16}}{(a^6-1)^3} - a_{22}\frac{a^{12}}{(a^6-1)^2} + \ldots + a_{n1}\frac{a^{6n+4}}{\left(a^{2n+2}-1\right)^3} - a_{n2}\frac{a^{4n+4}}{\left(a^{2n+2}-1\right)^2} + \ldots, \tag{9}$$

при $xe^{-\frac{x}{a^{2(n+1)}}}$

$$a_{(n+1)1} = a_{n1}\frac{a^{4n+2}}{\left(a^{2n+2}-1\right)^2},$$

при $e^{-\frac{x}{a^{2(n+1)}}}$

$$a_{(n+1)2} = -a_{n1}\frac{2a^{6n+4}}{\left(a^{2n+2}-1\right)^3} + a_{n2}\frac{a^{4n+4}}{\left(a^{2n+2}-1\right)^2}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Із (9) отримуємо два співвідношення:

$$1 = a_{01}\left[\left(1 + \frac{a^2}{\left(a^2-1\right)^2} + \frac{a^8}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2} + \frac{a^{18}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2\left(a^6-1\right)^2} + \ldots\right) + \right.$$

$$+ 2\left(\frac{a^8}{\left(a^2-1\right)^3\left(a^4-1\right)} + \frac{a^{18}}{\left(a^2-1\right)^3\left(a^4-1\right)^2\left(a^6-1\right)} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{a^{18}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^3\left(a^6-1\right)} + \ldots\right)\right] +$$

$$+ a_{02}\left(\frac{a^2}{1-a^2} + \frac{a^8}{\left(1-a^2\right)^2\left(1-a^4\right)} + \frac{a^{18}}{\left(1-a^2\right)^2\left(1-a^4\right)^2\left(1-a^6\right)} + \ldots\right) \tag{10}$$

та

$$1 = a_{01}\left(\frac{2a^2}{\left(a^2-1\right)^3} + \frac{2a^{12}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^3} + \frac{2a^{12}}{\left(a^2-1\right)^3\left(a^4-1\right)^2} + \right.$$

$$+ \frac{2a^{24}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2\left(a^6-1\right)^3} + \frac{2a^{24}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^3\left(a^6-1\right)^2} +$$

$$\left. + \frac{2a^{24}}{\left(a^2-1\right)^3\left(a^4-1\right)^2\left(a^6-1\right)^2} + \ldots\right) -$$

$$- a_{02}\left(1 + \frac{a^4}{\left(a^2-1\right)^2} + \frac{a^{12}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2} + \frac{a^{24}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2\left(a^6-1\right)^2} + \ldots\right). \tag{11}$$

Неважко переконатись, використавши, наприклад, ознаку Даламбера, що всі ряди при коефіцієнтах рівностей (10), (11) є збіжними.

Зазначимо, що для ряду при коефіцієнті a_{01} у формулі (10) має місце формула [13, с. 202]

$$1 + \frac{a^2}{\left(a^2-1\right)^2} + \frac{a^8}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2} + \frac{a^{18}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2\left(a^6-1\right)^2} + \ldots$$

$$\ldots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-a^{2k}\right)^{-1}.$$

Введемо позначення

$$S_1 = \left(1+\frac{a^2}{\left(a^2-1\right)^2}+\frac{a^8}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2}+\frac{a^{18}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2\left(a^6-1\right)^2}+\ldots\right) +$$

$$+\ 2\left(\frac{a^8}{\left(a^2-1\right)^3\left(a^4-1\right)}+\frac{a^{18}}{\left(a^2-1\right)^3\left(a^4-1\right)^2\left(a^6-1\right)}\ +\right.$$

$$\left. +\ \frac{a^{18}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^3\left(a^6-1\right)}+\ldots\right),$$

$$S_2 = \frac{a^2}{1-a^2} + \frac{a^8}{\left(1-a^2\right)^2\left(1-a^4\right)} + \frac{a^{18}}{\left(1-a^2\right)^2\left(1-a^4\right)^2\left(1-a^6\right)} + \ldots,$$

$$S_3 = \frac{2a^2}{\left(a^2-1\right)^3} + \frac{2a^{12}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^3} + \frac{2a^{12}}{\left(a^2-1\right)^3\left(a^4-1\right)^2} +$$

$$+\ \frac{2a^{24}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2\left(a^6-1\right)^3} + \ldots,$$

$$S_4 = 1 + \frac{a^4}{\left(a^2-1\right)^2} + \frac{a^{12}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2} + \frac{a^{24}}{\left(a^2-1\right)^2\left(a^4-1\right)^2\left(a^6-1\right)^2} + \ldots.$$

Розв'язуючи (10), (11), знаходимо

$$a_{01} = \frac{S_2+S_3}{S_1S_3+S_2S_4}, \qquad a_{02} = \frac{S_4-S_1}{S_1S_3+S_2S_4}.$$

Звідси з урахуванням (9) обчислюємо значення інших коефіцієнтів розкладу (7).

Із (9) легко бачити, що $F(0) = 1 + a_{02} + a_{12} + a_{22} + \ldots = 0$. Далі, із (6) випливає, що $F(x)$ є монотонною, а із (7) і (9) — $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Отже, $F(x)$ — функція розподілу. Легко бачити, що не існує інших функцій розподілу, які б задовольняли рівняння (6). Дійсно, якщо $F_1 \neq F$ — функція розподілу, що є розв'язком (6), то і функція $\Phi = F_1 - F$ є розв'язком (6), до того ж Φ є немонотонною, що неможливо.

Функція розподілу для

$$\sigma = \left(\theta_1 + a^2\theta_3 + \ldots\right) - a\left(\theta_2 + a^2\theta_4 + \ldots\right)$$

має вигляд

$$F_\sigma(x) = \mathrm{P}\{\sigma \le x\} = \mathrm{P}\Big\{\big(\theta_1 + a^2\theta_3 + \ldots\big) - a\big(\theta_2 + a^2\theta_4 + \ldots\big) \le x\Big\} =$$

$$= \mathrm{P}\left\{\big(\theta_2 + a^2\theta_4 + \ldots\big) \ge \frac{\big(\theta_1 + a^2\theta_3 + \ldots\big) - x}{a}\right\} = \int_0^\infty dF(y)\left[1 - F\left(\frac{y-x}{a}\right)\right].$$

1. *Goldstein S.* On diffusion by discontinuous movements and on the telegraph equation // Quart. J. Math. and Mech. – 1951. – **4**. – P. 129 – 156.
2. *Kac M.* A stochastic model related to the telegrapher's equation // Rocky Mountain J. Math. – 1974. – **4**. – P. 497 – 509.
3. *Турбин А. Ф.* Математическая модель одномерного броуновского движения как альтернатива математической модели А. Эйнштейна, Н. Винера и П. Леви // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – 1998. – № 2. – С. 47 – 60.
4. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1978. – 220 с.
5. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. – 183 p.
6. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 256 с.
7. *Papanicolaou G.* Asymptotic analysis of transport processes // Bull. Amer. Math. Soc. – 1975. – **81**. – P. 330 – 391.
8. *Pinsky M. A.* Lectures on random evolution. – World Sci., 1991. – 137 p.
9. *Orsinger E., De Gregorio A.* Random flights in higher spaces // J. Theor. Probab. – 2007. – **20**. – P. 769 – 806.
10. *Pogorui A. A., Rodriguez-Dagnino R. M.* One-dimensional semi-Markov evolution with general Erlang sojourn times // Random Operators and Stochast. Equat. – 2005. – **13**, № 4. – P. 399 – 405.
11. *Pogorui A. A., Rodriguez-Dagnino R. M.* Limiting distribution of random motion in a n-dimensional parallelepiped // Ibid. – 2006. – **14**, № 4.
12. *Самойленко І. В.* Згасаюча марковська випадкова еволюція // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 364 – 372.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи М.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1967.

Одержано 15.02.07,
після доопрацювання — 25.11.08