УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Міжнар. мат. центр НАН України, Київ)

КОМОНОТОННЕ НАБЛИЖЕННЯ ДВІЧІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

We consider the case where a 2π-periodic function f is twice continuously differentiable on the real axis $\mathbb{R}$ and changes the monotonicity at various fixed points $y_i \in [-\pi, \pi)$, $i = 1, \ldots, 2s$, $s \in \mathbb{N}$ (i.e., on $\mathbb{R}$, there exists the set $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ of points $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ such that, on $[y_i, y_{i-1}]$, f does not decrease if i is odd and does not increase if i is even). In this case, for every natural k and n, $n \ge N(Y, k) = \text{const}$, we construct a trigonometric polynomial T_n of order $\le n$, which changes its monotonicity at the same points $y_i \in Y$ as f and is such that

$$\| f - T_n \| \le \frac{c(k, s)}{n^2} \omega_k(f'', 1/n)$$

$$\left(\| f - T_n \| \le \frac{c(r+k, s)}{n^r} \omega_k(f^{(r)}, 1/n), \quad f \in C^{(r)}, \quad r \ge 2 \right),$$

where $N(Y, k)$ depends only on Y and k, $c(k, s)$ is a constant depending only on k and s, $\omega_k(f, \cdot)$ is a module of smoothness of order k of the function f, and $\|\cdot\|$ is a max-norm.

В случае, когда дважды непрерывно дифференцируемая на действительной оси $\mathbb{R}$ 2π-периодическая функция f изменяет монотонность в различных фиксированных точках $y_i \in [-\pi, \pi)$, $i = 1, \ldots, 2s$, $s \in \mathbb{N}$ (т. е. на $\mathbb{R}$ есть множество $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ точек $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ таких, что на $[y_i, y_{i-1}]$ f не убывает, если i нечетное, и не возрастает, если i четное), для каждых натуральных k и n, $n \ge N(Y, k) = \text{const}$, построен тригонометрический полином T_n порядка $\le n$, который изменяет свою монотонность в тех же точках $y_i \in Y$, что и f, и такой, что

$$\| f - T_n \| \le \frac{c(k, s)}{n^2} \omega_k(f'', 1/n)$$

$$\left(\| f - T_n \| \le \frac{c(r+k, s)}{n^r} \omega_k(f^{(r)}, 1/n), \quad f \in C^{(r)}, \quad r \ge 2 \right),$$

где $N(Y, k)$ зависит только от Y и k; $c(k, s)$ — постоянная, зависящая только от k и s; $\omega_k(f, \cdot)$ — модуль гладкости порядка k функции f и $\|\cdot\|$ — max-норма.

1. Вступ. Нехай C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\|f\| := \|f\|_{\mathbb{R}} := \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ і $\mathbb{T}_n$, $n \in \mathbb{N}$, — простір тригонометричних поліномів $t_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ порядку $\le n$, де a_j, $b_j \in \mathbb{R}$.

Нагадаємо класичну теорему Джексона – Зигмунда – Ахієзера – Стєчкіна: *при кожних натуральних k і n для будь-якої функції $f \in C$ знайдеться поліном $\sigma_n \in \mathbb{T}_n$ такий, що*

$$\| f - \sigma_n \| \le c(k) \omega_k(f, 1/n), \tag{1}$$

де $c(k)$ — *стала, яка залежить лише від* k, *і* $\omega_k(f,\cdot)$ — *модуль гладкості порядку* k *функції* f.

Крім того, якщо $f \in C^{(r)} := \{f : f^{(r)} \in C\}$, $r \in \mathbb{N}$, то з (1) випливає нерівність

$$\| f - \sigma_n \| \le \frac{c(r+k)}{n^r} \omega_k(f^{(r)}, 1/n), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

(Детальніше див., наприклад, [1, с. 204 – 212].)

У даній роботі наведено комонотонні аналоги нерівностей (1) і (2). А саме, нехай на $[-\pi, \pi)$ зафіксовано $2s$, $s \in \mathbb{N}$, точок y_i:

$$-\pi \le y_{2s} < y_{2s-1} < \ldots < y_1 < \pi,$$

а для решти індексів $i \in \mathbb{Z}$ точки y_i визначаються рівністю $y_i = y_{i+2s} + 2\pi$ (тобто $y_0 = y_{2s} + 2\pi, \ldots, y_{2s+1} = y_1 - 2\pi, \ldots$). Позначимо $Y := \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $\Delta^{(1)}(Y)$ — множина всіх функцій f, які не спадають на $[y_1, y_0]$, не зростають на $[y_2, y_1]$, не спадають на $[y_3, y_2]$ і т. д. Зауважимо, що якщо періодична функція f диференційовна, то

$$f \in \Delta^{(1)}(Y) \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)\Pi(x) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

де

$$\Pi(x) := \Pi(x, Y) := \prod_{i=1}^{2s} \sin \frac{x - y_i}{2}, \qquad \Pi(x) > 0, \quad x \in (y_1, y_0).$$

У роботах [2, 3] для будь-якої функції $f \in C \cap \Delta^{(1)}(Y)$ означено відповідно поліноми T_n і P_n з $\mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ такі, що

$$\| f - T_n \| \le c(s)\omega_1(f, 1/n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$\| f - P_n \| \le c(s)\omega_2(f, 1/n), \qquad n \ge N(Y), \tag{4}$$

$$\| f - P_n \| \le C(Y)\omega_2(f, 1/n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4$'$}$$

де $c(s)$ — стала, яка залежить лише від s, а $N(Y)$ і $C(Y)$ — сталі, які залежать лише від Y, тобто від $\min\limits_{i=1,\ldots,2s} \{y_i - y_{i+1}\}$. (Поліном P_n в (4$'$) при $1 \le n < N(Y)$ „лише" існує, бо є (4) і нерівність Уітні [4] $\| f - f(0) \| \le k\omega_k(f, k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$.) У роботах [5, с. 64 – 83; 6] наведено контрприклади, які вказують на неможливість заміни ω_2 в (4$'$) (а отже, і в (4)) на ω_k з $k \ge 3$.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *При кожних натуральних* k *і* n, $n \ge N(Y,k) = \text{const}$, *для будь-якої функції* $f \in C^{(2)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$ *знайдеться поліном* $R_n \in \mathbb{T}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ *такий, що*

$$\| f - R_n \| \le \frac{c(k,s)}{n^2} \omega_k(f'', 1/n) \tag{5}$$

$$\left(\| f - R_n \| \le \frac{c(r+k, s)}{n^r} \omega_k(f^{(r)}, 1/n), \quad f \in C^{(r)}, \ r \ge 2 \right),$$

де $N(Y,k)$ *залежить лише від* Y *і* k, *а* $c(k,s)$ — *стала, яка залежить лише від* k *і* s.

Наслідком теореми 1 і нерівності Уітні [4] $\| f - f(0) \| \le k\omega_k(f, k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, є така теорема.

Теорема 1′. *При кожних натуральних* k *і* n *для будь-якої функції* $f \in$ $\in C^{(2)} \bigcap \Delta^{(1)}(Y)$ *знайдеться поліном* $R_n \in \mathbb{T}_n \bigcap \Delta^{(1)}(Y)$ *такий, що*

$$\| f - R_n \| \le \frac{C(k,Y)}{n^2} \omega_k(f'', 1/n) \tag{5′}$$

$$\left(\| f - R_n \| \le \frac{C(r+k,Y)}{n^r} \omega_k(f^{(r)}, 1/n), \quad f \in C^{(r)},\ r \ge 2 \right),$$

де $C(k,Y)$ *— стала, яка залежить лише від* k *і* Y.

***Зауваження* 1.** Ми припускаємо, що сталі $N(Y)$ в (4) і $N(Y,k)$ в теоремі 1, а також сталі $C(Y)$ і $C(k,Y)$ в нерівностях (4′) і (5′) неможливо замінити сталими, які не залежать від Y, а залежать, скажімо, від s. Це припущення не розглядаємо в даній роботі.

В [5] (розділ 2) доведено окремий випадок теореми 1′: якщо $f \in W^{(r)} \bigcap \Delta^{(1)}(Y)$ (де $W^{(r)}$ — множина функцій g з абсолютно неперервними $g^{(r-1)}$ і $\left| g^{(r)}(x) \right| \le$ ≤ 1 майже скрізь на $\mathbb{R}$), то знайдеться $T_n \in \mathbb{T}_n \bigcap \Delta^{(1)}(Y)$ такий, що

$$\| f - T_n \| \le \frac{C(r,Y)}{n^r}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \ge 2,$$

$C(r,Y)$ — стала, яка залежить лише від r і Y. Для $r = 1$ це твердження є окремим випадком нерівності (3).

2. Допоміжні факти. Нагадаємо, що модулем гладкості порядку $k \in \mathbb{N}$ обмеженої на $[a,b]$ функції $g = g(x)$ називають функцію

$$\omega_k(g, t, [a,b]) := \sup_{|h| \le t} \ \sup_{x \in [a+k|h|,\, b-k|h|]} \left| \Delta_h^k g(x) \right|, \quad t \in [0, (b-a)/(2k)],$$

де

$$\Delta_h^k g(x) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} g(x+ih)$$

— k-та різниця функції g в точці x із кроком h. Для $t > (b-a)/(2k)$ покладемо $\omega_k(g,t,[a,b]) := \omega_k(g,(b-a)/(2k),[a,b])$. У випадку 2π-періодичної g покладемо $\omega_k(g,t) := \sup\limits_{a \in \mathbb{R}} \omega_k(g,t,[a,a+2\pi])$, тобто

$$\omega_k(g,t) = \sup_{|h| \le t} \left\| \Delta_h^k g(\cdot) \right\|, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Далі через c_ν, $\nu = 1, \ldots, 37$, будемо позначати додатні числа, які можуть залежати лише від фіксованих $r, k, l \in \mathbb{N}$, і $p \in \mathbb{Z}_+$. Доведемо лему 1, яка дещо уточнює оцінку (1), а отже і (2), а також відповідні оцінки для одночасного наближення функції та її похідних. Нехай

$$J_{n,l}(x) := \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^{2l}, \qquad K_{n,l}(x) := J_{n,l}(x) \left(\int_{-\pi}^{\pi} J_{n,l}(x)\,dx \right)^{-1}$$

— парне і невід'ємне ядро типу Джексона, де $n \in \mathbb{N}$ і $l \in \mathbb{N}$, і

$$\sigma_{n,l}(f,x) := (-1)^{k+1} \int_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t) \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+it)\,dt$$

— поліном з $\mathbb{T}_{l(n-1)}$, запропонований Стєчкіним [7] для доведення нерівності (1), де $f \in C$ і $k \in \mathbb{N}$.

Лема 1. *При кожних натуральних* $(r+1)$, k, l, $2l \geq k+r+2$, *і* n *для будь-якої функції* $f \in C^{(r)}$ *поліном* $\sigma_{n,l} \in \mathbb{T}_{l(n-1)}$ *є таким, що при будь-яких* x *і* $\delta > 0$

$$\left| f^{(p)}(x) - \sigma_{n,l}^{(p)}(f,x) \right| \leq \frac{c_1}{n^{r-p}} \left(\omega_k(f^{(r)}, 1/n, [x-\delta, x+\delta]) + \left(\frac{1}{n\delta}\right)^{2l-k-r-1} \omega_k(f^{(r)}, 1/n) \right) \tag{6}$$

$$\left(\leq \frac{c_1}{n^{r-p}} \omega_k(f^{(r)}, 1/n) \right), \qquad p = 0, 1, \ldots, r.$$

Доведення. Без втрати загальності будемо вважати, що $\delta \in [1/n, \pi]$. Оцінимо $\left| f(x) - \sigma_{n,l}(f,x) \right|$. Оскільки

$$f(x) - \sigma_{n,l}(f,x) = (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t) \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+it)\,dt =$$

$$= (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t) \Delta_t^k f(x)\,dt, \tag{7}$$

то

$$\left| f(x) - \sigma_{n,l}(f,x) \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t) \left| \Delta_t^k f(x) \right| dt = \int_{-\pi}^{-\delta/k} + \int_{-\delta/k}^{\delta/k} + \int_{\delta/k}^{\pi} =: I_1 + I_2 + I_3. \tag{8}$$

Оцінимо I_2:

$$I_2 \leq \int_{-\delta/k}^{\delta/k} K_{n,l}(t) \max_{|h| \leq |t|} \left| \Delta_t^k f(x) \right| dt \leq \int_{-\delta/k}^{\delta/k} K_{n,l}(t) \sup_{|h| \leq |t|} \left\| \Delta_t^k f(\cdot) \right\|_{[x-\delta+k|h|,\, x+\delta-k|h|]} dt \leq$$

$$\leq \int_{-\delta/k}^{\delta/k} K_{n,l}(t) \omega_k(f, |t|, [x-\delta, x+\delta])\,dt.$$

Для оцінки останнього інтеграла скористаємося властивістю

$$\omega_k(f, n|t|n^{-1}, [a,b]) \leq n^k (|t| + n^{-1})^k \omega_k(f, n^{-1}, [a,b]) \tag{9}$$

і нерівністю [7] (лема 8)

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_{n,l}(t) (|t| + n^{-1})^k\,dt \leq c_2 n^{-k}.$$

Отже, $I_2 \leq c_2 \omega_k(f, n^{-1}, [x-\delta, x+\delta])$. З двох аналогічних інтегралів I_1 і I_3 оцінимо лише I_3. При цьому врахуємо (9) і властивості $K_{n,l}$ (див., наприклад, [1, с. 131]). Нехай $\delta/k \leq n^{-1} \leq \delta$. Тоді

$$I_3 = \int_{\delta/k}^{\pi} K_{n,l}(t) \left| \Delta_t^k f(x) \right| dt \leq \int_{\delta/k}^{\pi} K_{n,l}(t) \left\| \Delta_t^k f(\cdot) \right\| dt \leq$$

$$\leq \int_{\delta/k}^{\pi} K_{n,l}(t) \omega_k(f,t)\,dt \leq n^k \omega_k(f, 1/n) \int_{\delta/k}^{\pi} (t + n^{-1})^k K_{n,l}(t)\,dt \leq$$

$$\leq\ n^k\omega_k(f,1/n)\left(\frac{2^k}{n^k}\int\limits_{\delta/k}^{1/n}K_{n,l}(t)dt\ +\ 2^k\int\limits_{1/n}^{\pi}t^kK_{n,l}(t)dt\right)\ \leq$$

$$\leq\ n^k\omega_k(f,1/n)\left(\frac{2^k}{n^k}\int\limits_{\delta/k}^{\pi}K_{n,l}(t)dt\ +\ \frac{2^k}{c_2n^{2l-1}}\int\limits_{1/n}^{\pi}t^k\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2l}dt\right)\ \leq$$

$$\leq\ n^k\omega_k(f,1/n)\frac{2^k}{c_3n^{2l-1}}\left(\frac{1}{n^k}\int\limits_{\delta/k}^{\infty}\frac{dt}{(t/\pi)^{2l}}\ +\ \pi^{2l}\int\limits_{\delta/k}^{\infty}\frac{dt}{t^{2l-k}}\right)\ =$$

$$=\ \omega_k(f,1/n)\frac{2^k\pi^{2l}}{c_3n^{2l-k-1}}\left(\frac{k^{2l-1}}{n^k(2l-1)\delta^{2l-1}}\ +\ \frac{k^{2l-k-1}}{(2l-k-1)\delta^{2l-k-1}}\right)\ \leq$$

$$\leq\ \frac{c_4}{(n\delta)^{2l-k-1}}\omega_k(f,1/n).$$

Для $\delta/k\ >\ 1/n$ аналогічно

$$I_3\ \leq\ n^k\omega_k(f,1/n)\frac{2^k\pi^{2l}}{c_3n^{2l-1}}\int\limits_{\delta/k}^{\infty}\frac{dt}{t^{2l-k}}\ \leq\ \frac{c_4}{(n\delta)^{2l-k-1}}\omega_k(f,1/n).$$

Збираючи у (8) оцінки $I_{1,2,3}$, одержуємо нерівність (6) для випадку $r\ =\ p\ =\ 0$. Решта випадків леми 1 випливають з рівностей (7), доведення нерівності (8) і оцінок

$$\omega_{k+i}(f,n^{-1},[a,b])\ \leq\ n^{-i}\omega_k(f^{(i)},n^{-1},[a,b]),\qquad i\ =\ 0,1,\ldots,r.$$

Лему 1 доведено.

Скрізь далі числа c_ν можуть залежати ще й від фіксованих $s,b\in\mathbb{N}$. Для фіксованих $n\in\mathbb{N}$ і $Y\ =\ \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ позначимо

$$h\ :=\ h_n\ :=\ \frac{\pi}{n},\qquad x_j\ :=\ x_{j,n}\ :=\ -jh,\qquad I_j\ :=\ I_{j,n}\ :=\ [x_j,x_{j-1}],\qquad j\in\mathbb{Z},$$

$$O_i\ :=\ O_i(Y,n)\ :=\ (x_{j+5},x_{j-5}),\quad \text{якщо}\quad y_i\in[x_j,x_{j-1}),\quad O\ :=\ O(Y,n)\ :=\ \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}O_i.$$

Будемо писати $j\in H\ :=\ H(Y,n)$, якщо $x_j\in\mathbb{R}\setminus O$. Виберемо $N(Y)\in\mathbb{N}$ таке, що кожен відрізок $[y_i,y_{i-1}]$, $i\ =\ 1,\ldots,2s$, містить принаймні 10 різних відрізків I_j для всіх $n\ \geq\ N(Y)$. Позначимо

$$\chi(x,a)\ :=\ \begin{cases}0, & \text{якщо}\quad x\leq a,\\ 1, & \text{якщо}\quad x>a,\end{cases}\qquad a\in\mathbb{R},\quad \chi_j(x)\ :=\ \chi(x,x_j),$$

$$\breve{\Gamma}_n(x)\ :=\ \min\left\{1,\frac{1}{n|\sin(x/2)|}\right\},\qquad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N},$$

$$\Gamma_j(x)\ :=\ \Gamma_{j,n}(x)\ :=\ \breve{\Gamma}_n(x-(x_j+h/2)),\qquad j\in\mathbb{Z},$$

і зауважимо, що

$$\left\|\sum_{j=1-n}^{n}\Gamma_j^2\right\|\ <\ 6 \tag{10}$$

(детальніше див. [2]).

Скрізь далі $n > N(Y)$ і без втрати загальності будемо вважати, що $y_{2s} = -\pi$. Позначимо

$$J_j(x) := \left(J_{2n,1}(x-(x_j+\pi/(4n))) + J_{2n,1}(x-(x_j+3\pi/(4n)))\right)^b, \qquad b \in \mathbb{N}.$$

Для $j \in H$ і $b \geq s+4$ покладемо

$$t_j(x) := t_{j,n}(x,b,Y) := \frac{1}{d_j}\int\limits_{x_j-\pi}^{x} J_j(u)\Pi(u)\,du \in \mathbb{T}_{c_5 n}, \tag{11}$$

$$\breve{t}_j(x) := \breve{t}_{j,n}(x,b,Y) := \frac{1}{\breve{d}_j}\int\limits_{x_j-\pi}^{x} \Pi_j(u)J_j(u)\Pi(u)\,du \in \mathbb{T}_{c_5 n}, \tag{12}$$

де

$$d_j := \int\limits_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} J_j(u)\Pi(u)\,du, \qquad \breve{d}_j := \int\limits_{x_j-\pi}^{x_j+\pi} \Pi_j(u)J_j(u)\Pi(u)\,du,$$

$$\Pi_j(x) := -\Pi(x, \{x_j, x_{j-1}\}),$$

зокрема, $d_j \neq 0$ і $\breve{d}_j \neq 0$ (для вказаних j і b) (див. детальну оцінку аналогічної величини в [2], лема 1). У наступній лемі збережемо у зручній для нас формі співвідношення (13) – (16) з роботи [2] і аналоги нерівностей (5.22) і (5.27) з роботи [8]. Зауважимо, що співвідношення в [2] описують невід'ємне ядро $J_{n,l}(x-x_j)$, а їх аналоги в лемі 2 — строго додатне $J_j(x)$ як суму двох „сусідніх" невід'ємних.

Лема 2. *Якщо* $j \in H$ *і* $b \geq s+4$, *то*

$$t_j'(x)\Pi(x)\Pi(x_j) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

$$\breve{t}_j'(x)\Pi(x)\Pi(x_j) \leq 0, \qquad x \in [x_j-2\pi+h,\ x_j+2\pi]\setminus I_j, \tag{14}$$

$$t_j(x_j \pm \pi) = \breve{t}_j(x_j \pm \pi) = \chi_j(\pm\pi), \tag{15}$$

$$\left|\chi_j(x) - t_j(x)\right| \leq c_6(\Gamma_j(x))^{2b-s-1}, \qquad x \in [x_j-2\pi,\ x_j+2\pi], \tag{16}$$

$$\left|\chi_j(x) - \breve{t}_j(x)\right| \leq c_6(\Gamma_j(x))^{2b-s-1}, \qquad x \in [x_j-2\pi,\ x_j+2\pi], \tag{17}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \leq c_7\frac{1}{h}(\Gamma_j(x))^{2b-s}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

$$\left|\breve{t}_j'(x)\right| \leq c_7\frac{1}{h}(\Gamma_j(x))^{2b-s}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geq c_8\frac{1}{h}(\Gamma_j(x))^{2b+2s}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus O(Y,n), \tag{20}$$

$$\left|t_j'(x)\right| \geq c_8\frac{1}{h}(\Gamma_j(x))^{2b+2s}\left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \qquad x \in O_i(Y,n), \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{21}$$

$$t_j(x) = \frac{1}{2\pi}x + R_j(x), \qquad \breve{t}_j(x) = \frac{1}{2\pi}x + \breve{R}_j(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

де R_j *і* $\breve{R}_j$ *— деякі поліноми з* $\mathbb{T}_{c_5 n}$.

Зазначимо, що лема 2 доводиться за допомогою рівностей (15) і нерівностей

$$\frac{1}{c_9 h}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \le \left|t_j'(x)\right| \le \frac{c_9}{h}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|,$$

$$\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \le \Gamma_j^{-s}(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad j\in H,$$

$$\left|\int\limits_x^{x_j+\pi}\Gamma_j^a(u)du\right| \le c_{10}h\Gamma_j^{a-1}(x), \qquad a\in\mathbb{N}, \quad x\in[x_j, x_j+2\pi],$$

$$\left|\int\limits_x^{x_j-\pi}\Gamma_j^a(u)du\right| \le c_{10}h\Gamma_j^{a-1}(x), \qquad a\in\mathbb{N}, \quad x\in[x_j-2\pi, x_j].$$

Через Φ^k, $k\in\mathbb{N}$, позначимо множину всіх k-мажорант, тобто неперервних і неспадних на $[0,\infty)$ функцій $\phi(t)$ таких, що $\phi(0) = 0$ і $t^{-k}\phi(t)$ не зростає при $t > 0$. Відомо (див., наприклад, [1, с. 167]), що для будь-якого модуля $\omega_k(g,t)$ множина Φ^k має функцію $\phi(t)$ таку, що $\omega_k(g,t) \le \phi(t) \le 2^k\omega_k(g,t)$, $t \ge 0$. Виберемо $\varphi\in\Phi^k$ так, що

$$\omega_k(f',t) \le \varphi(t) \le 2^k\omega_k(f',t), \qquad t\ge 0.$$

Позначимо

$$H_0 := H_0(Y,n) := \{j\in H(Y,n) : |j| < n\}$$

і

$$Z := \{z_q\}_{q=0}^{n^*} := \{x_j : j\in H_0\}\cup\{y_i\}_{i=0}^{2s},$$

де $n^* := 2n+1-8(2s+1)$ і точки z_q упорядковано за спаданням. Нехай $j(q) := j$, якщо $z_q = x_j$ (з $j\in H_0$), і $j(q) := j(q-1)$, якщо $z_q = y_i$. Покладемо

$$b_1 = s+4.$$

Лема 3. *Якщо* f' *є* 2π*-періодичною,* $\|f'\| \le \varphi(h)$ *і* $f'(x)\Pi(x) \ge 0$, $x\in\mathbb{R}$, *то функція*

$$\tau_n(f,x) := f(-\pi) + \sum_{q=1}^{n^*}\big(f(z_{q-1})-f(z_q)\big)t_{j(q),n}(x,b_1,Y)$$

задовольняє нерівності

$$\|f-\tau_n(f,\cdot)\| \le c_{11}h\varphi(h), \tag{23}$$

$$\tau_n'(f,x)\Pi(x) \ge 0, \qquad x\in\mathbb{R}. \tag{24}$$

Крім того, якщо для $A = \text{const}$ $f(x)-Ax$ *є періодичною, то* $\tau_n(f,x)-Ax\in$ $\in\mathbb{T}_{c_5 n}$.

Доведення. Нерівності $(f(x_{j-1})-f(x_j))\Pi(x_j) \ge 0$, $j\in H_0$, і (13) породжують (24). Оцінка (23) доводиться за допомогою нерівностей (16), (10) і рівності

$$f(x) - \tau_n(f,x) = f(x) - S(x) + S(x) - \tau_n(f,x), \qquad x\in[-\pi,\pi],$$

де $S(x) := f(-\pi) + \sum_{q=1}^{n^*} \big(f(z_{q-1}) - f(z_q) \big) \chi_{j(q)}(x)$. Включення $\tau_n(f,x) - Ax \in$ $\in \mathbb{T}_{c_5 n}$ доводиться аналогічно подібному включенню в [3, с. 207] (сума алгебраїчних доданків з (22) дорівнює Ax, оскільки $\tau_n(f,x) = \tau_n(S,x)$, а на O_i, $i =$ $= 0, \ldots, 2s$, $S(x) = \text{const}$, тому їх сума по $q = 1, \ldots, n^*$ дорівнює сумі по $j =$ $= 1-n, \ldots, n$, і дорівнює Ax).

Лему 3 доведено.

Для кожного $i \in \mathbb{Z}$ позначимо

$$(\underline{y}_i, \bar{y}_i) := (x_{\underline{j}(i)}, x_{\bar{j}(i)}) := O_i,$$

тобто лівий і правий кінці проміжку O_i. Нехай для $x \in \mathbb{R}$

$$d(x,O) := \min_{i\in\mathbb{Z}} \Big\{ \big| x - (\underline{y}_i + h/2) \big|, \ |x - (\bar{y}_i + h/2)| \Big\},$$

$$\tilde{t}_{i,n}(x) := t_{\underline{j}(i),n}(x, b_1, Y) \operatorname{sign} \Pi(\underline{y}_i) + t_{\bar{j}(i),n}(x, b_1, Y) \operatorname{sign} \Pi(\bar{y}_i).$$

Лема 4. *Функція*

$$U_n(x) := h\varphi(h) \sum_{i=1}^{2s} \tilde{t}_{i,n}(x) \tag{25}$$

задовольняє співвідношення

$$U_n \in \mathbb{T}_{c_5 n} \cap \Delta^{(1)}(Y), \tag{26}$$

$$\|U_n\| \le c_{12} h \varphi(h), \tag{27}$$

$$|U_n'(x)| \ge c_{13} \varphi(h) \big(\breve{\Gamma}_n(d(x,O)) \big)^{4(s+2)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus O, \tag{28}$$

$$|U_n'(x)| \ge \frac{c_{13}}{h} \varphi(h) |x - y_i|, \qquad x \in O_i, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Доведення. З (13) випливає, що (26) – (29) є відповідно наслідками (22) (доданки в (25) мають попарно протилежні знаки), (16) і рівності $U_n =$ $= U_n - S + S$, де S — кусково-стала функція у формі (25), (20) ($|U_n(x)|$ дорівнює сумі модулів доданків) і (21).

Лему 4 доведено.

Для $k \in \mathbb{N}$ через $L_k(g, x, [a,b])$ позначимо многочлен Лагранжа степеня $\le k$, який на $[a,b]$ інтерполює функцію $g = g(x)$ у рівновіддалених точках $a + \nu(b-a)/k$, $\nu = 0, \ldots, k$; $L_0(g, x, [a,b]) := g(a)$. Нам буде потрібна відома нерівність Уітні [4]

$$\| g - L_{k-1}(g, \cdot, [a,b]) \|_{[a,b]} \le c_{14}\, \omega_k(g, (b-a)/k, [a,b]), \qquad g \in C([a,b]), \tag{30}$$

і лема 4.2′ з [9]: якщо $g \in C^{(p)}([a,b])$, $p \in \mathbb{N}$, $p < k$, то

$$\Big\| g^{(p)} - L_{k-1}^{(p)}(g, \cdot, [a,b]) \Big\|_{[a,b]} \le c_{15}\, \omega_{k-p}(g^{(p)}, (b-a)/k, [a,b]). \tag{31}$$

Позначимо

$$l_1 := \left[\frac{k+r+1}{2} \right] + 2(s+2) + 1, \qquad J_i := J_{i,n} := [y_i - h,\ y_i + h],$$

$$Y_i := \big(Y \setminus \{ y_i + 2\pi\nu \}_{\nu\in\mathbb{Z}} \big) \cup \{ \underline{y}_i + 2\pi\nu \}_{\nu\in\mathbb{Z}},$$

$$\hat{t}_{i,n}(x) := t_{\bar{j}(i),n}(x, b_1, Y_i) - \breve{t}_{\bar{j}(i),n}(x, b_1, Y_i),$$

де $[\cdot]$ — ціла частина і $i \in \mathbb{Z}$.

Лема 5. *Якщо* $f \in C^{(1)}$ *і* $f'(y_i) = A$ *для всіх* $i \in \mathbb{Z}$, *де* $A = \text{const}$, *то поліном*

$$\hat{\sigma}_n(f, x) \ := \ \sigma_{n,l_1}(f, x) - \sum_{i=1}^{2s} \frac{\sigma'_{n,l_1}(f, y_i) - A}{\hat{t}'_{i,n}(y_i)} \hat{t}_{i,n}(x) \in \mathbb{T}_{c_5 n}$$

при будь-яких $\delta > 0$ *задовольняє нерівності*

$$\| f - \hat{\sigma}_n(f, \cdot) \| \le c_{16} h \varphi(h), \tag{32}$$

$$| f'(x) - \hat{\sigma}'_n(f, x) | \le c_{17} \left(\omega_k(f', h, [x-\delta, x+\delta]) + \left(\frac{1}{n\delta} \right)^{4(s+2)+1} \varphi(h) \right), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

$$\| f' - \hat{\sigma}'_n(f, \cdot) \| \le c_{17} \varphi(h), \tag{34}$$

$$| L_{k-1}(f', x, J_i) - L_{k-1}(f', y_i, J_i) - \hat{\sigma}'_n(f, x) + A | \le \frac{c_{18}}{h} \varphi(h) |x - y_i|, \quad x \in J_i, \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{35}$$

зокрема $\hat{\sigma}'_n(f, y_i) = A$.

Доведення. Включення $\hat{\sigma}_n \in \mathbb{T}_{c_5 n}$ є наслідком (22), (13) і (14). Використовуючи (6), (20), (13) і (14), а також (16) і (17), для $x \in [-\pi, \pi]$ записуємо

$$| f(x) - \hat{\sigma}_n(f, x) | \le c_1 h \varphi(h) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2s} \frac{| \sigma'_{n,l_1}(f, y_i) - f'(y_i) |}{| t'_{\bar{j}(i),n}(y_i, b_1, Y_i) |} \left| t_{\bar{j}(i),n}(x, b_1, Y_i) - \chi_{\bar{j}(i)}(x) + \chi_{\bar{j}(i)}(x) - \breve{t}_{\bar{j}(i),n}(x, b_1, Y_i) \right| \le$$

$$\le c_1 h \varphi(h) + 2s \frac{c_1 h \varphi(h)}{c_8 (\Gamma_{\bar{j}(1)}(y_1))^{2b_1+2s}} 2 c_6 (\Gamma_{\bar{j}(1)}(x))^{2b_1-s-1} \le c_{16} h \varphi(h),$$

тобто оцінка (32) є правильною. Нерівність (33), а отже і (34), доводиться аналогічно, з використанням (18) і (19) замість (16) і (17). Оскільки за означеннями $f'(y_i) = \hat{\sigma}'_n(f, y_i) = A$, $i \in \mathbb{Z}$, то нерівність (35) виконується, якщо на J_i справджується нерівність

$$| B'(x) | := | L'_{k-1}(f', x, J_i) - \hat{\sigma}''_n(f, x) | \le \frac{c_{18}}{h} \varphi(h). \tag{36}$$

З (30) і (34) випливає оцінка

$$\| B \|_{J_i} = \| L_{k-1}(f', \cdot, J_i) - f' + f' - \hat{\sigma}'_n(f, \cdot) \|_{J_i} \le c_{14} \omega_k(f', |J_i|/k, J_i) + c_{17} \varphi(h) \le$$

$$\le c_{19} \omega_k(f', h) + c_{17} \varphi(h) \le c_{20} \varphi(h).$$

З [7] відомо, що якщо поліном задовольняє (34), то $\| \hat{\sigma}_n^{(k+1)}(f, \cdot) \| \le c_{21} \varphi(h)/h^k$. Тому

$$\| B^{(k)} \|_{J_i} \le c_{21} \varphi(h)/h^k.$$

Тепер похідні $B^{(p)}$, $p < k$, задовольняють нерівність типу Колмогорова (див. [9, с. 35])

$$\| B^{(p)} \|_{J_i} \le c_{22} \left(|J_i|^{k-p} \frac{c_{21}}{h^k} \varphi(h) + \frac{1}{|J_i|^p} c_{20} \varphi(h) \right) \le \frac{c_{18}}{h^p} \varphi(h).$$

Лему 5 доведено.

3. Доведення теореми 1. 1°. Для $j \in \mathbb{Z}$ будемо писати $j \in V$, якщо існує точка $x \in I_j$ така, що

$$|f'(x)| \le 2c_{17}\varphi(h). \tag{37}$$

Позначимо $c_{23} := 96k[c_7/c_8 + 1]$ і $c := c_{23} + 20s + 15$. Без втрати загальності будемо вважати, що n ділиться на c, тобто $n = pc$, де $p \in \mathbb{N}$. Покладемо $\nu_p = n + 8$ і $\nu_{-p} = 8 - n$. Нехай для кожного $q = p-1, \ldots, 0, \ldots, 1-p$ ν_q позначає найменше ціле серед цілих $j \ge cq$, для яких $[x_{j+3}, x_{j-3}] \cap O = \varnothing$. Позначимо

$$E_q := [x_{\nu_q}, x_{\nu_{q-1}}] \quad \left(= I_{\nu_q} \cup I_{\nu_q - 1} \cup \ldots \cup I_{\nu_{q-1}+1}\right), \qquad q = \overline{1-p, p}.$$

Отже, $cq + 15 \ge \nu_q \ge cq$ і кожен відрізок E_q складається принаймні з $c_{23} + 20s$ і не більше ніж з $c_{23} + 20s + 30$ різних відрізків I_j.

Далі будемо вважати, що $q \in \mathbb{Z}$ (f є періодичною). Будемо писати $q \in W$, якщо E_q містить принаймні $2k - 1$ проміжків I_j таких, що $j \in V$. Зауважимо, що якщо $q \in W$, то з нерівностей (37) і (30) випливає нерівність

$$|f'(x)| \le c_{24}\varphi(h), \qquad x \in E_q. \tag{38}$$

В означенні 1 функцію $f'(x)$ запишемо у вигляді суми „маленької" $g_1(x)$ і „великої" $g_2(x)$ функцій так, щоб на множині

$$E := \bigcup_{q \notin W} E_q$$

$g_2(x) \equiv f'(x)$, а на $\mathbb{R} \setminus E$ (за винятком околів кінців E) $g_2(x) \equiv 0$. На кінцях E множенням на функцію S_j забезпечимо неперервність.

Для кожного $j \in \mathbb{Z}$ позначимо

$$S_j(x) := \int_{x_j}^{x} (u - x_j)^k (x_{j-1} - u)^k du \left(\int_{x_j}^{x_{j-1}} (u - x_j)^k (x_{j-1} - u)^k du \right)^{-1}.$$

Для довільної непорожньої множини $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}$ через $\boldsymbol{E}^*$ позначимо об'єднання всіх I_j, $j \in \mathbb{Z}$, таких, що $I_j \cap \boldsymbol{E} \ne \varnothing$. Аналогічно $\boldsymbol{E}^{**} := (\boldsymbol{E}^*)^*$ і т. д. $(\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{E}^* \subset \boldsymbol{E}^{**} \subset \ldots)$.

Означення 1. *Для* $x \in I_j$ *покладемо*

$$g_1(x) := \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad I_j \subset E^*, \\ f'(x), & \textit{якщо} \quad I_j \subset \overline{\mathbb{R} \setminus E^{**}}, \\ f'(x) S_j(x), & \textit{якщо} \quad I_j \subset \overline{E^{**} \setminus E^*} \ \textit{і} \ x_j \in E^*, \\ f'(x)(1 - S_j(x)), & \textit{якщо} \quad I_j \subset \overline{E^{**} \setminus E^*} \ \textit{і} \ x_j \notin E^*, \end{cases}$$

і $g_2(x) := f'(x) - g_1(x)$.

Лема 6. *Мають місце нерівності*

$$\|g_1\| \le c_{24}\varphi(h), \qquad \omega_k(g_1, t) \le c_{25}\varphi(t), \qquad \omega_k(g_2, t) \le (c_{25} + 1)\varphi(t).$$

Лема 6 — це фактично лема 17.4 з [9]. Зауважимо, що її перша нерівність випливає з (38); друга — з першої, оцінки $\omega_k(f', t) \le \varphi(t)$ і нерівності $\left|S_j^{(\nu)}(x)\right| \le c_{26}/h^\nu$, $x \in I_j$, $\nu \in \mathbb{N}$; третя — з другої.

Позначимо $c_{27} := [c_{25} + 2]$. Без втрати загальності будемо вважати, що $p \geq$ $\geq 4c_{27}$. Подамо множину $E \neq \mathbb{R}$ у вигляді об'єднання відрізків $F_m := [a_m, b_m]$, $m \in \mathbb{Z}$, що не перетинаються. Будемо писати $m \in X$, якщо F_m складається не більше ніж з c_{27} різних відрізків E_q (або, що те саме, не більше ніж з $c_{27}c + 15$ різних відрізків I_j). Якщо $m \notin X$, то F_m містить принаймні $c_{27}c + c_{23}$ різних I_j.

Означення 2. *Покладемо*

$$g_3(x) := \begin{cases} g_2(x), & x \in \overline{\left(\bigcup_{m \in X} F_m\right)^{**}}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{m \in X} F_m\right)^{**}, \end{cases}$$

і $g_4(x) := g_2(x) - g_3(x)$.

Лема 7. *Мають місце нерівності*

$$\| g_3 \| \leq c_{28}\,\varphi(h), \qquad \omega_k(g_3, t) \leq c_{29}\,\varphi(t), \qquad \omega_k(g_4, t) \leq (c_{25} + 1 + c_{29})\varphi(t).$$

Лема 7 доводиться аналогічно лемі 6 з урахуванням самої леми 6.

Позначимо

$$f_1(x) := f(0) + \int_0^x (g_1(u) + g_3(u) - A)\,du, \qquad f_2(x) := \int_0^x (g_4(u) + A)\,du,$$

так що $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ і дійсне число A, $|A| \leq \varphi(h) \max\{c_{24}, c_{28}\}/2$, вибрано з умови $f_1(0) = f_1(2\pi)$ (або, що те саме, $f_2(0) = f_2(2\pi)$). Якщо $f_2(x) \equiv$ $\equiv Ax$, то $f_1(x) \equiv f(x)$ $(A = 0)$ і теорема 1 є наслідком лем 6, 7 і 3.

2°. Задача звелася до наближення функції $f_2(x)$. Нехай для визначеності $A \geq 0$. Позначимо

$$F := \bigcup_{m \notin X} F_m.$$

Нагадаємо, що за побудовою

$$f_2'(x) = \begin{cases} f'(x) + A, & x \in F^*, \\ A, & x \notin F^{**}, \end{cases}$$

і на „більшій" частині множини F маємо $|f_2'(x) - A| > 2c_{17}\,\varphi(h)$. Тому згідно з (34) $\left|\hat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x) - A\right| > c_{17}\,\varphi(h_n)$ при $n_1 > n$. Однак можуть існувати і „погані" точки x (зокрема, на F), в яких $(\hat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x) - A)\Pi(x) < 0$. В усіх „поганих" точках $x \in F \setminus O$, $x \in (\overline{\mathbb{R} \setminus F}) \setminus O$ і $x \in O$ ми „виправимо" поліном $\hat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x)$ за допомогою поліномів $Q'(x)$ (лема 8), $M'(x)$ (лема 9) і $U_n'(x)$ (лема 4) відповідно.

Нехай

$$\delta_j := \operatorname{sign}\Pi(x_j), \qquad t_j(x) = t_{j,n}(x, b_1, Y), \qquad \breve{t}_j(x) = \breve{t}_{j,n}(x, b_1, Y).$$

Для кожного $E_q \subset F$, $q = \overline{1 - p, p}$, такого, що $E_q \cap O \neq \varnothing$, через ν_q^+ і ν_q^- позначимо найбільше $j \in H$, для якого $I_j \subset E_q$ і $\delta_j > 0$ або $\delta_j < 0$ відповідно.

Означення 3. *Для кожного* $q = \overline{1-p, p}$ *покладемо* $Q_q(x) :\equiv 0$, *якщо* $E_q \not\subset F$ *або* $E_q \subset F$ *і* E_q *не містить відрізків* I_j *з* $j \in V \cap H$. *Для решти* E_q, *тобто для* $E_q \subset F$ *і* E_q, *що містить* I_j *з* $j \in V \cap H$, *покладемо*

$$Q_q(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{2c_{17}}{c_8} \displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1, j\in V}^{\nu_q} t_j(x)\delta_j - \alpha_q \dfrac{c_{17}}{2c_7} \displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1, j\notin V}^{\nu_q} \breve{t}_j(x)\delta_j, & E_q \cap O = \varnothing, \quad (39) \\ \dfrac{2c_{17}}{c_8}\left(\displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1, j\in V\cap H}^{\nu_q} t_j(x)\delta_j + \alpha_q^+ t_{\nu_q^+}(x) - \alpha_q^- t_{\nu_q^-}(x)\right), & E_q \cap O \neq \varnothing, \quad (40) \end{cases}$$

де числа $\alpha_q > 0$, $\alpha_q^+ \geq 0$ *і* $\alpha_q^- \geq 0$ *вибрано так, що* $Q_q(-\pi) = Q_q(\pi)$ *і* $\alpha_q^+\alpha_q^- = 0$.

Позначимо

$$\mathcal{F}_1 \;:=\; \bigcup_{j: I_j \subset F,\, j \in V \cap H} I_j, \qquad \mathcal{F}_2 \;:=\; \bigcup_{j: I_j \subset F,\, j \notin V,\, j \in H} I_j,$$

так що $F \setminus (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \subset O$.

Лема 8. *Функція*

$$Q(x) \;:=\; h\varphi(h) \sum_{q=1-p}^{p} Q_q(x)$$

задовольняє співвідношення

$$Q \;\in\; \mathbb{T}_{c_5 n}, \tag{41}$$

$$\|Q\| \;\leq\; c_{30} h \varphi(h), \tag{42}$$

$$|Q'(x)| \;\geq\; 2c_{17}\varphi(h), \qquad x \in \mathcal{F}_1, \tag{43}$$

$$Q'(x)\operatorname{sign}\Pi(x) \;\geq\; -\frac{c_{17}}{2}\varphi(h), \qquad x \in \mathcal{F}_2, \tag{44}$$

$$Q'(x)\Pi(x) \;\geq\; 0, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{F}_2. \tag{45}$$

Доведення. Нерівності (13), (14), означення δ_j і вибір $\nu_q^{\pm}$ гарантують строгу додатність α_q і, відповідно, строгу додатність α_q^+ при $\alpha_q^- = 0$ або $\alpha_q^- > 0$ при $\alpha_q^+ = 0$. Тому $Q_q(-\pi) = Q_q(\pi)$. Разом з (22) це породжує (41). Щоб довести (42), покажемо, що $\alpha_q < 1$ і $\alpha_q^{\pm} < 2k$. Дійсно, якщо $E_q \subset F$, то, зокрема, $q \notin W$, тобто перші суми в (39) і (40) містять не більше ніж $2k-2$ доданки кожна, а друга сума в (39) — принаймні $c_{23}/2$ доданків. Тому, враховуючи додатність α_q, (22) і умову $Q_q(-\pi) = Q_q(\pi)$, записуємо

$$\alpha_q \;\leq\; \left(2(k-1)\frac{2c_{17}}{c_8}\right)\left(\frac{c_{23}}{2}\frac{c_{17}}{2c_7}\right)^{-1} \;<\; \frac{16kc_7}{c_8 c_{23}} \;<\; 1.$$

Аналогічно $\alpha_q^{\pm} \;\leq\; 2(k-1)/1 \;<\; 2k$. Покладемо $S_q(x) := 0$, якщо $Q_q(x) = 0$, інакше

$$S_q(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{2c_{17}}{c_8} \displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j\in V}^{\nu_q} \chi_j(x)\delta_j - \alpha_q \dfrac{c_{17}}{2c_7} \displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j\notin V}^{\nu_q} \chi_j(x)\delta_j, & E_q \cap O = \varnothing, \\ \dfrac{2c_{17}}{c_8}\left(\displaystyle\sum_{j=\nu_{q-1}+1,\, j\in V\cap H}^{\nu_q} \chi_j(x)\delta_j + \alpha_q^+ \chi_{\nu_q^+}(x) - \alpha_q^- \chi_{\nu_q^-}(x)\right), & E_q \cap O \neq \varnothing. \end{cases}$$

Використовуючи (16) і (17), записуємо нерівність для $x \in [-\pi - 8h, \pi - 8h] = [x_{\nu_p}, x_{\nu_{-p}}] =: I$:

$$\left|Q_q(x) - S_q(x)\right| \;\le\; \left(\frac{2c_{17}}{c_8} + \frac{c_{17}}{2c_7} + 4k\frac{2c_{17}}{c_8}\right) c_6 \sum_{j=\nu_{q-1}+1}^{\nu_q} (\Gamma_j(x))^{2b_1 - s - 1} \;=:\; c_{31} B_q(x).$$

Тепер якщо $x \in \mathbb{R} \setminus E_q$, то $\chi_j(x) = \chi_{\nu_q}(x)$ для всіх $j = \overline{\nu_{q-1}+1, \nu_q}$, і тому внаслідок періодичності $Q_q(x)$ справджується рівність

$$S_q(x) \;=\; 0, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus E_q,$$

з якої випливає оцінка

$$\left|S_q(x)\right| \;\le\; c_{32} B_q(x), \qquad x \in I.$$

Отже, з урахуванням (10) запишемо нерівність

$$\left|Q(x)\right| \;\le\; h\varphi(h) \sum_{q=-p}^{p} \left|Q_q(x) - S_q(x) + S_q(x)\right| \;\le$$

$$\le\; (c_{31} + c_{32}) h\varphi(h) \sum_{q=-p}^{p} B_q(x) \;\le\; c_{30} h\varphi(h), \qquad x \in I,$$

з якої внаслідок періодичності $Q(x)$ випливає (42). Доведемо (43) – (45). Зобразимо $Q(x)$ у вигляді

$$Q_q(x) \;=\; \frac{2c_{17}}{c_8} \sum_{j:\, I_j \subset \mathcal{F}_1 \cap I} t_j(x)\delta_j + \frac{c_{17}}{2c_7} \sum_{j:\, I_j \subset \mathcal{F}_2 \cap I} \beta_j \breve{t}_j(x)\delta_j + \frac{2c_{17}}{c_8} \sum_{j:\, H_0 \cup \{n+6\}} \gamma_j t_j(x)\delta_j,$$

де $-1 < \beta_j \le 0$ і $0 \le \gamma_j < 2k$ для всіх j. Для кожного $j \in H_0 \cup \{n+6, n+7, n+8\}$ з нерівностей (13), (14), (20) і (19) отримуємо оцінки

$$t_j'(x)\Pi(x)\delta_j \;\ge\; 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\beta_j \breve{t}_j'(x)\Pi(x)\delta_j \;\ge\; 0, \qquad x \in I \setminus I_j,$$

$$\frac{2c_{17}}{c_8} t_j'(x) \operatorname{sign}\Pi(x)\delta_j \;\ge\; \frac{2c_{17}}{h}, \qquad x \in I_j,$$

$$\frac{c_{17}}{2c_7}\left|\breve{t}_j'(x)\right| \;\le\; \frac{c_{17}}{2h}, \qquad x \in I_j.$$

Тепер з урахуванням (41) з перших двох оцінок випливає (45), з перших трьох — (43) і з перших двох і четвертої — (44).

Лему 8 доведено.

Нагадаємо, що $F = \bigcup_{m \notin X} F_m$, де $F_m = [a_m, b_m]$ не перетинаються і кожен F_m містить принаймні $c_{27}c + c_{23} =: c_{33}$ різних I_j ($c_{27}+1$ різних E_q). Будемо писати $m \in X_0$, якщо $m \notin X$ і $F_m \cap [a_0, a_0 + 2\pi] = F_m$. Для кожного $m \in X_0$ позначимо

$$[x_{j_{a,m}}, x_{j_{b,m}}] := [a_m, b_m] = F_m,$$

$$F_{a,m} := [x_{j_{a,m}}, x_{j_{a,m}-c_{32}}], \qquad F_{b,m} := [x_{j_{b,m}+c_{32}}, x_{j_{b,m}}].$$

Для кожного $m \in X_0$ такого, що $F_{a,m} \cap O \neq \varnothing$ ($F_{b,m} \cap O \neq \varnothing$), через $\nu^+_{a,m}$ і $\nu^-_{a,m}$ ($\nu^+_{b,m}$ *і* $\nu^-_{b,m}$) позначимо два найбільші цілі $j \in H$, для яких $I_j \subset F_{a,m}$ ($I_j \subset F_{b,m}$) і $\delta_j > 0$ або $\delta_j < 0$ відповідно.

Означення 4. *Для кожного* $m \in X_0$ *покладемо*

$$M_{a,m}(x) :=$$

$$:= \begin{cases} \dfrac{2c_{17}(c_{25}+1)}{c_8} \displaystyle\sum_{j=j_{a,m}+1}^{j_{a,m}+3} t_j(x)\delta_j - \mu_{a,m}\frac{c_{17}}{2c_7} \sum_{j=j_{a,m}-c_{33}+1,\, j\notin V}^{j_{a,m}} \breve{t}_j(x)\delta_j, & F_{a,m} \cap O = \varnothing, \\ \dfrac{2c_{17}(c_{25}+1)}{c_8} \left(\displaystyle\sum_{j=j_{a,m}+1}^{j_{a,m}+3} t_j(x)\delta_j + \mu^+_{a,m} 3t_{\nu^+_{a,m}}(x) - \mu^-_{a,m} 3t_{\nu^-_{a,m}}(x) \right), & F_{a,m} \cap O \neq \varnothing, \end{cases}$$

$$M_{b,m}(x) :=$$

$$:= \begin{cases} \dfrac{2c_{17}(c_{25}+1)}{c_8} \displaystyle\sum_{j=j_{b,m}-2}^{j_{b,m}} t_j(x)\delta_j - \mu_{b,m}\frac{c_{17}}{2c_7} \sum_{j=j_{b,m}+1,\, j\notin V}^{j_{b,m}+c_{33}} \breve{t}_j(x)\delta_j, & F_{b,m} \cap O = \varnothing, \\ \dfrac{2c_{17}(c_{25}+1)}{c_8} \left(\displaystyle\sum_{j=j_{b,m}-2}^{j_{b,m}} t_j(x)\delta_j + \mu^+_{b,m} 3t_{\nu^+_{b,m}}(x) - \mu^-_{b,m} 3t_{\nu^-_{b,m}}(x) \right), & F_{b,m} \cap O \neq \varnothing, \end{cases}$$

де числа $\mu_{a,m} > 0$, $\mu^\pm_{a,m} \geq 0$, $\mu_{b,m} > 0$ *і* $\mu^\pm_{b,m} \geq 0$ *вибрано так, що* $M_{a,m}(-\pi) = M_{a,m}(\pi)$, $\mu^+_{a,m}\mu^-_{a,m} = 0$, $M_{b,m}(-\pi) = M_{b,m}(\pi)$ *і* $\mu^+_{b,m}\mu^-_{b,m} = 0$.

Позначимо

$$\mathcal{F}_3 := \overline{F^{***} \setminus F}.$$

Лема 9. *Функція*

$$M(x) := h\varphi(h) \sum_{m \in X_0} \left(M_{a,m}(x) + M_{b,m}(x) \right)$$

задовольняє співвідношення

$$M \in \mathbb{T}_{c_5 n}, \tag{46}$$

$$\|M\| \leq c_{34} h\varphi(h), \tag{47}$$

$$|M'(x)| \geq 2c_{17}(c_{25}+1)\varphi(h)\left(\breve{\Gamma}_n(\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}_3))\right)^{4(s+2)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus (F \cup O), \tag{48}$$

$$M'(x) \operatorname{sign}\Pi(x) \geq -\frac{c_{17}}{4}\varphi(h), \qquad x \in \mathcal{F}_2, \tag{49}$$

$$M'(x)\Pi(x) \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{F}_2. \tag{50}$$

Доведення леми 9 є аналогічним доведенню леми 8. Доведемо лише нерівність $\mu_{a,m} < 1/4$. За побудовою кожен відрізок $E_q \subset F$ містить не більше ніж $2k-2$ різних I_j з $j \in V$, тому сума при $\mu_{a,m}$ містить принаймні

$$c_{33} - (c_{27}+1)(2k-2) > \frac{c_{33}}{2} + (c_{27}+1)2 > \frac{c_{33}}{2}$$

доданків. Тому

$$\mu_{a,m} \le \left(3\frac{2c_{17}(c_{25}+1)}{c_8}\right)\left(\frac{c_{33}}{2}\frac{c_{17}}{2c_7}\right)^{-1} < \frac{24c_7}{c_8 c} < \frac{1}{4}.$$

Лему 9 доведено.

3°. Позначимо

$$c_{35} := 4\pi(c_{25}+1+c_{29}), \qquad n_1 := c_{35}n, \qquad h_1 := \frac{\pi}{n_1}, \tag{51}$$

$$c_{36} := \frac{\max\{c_{17}, c_{18}\}(c_{25}+1+c_{29})c_{35}}{c_{13}},$$

$$R_{n_1}(x) := \tau_n(f_1+Ax, x) - Ax + \hat{\sigma}_{n_1}(f_2, x) + Q(x) + M(x) + \left(c_{36}+\frac{c_{15}}{c_{13}}\right)U_n(x) \in \mathbb{T}_{c_5 n_1}.$$

Покажемо, що R_{n_1} — шуканий в теоремі 1 поліном. Врахуємо леми 6 і 7 і зберемо (23), (32), (42), (47) і (27) в оцінку

$$\|f - R_{n_1}\| = \|f_1 + f_2 - R_{n_1}\| \le \|f_1 - \tau_n(f_1+Ax,\cdot) + A\cdot\| + \|f_2 - \hat{\sigma}_{n_1}(f_2,\cdot)\| +$$

$$+ \|Q\| + \|M\| + \left(c_{36}+\frac{c_{15}}{c_{13}}\right)\|U_n\| \le$$

$$\le c_{11}h\max\{c_{24}, c_{28}\}(c_{25}+c_{29})\varphi(h) + c_{16}h_1(c_{25}+1+c_{29})\varphi(h_1) +$$

$$+ \left(c_{30}+c_{34}+\left(c_{36}+\frac{c_{15}}{c_{13}}\right)c_{12}\right)h\varphi(h) \le c_{37}h\varphi(h). \tag{52}$$

Перевіримо нерівність

$$R'_{n_1}(x)\Pi(x) \ge 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{53}$$

використавши рівність

$$R'_{n_1}(x)\,\mathrm{sign}\,\Pi(x) = \tau'_n(f_1+Ax, x)\,\mathrm{sign}\,\Pi(x) + (f'_2(x) - A)\,\mathrm{sign}\,\Pi(x) +$$

$$+ (\hat{\sigma}'_{n_1}(f_2, x) - f'_2(x))\,\mathrm{sign}\,\Pi(x) +$$

$$+ (Q'(x)+M'(x))\mathrm{sign}\,\Pi(x) + c_{36}U'_n(x)\,\mathrm{sign}\,\Pi(x) + \frac{c_{15}}{c_{13}}U'_n(x)\,\mathrm{sign}\,\Pi(x) =: \prod_{\nu=1}^{6}\Psi_\nu(x).$$

З (24), побудови f_2 і (26) видно, що

$$\Psi_1(x) \ge 0, \quad \Psi_2(x) \ge 0, \quad \Psi_5(x) \ge 0, \quad \Psi_6(x) \ge 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Нехай $\mathcal{F}_4 := \overline{\mathbb{R}\backslash(F \cup \mathcal{F}_3 \cup O)}$, так що $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4 \cup O = \mathbb{R}$. Розглянемо п'ять випадків.

1) $x \in \mathcal{F}_1$. Для $u \in \mathcal{F}_1^*$ функція $f'_2(u) = f'(u) + A$. Беручи до уваги нерівність (33) з $\delta = h$, (45), (43), (50), лему 7 і (51), записуємо

$$\Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geq -c_{17}\omega_k(f' + A, h_1) - c_{17}\omega_k(f_2', h_1)\left(\frac{1}{n_1 h}\right)^{4(s+2)+1} + 2c_{17}\varphi(h) + 0 \geq$$

$$\geq \varphi(h)c_{17}\left(1 - \pi(c_{25} + 1 + c_{29})\frac{n}{n_1}\right) \geq 0.$$

2) $x \in \mathcal{F}_2$. Для $u \in \mathcal{F}_2^*$ функція $f_2'(u) = f'(u) + A$. Більш того, $|f_2'(x) - A| \geq$ $\geq 2c_{17}\varphi(h)$, $x \in \mathcal{F}_2$. Тепер із нерівності (33) з $\delta = h$, (44), (49), леми 7 і (51) отримуємо нерівність

$$\Psi_2(x) + \Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geq 2c_{17}\varphi(h) - c_{17}\omega_k(f' + A, h_1) - c_{17}\omega_k(f_2', h_1)\left(\frac{1}{n_1 h}\right)^{4(s+2)+1} -$$

$$- \frac{c_{17}}{2}\varphi(h) - \frac{c_{17}}{4}\varphi(h) \geq \varphi(h)c_{17}\left(\frac{1}{4} - \pi(c_{25} + 1 + c_{29})\frac{n}{n_1}\right) \geq 0.$$

3) $x \in \mathcal{F}_3$. Для $u \in \mathcal{F}_3^*$ з функції $f_2'(u) = g_2(u) + A$, нерівностей (33) з $\delta =$ $= h$, (45), (50), (48), лем 6, 7 і (51) одержуємо нерівність

$$\Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geq$$

$$\geq -c_{17}\omega_k(g_2 + A, h_1) - c_{17}(c_{25} + 1 + c_{29})\varphi(h_1)\left(\frac{1}{n_1 h}\right)^{4(s+2)+1} + 0 + 2c_{17}(c_{25} + 1)\varphi(h) \geq$$

$$\geq \varphi(h)c_{17}\left(c_{25} + 1 - \pi(c_{25} + 1 + c_{29})\frac{n}{n_1}\right) \geq 0.$$

4) $x \in \mathcal{F}_4$. Для $u \in \mathcal{F}_4^*$ функція $f_2'(u) = A$. Тому $\omega_k(f_2', t, \mathcal{F}_4) \equiv 0$. Використовуючи (33) з $\delta = \operatorname{dist}(x, F^{**})$, лему 7, (45), (50), (48), (51) і нерівність

$$\frac{1}{n_1 \operatorname{dist}(x, F^{**})} < \breve{\Gamma}_n(\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}_3)),$$

записуємо

$$\Psi_3(x) + \Psi_4(x) \geq -c_{17}\cdot 0 - c_{17}(c_{25} + 1 + c_{29})\varphi(h_1)\left(\frac{1}{n_1 \operatorname{dist}(x, F^{**})}\right)^{4(s+2)+1} +$$

$$+ 0 + 2c_{17}(c_{25} + 1)\varphi(h)\left(\breve{\Gamma}_n(\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}_3))\right)^{4(s+2)} \geq$$

$$\geq \varphi(h)c_{17}\left(\breve{\Gamma}_n(\operatorname{dist}(x, \mathcal{F}_3))\right)^{4(s+2)}\left(2(c_{25} + 1) - \pi(c_{25} + 1 + c_{29})\frac{n}{n_1}\right) \geq 0.$$

5) $x \in O$. Згідно з (45) і (50) маємо $\Psi_4(x) \geq 0$. Для $x \in O_i$ такої, що $O_i \cap F = \varnothing$, функція $f_2'(x) = A$, тому з (26), (29), (51), леми 7 і відповідно (35) і (34) маємо

$$\Psi_5(x) + \Psi_3(x) \geq \frac{c_{36}c_{13}}{h}\varphi(h)|x - y_i| - \frac{c_{18}}{h_1}(c_{25} + 1 + c_{29})\varphi(h_1)|x - y_i| \geq 0, \quad x \in J_{i,n_1}, \tag{54}$$

$$\Psi_5(x) + \Psi_3(x) \geq \frac{c_{36}c_{13}}{h}\varphi(h)|x - y_i| - c_{17}(c_{25} + 1 + c_{29})\varphi(h_1) \geq 0, \quad x \in O_i \setminus J_{i,n_1}. \tag{55}$$

Для решти $O_i \subset O$, тобто для $x \in O_i : O_i \bigcap F \neq \varnothing$, функція $f_2'(x) = f'(x) + A$. В цьому випадку нерівність (55) виконується, а нерівність

$$\Psi_5(x)+\Psi_3(x)+\Psi_2(x) = \Psi_5(x)+\Big(\hat{\sigma}'_{n_1}(f_2,x)-L_{k-1}(f_2', x, J_{i,n_1})+L_{k-1}(f_2', y_i, J_{i,n_1}) +$$

$$+ L_{k-1}(f_2', x, J_{i,n_1})-L_{k-1}(f_2', y_i, J_{i,n_1})-f_2'(x)\Big)\operatorname{sign}\Pi(x)+\Psi_2(x) =$$

$$= \Psi_5(x)+\Big(-A+\hat{\sigma}'_{n_1}(f_2,x)-L_{k-1}(f_2', x, J_{i,n_1})+L_{k-1}(f_2', y_i, J_{i,n_1})\Big)\operatorname{sign}\Pi(x) +$$

$$+ \Big(L_{k-1}(f', x, J_{i,n_1})-L_{k-1}(f', y_i, J_{i,n_1})\Big)\operatorname{sign}\Pi(x) =: \Psi_5(x)+\Psi_{3,1}(x)+\Psi_{3,2}(x,k) \geq 0,$$

$$x \in J_{i,n_1},$$

справджується аналогічно (54), якщо

$$\Psi_{3,2}(x,k) \geq 0, \qquad x \in J_{i,n_1}. \tag{56}$$

Таким чином, доведення нерівності (53) звелося до доведення нерівності (56). Для $f \in C^{(2)} \bigcap \Delta^{(1)}(Y)$ виберемо $\omega \in \Phi^k$ таку, що $\omega_k(f'', t) \leq \omega(t) \leq$ $\leq 2^k \omega_k(f'', t)$. Нехай тепер $\varphi(t) := t\omega(t)$ (тобто $\varphi \in \Phi^{k+1}$). Запишемо

$$\Psi_{3,2}(x,k+1) = \left(\int\limits_{y_i}^{x} L_k'(f', u, J_{i,n_1}) - f''(u)\,du + f'(x)\right)\operatorname{sign}\Pi(x).$$

Тоді з (26), (29), (31) $(p = 1)$ (і $f'(x)\Pi(x) \geq 0$) одержуємо нерівність

$$\Psi_6(x)+\Psi_{3,2}(x,k+1) \geq c_{15}\omega(h)|x-y_i| - c_{15}\omega(h_1)|x-y_i| + 0 \geq 0, \qquad x \in J_{i,n_1},$$

і (53) справджується. При цьому оцінка (5) є наслідком (52).

Теорему 1 доведено.

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. *Pleshakov M. G.* Comonotone Jackson's inequality // J. Approxim. Theory. – 1999. – **99**. – P. 409 – 421.
3. *Дзюбенко Г. А., Плешаков М. Г.* Комонотонное приближение периодических функций // Мат. заметки. – 2008. – **83**, вып. 2. – С. 199 – 209.
4. *Whitney H.* On functions with bounded n-th diferences // J. math. pures et appl. – 1957. – **6(9)**. – P. 67 – 95.
5. *Плешаков М. Г.* Комонотонное приближение периодических функций классов Соболева: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Саратов, 1997.
6. *Дзюбенко Г. А.* Контрприклад в комонотонному наближенні періодичних функцій // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2008. – **5**, № 1. – С. 113 – 123.
7. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**, № 3. – С. 219 – 242.
8. *Dzyubenko G. A., Gilewicz J., Shevcuk I. A.* Piecewise monotone pointwise approximation // Constr. Approxim. – 1998. – **14**. – P. 311 – 348.
9. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.

Одержано 10.06.08