УДК 511.72

С. О. Дмитренко, Д. В. Кюрчев (Нац. пед. ун-т, Київ),
М. В. Працьовитий (Нац. пед. ун-т, Ін-т математики НАН України, Київ)

ЛАНЦЮГОВЕ A_2-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ТА ЙОГО ГЕОМЕТРІЯ

We study the geometry of the representation of real numbers in terms of continued fractions whose elements take values from the set $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ (A_2-continued fraction representation). For the case $\alpha_1\alpha_2 \leq 1/2$, we prove that any point of some closed interval has a A_2-continued fraction representation, and that, in the case $\alpha_1\alpha_2 = 1/2$, the representation is unique, except for a countable set of points. In the latter case, we establish the basic metric relation, describe metric properties of sets of numbers whose A_2-continued fraction representation does not contain a given combination of two elements, and investigate properties of the random variable whose A_2-continued fraction representation elements form a homogeneous Markov chain.

Изучается геометрия представления чисел цепными дробями, элементы которых принадлежат множеству $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ (цепное A_2-представление). Доказано, что при $\alpha_1\alpha_2 \leq 1/2$ каждая точка определенного отрезка имеет цепное A_2-представление, причем при $\alpha_1\alpha_2 = 1/2$ представление единственное, за исключением счетного множества точек. Для последнего случая найдено основное метрическое соотношение, описаны метрические свойства множества чисел, цепное A_2-представление которых не содержит заданной комбинации двух элементов, а также изучены свойства случайной величины, элементы цепного A_2-представления которой образуют однородную цепь Маркова.

1. Вступ. Існує багато різних способів зображення дійсних чисел і відповідних їм метричних та ймовірнісних теорій. Із кожним із них пов'язана своя система циліндричних множин (циліндрів), що утворюють систему подрібнюючих розбиттів відрізка і породжують свою власну геометрію, на якій ґрунтується метрична теорія. Одні зображення використовують скінченний алфавіт (набір цифр), інші — нескінченний. До перших відносяться зображення чисел s-адичними дробами, Q-зображення [1] та ін. Серед зображень із нескінченним алфавітом найбільш відомими є зображення дійсних чисел рядами Остроградського (1- та 2-го видів) [2], рядами Люрота [3] тощо. До останніх належить і спосіб зображення дійсних чисел елементарними ланцюговими дробами, елементами яких є натуральні числа. Основи метричної теорії цього зображення було закладено ще на початку 20-го століття в роботах О. Хінчина [4], П. Леві [5] та ін. У наукових дослідженнях сьогодні фігурують також ланцюгові розклади, відмінні від елементарних, серед яких такі, що використовують скінченний алфавіт. Це ланцюгові розклади Данжуа [6], Лехнера [7], Фарея [8] та ін.

Дану роботу присвячено новому способу зображення дійсних чисел ланцюговим дробом із двоелементним алфавітом $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. Розглядається множина L_{A_2} всіх нескінченних ланцюгових дробів вигляду

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n} + \ldots}},$$

елементи a_n яких належать A_2 (такі ланцюгові дроби називатимемо *ланцюговими A_2-дробами*). Якщо α_1 і α_2 є натуральними, то відомо [1, с. 248], що L_{A_2} є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Дещо несподіваним виявився факт, що достатньо виконання умови $\alpha_1\alpha_2 = 1/2$ для того, щоб множина L_{A_2} була відрізком, будь-яку точку якого (окрім зчисленної множини) можна зобразити ланцюговим A_2-дробом єдиним способом.

Таке зображення чисел за суттю є ланцюговим, за формою має властивості двійкового кодування дійсних чисел, оскільки алфавіт містить два символи. Але геометрія ланцюгового A_2-зображення має принципові відмінності як від двійкового зображення, так і від зображення чисел елементарними ланцюговими дробами, що відображено у властивостях циліндричних множин. У цій роботі ми будуємо основи метричної теорії цього зображення і досліджуємо властивості випадкового ланцюгового A_2-дробу, елементи якого утворюють однорідний ланцюг Маркова.

2. Ланцюгові A_2-дроби. Нескінченний ланцюговий дріб

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} \tag{1}$$

будемо зображати (формально записувати) у вигляді $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, а скінченний

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_n}}} \tag{2}$$

— у вигляді $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Якщо $a_0 = 0$, то ланцюговий дріб (1) зображатимемо у вигляді $[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, а ланцюговий дріб (2) — у вигляді $[a_1, a_2, \dots, a_n]$. Ми також використовуватимемо запис ланцюгового дробу $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ у вигляді $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, r_n]$, де $r_n = [a_n; a_{n+1}, \dots, a_{n+k}, \dots]$ — n-й залишок початкового ланцюгового дробу. Періодичний ланцюговий дріб

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots, c_k, c_1, c_2, \dots, c_k, \dots]$$

будемо записувати як $[a_1, a_2, \dots, a_n, (c_1, c_2, \dots, c_k)]$, де $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ — період даного ланцюгового дробу.

Нехай $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, — задана множина дійсних чисел. Нескінченний ланцюговий дріб вигляду $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$, де $a_0 = 0$, $a_n \in A_2$, $n = 1, 2, \dots$, називатимемо *ланцюговим A_2-дробом*. Кожен ланцюговий A_2-дріб є збіжним, оскільки виконується критерій збіжності [4, с. 17]: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Позначимо

$$\beta_1 = [(\alpha_2, \alpha_1)] = \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2} - \alpha_1\alpha_2}{2\alpha_2}, \tag{3}$$

$$\beta_2 = [(\alpha_1, \alpha_2)] = \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2} - \alpha_1\alpha_2}{2\alpha_1}. \tag{4}$$

З означень β_1 і β_2 маємо

$$\beta_2 = \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1} \quad \text{і} \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_1. \tag{5}$$

З (5) випливає

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lambda > 0, \qquad \beta_2 - \beta_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Позначимо через L_{A_2} множину всіх ланцюгових A_2-дробів, тобто

$$L_{A_2} = \{x : x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots];\ a_n \in A_2,\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

Тоді очевидно, що

$$\min L_{A_2} = \inf L_{A_2} = \beta_1, \qquad \max L_{A_2} = \sup L_{A_2} = \beta_2,$$

$$L_{A_2} \subseteq [\beta_1, \beta_2] = [\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2].$$

Нас цікавять тополого-метричні властивості множини L_{A_2}.

Можливі три випадки:

1) $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_2 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2$;
2) $\alpha_2 - \alpha_1 > \beta_2 - \beta_1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_2 + \beta_1 > \alpha_1 + \beta_2$;
3) $\alpha_2 - \alpha_1 < \beta_2 - \beta_1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_2 + \beta_1 < \alpha_1 + \beta_2$.

З урахуванням виразів (3) і (4) рівність $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1$ рівносильна рівності

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2} - \alpha_1\alpha_2}{2\alpha_1} - \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2} - \alpha_1\alpha_2}{2\alpha_2},$$

$$\sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2} = 3\alpha_1\alpha_2,$$

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

У цьому випадку $\beta_1 = \dfrac{1}{2\alpha_2} = \alpha_1$, $\beta_2 = \dfrac{1}{2\alpha_1} = \alpha_2$.

Зауважимо, що окремої уваги заслуговує підвипадок $\alpha_1 = \beta_1 = 1/2$, $\alpha_2 = \beta_2 = 1$. Умова $\alpha_2 - \alpha_1 < \beta_2 - \beta_1$ рівносильна умові $0 < \alpha_1\alpha_2 < 1/2$, а умова $\alpha_2 - \alpha_1 > \beta_2 - \beta_1$ — нерівності $\alpha_1\alpha_2 > 1/2$.

3. Підхідні дроби. Нагадаємо [4], що *підхідним дробом* порядку n даного ланцюгового дробу

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

називається число $\dfrac{p_n}{q_n}$, що є значенням скінченного ланцюгового дробу $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, тобто n-го відрізка даного ланцюгового дробу. При цьому число p_n називається *чисельником підхідного дробу,* а q_n — *знаменником.* Відомий [4] закон утворення підхідних дробів формулюється так: для довільного натурального $n \geq 2$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

при цьому вважається, що $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_1 a_0 + 1$, $q_1 = a_1$.

Оскільки p_n і q_n залежать від перших $n + 1$ елементів ланцюгового дробу, то будемо позначати їх також як $p(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ і $q(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ відповідно (або $p(a_1, \ldots, a_n)$ і $q(a_1, \ldots, a_n)$ при $a_0 = 0$).

Для підхідних дробів справедливими є наступні твердження [4].

Теорема 1. 1. *Для будь-якого* $k \in N$ $\quad q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$.

2. *Для будь-якого* $k \in N$ $\quad \dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \dfrac{p_k}{q_k} = \dfrac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}$.

3. *Для будь-якого* $k \in N$ $\quad q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k$.

4. *Для будь-якого* $k \geq 2$ $\dfrac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \dfrac{p_k}{q_k} = \dfrac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}$.

5. *Для будь-якого* $k \in N$ $\dfrac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \ldots, a_1]$.

6. *Для будь-якого* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] = \dfrac{p_{k-1} r_k + p_{k-2}}{q_{k-1} r_k + q_{k-2}}$.

Лема 1 [9]. *Знаменник* q_n *підхідного дробу порядку* n *періодичного ланцюгового дробу* $[(c)]$ *обчислюється за формулою*

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{c^2+4}} \left(\left(\frac{c + \sqrt{c^2+4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{c - \sqrt{c^2+4}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

***Наслідок* 1.** *Для знаменників* q_n *підхідних дробів ланцюгових* A_2*-дробів при кожному натуральному* n *мають місце точні оцінки*

$$q_n \geq \frac{1}{\alpha_1^2+4} \left(\left(\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2+4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2+4}}{2} \right)^{n+1} \right),$$
$$q_n \leq \frac{1}{\alpha_2^2+4} \left(\left(\frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2+4}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2+4}}{2} \right)^{n+1} \right). \qquad (6)$$

Доведення. Очевидно, що при кожному $n = 1, 2, \ldots$ виконується нерівність

$$q(\underbrace{\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{n}) \leq q(a_2, a_2, \ldots, a_n) \leq q(\underbrace{\alpha_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{n}).$$

Скориставшись лемою 1, отримаємо (6).

***Наслідок* 2.** *Якщо* $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1$, *то для знаменників підхідних дробів мають місце нерівності*

$$q_n \geq \frac{2\sqrt{17}}{17} \left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4} \right)^{n+1} \right),$$
$$q_n \leq \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \quad n \in N.$$

4. Циліндричні множини і їх властивості. *Циліндром рангу* m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ називатимемо множину $\Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ всіх $x \in L_{A_2}$, які мають ланцюгове A_2-зображення з першими m елементами, що дорівнюють відповідно $c_1, c_2, \ldots, c_m$, тобто

$$\Delta'_{c_1 \ldots c_m} = \{ x : x = [c_1, c_2, \ldots, c_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots],\ a_{m+i} \in A_2 \}.$$

Очевидно, що

$$\min \Delta'_{c_1} = \left[c_1, \frac{1}{\beta_2} \right] = [c_1 + \beta_2], \qquad \min \Delta'_{c_1 c_2} = \left[c_1, c_2, \frac{1}{\beta_1} \right] = [c_1, c_2 + \beta_1],$$

$$\max \Delta'_{c_1} = \left[c_1, \frac{1}{\beta_1} \right] = [c_1 + \beta_1], \qquad \max \Delta'_{c_1 c_2} = \left[c_1, c_2, \frac{1}{\beta_2} \right] = [c_1, c_2 + \beta_2],$$

і в загальному випадку

$$\min \Delta'_{c_1\ldots c_m} = \begin{cases} \left[c_1,\ldots,c_m,\dfrac{1}{\beta_2}\right] = [c_1,\ldots,c_{m-1},c_m+\beta_2] & \text{при непарному } m, \\ \left[c_1,\ldots,c_m,\dfrac{1}{\beta_1}\right] = [c_1,\ldots,c_{m-1},c_m+\beta_1] & \text{при парному } m, \end{cases}$$

$$\max \Delta'_{c_1\ldots c_m} = \begin{cases} \left[c_1,\ldots,c_m,\dfrac{1}{\beta_1}\right] = [c_1,\ldots,c_{m-1},c_m+\beta_1] & \text{при непарному } m, \\ \left[c_1,\ldots,c_m,\dfrac{1}{\beta_2}\right] = [c_1,\ldots,c_{m-1},c_m+\beta_2] & \text{при парному } m. \end{cases}$$

Відрізок з кінцями $\min \Delta'_{c_1\ldots c_m}$ і $\max \Delta'_{c_1\ldots c_m}$ називатимемо *циліндричним відрізком рангу* m *з основою* $c_1\ldots c_m$ і позначатимемо $\Delta_{c_1\ldots c_m}$. Інтервал, кінці якого збігаються з кінцями $\Delta_{c_1\ldots c_m}$, позначимо $\nabla_{c_1\ldots c_m}$ і називатимемо *циліндричним інтервалом рангу* m *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$.

Очевидно, що $\Delta'_{c_1\ldots c_m} \subset \Delta_{c_1\ldots c_m}$, але не завжди $\Delta'_{c_1\ldots c_m} = \Delta_{c_1\ldots c_m}$. Необхідні і достатні умови для останньої рівності будуть наведені далі.

Для довільного натурального m мають місце наступні властивості:

1. $\Delta'_{c_1\ldots c_m c} \subset \Delta'_{c_1\ldots c_m}$. *Більш того,* $\Delta'_{c_1\ldots c_m} = \Delta'_{c_1\ldots c_m\alpha_1} \bigcup \Delta'_{c_1\ldots c_m\alpha_2}$.

Ця властивість випливає безпосередньо з означення циліндра.

2. $\Delta_{c_1\ldots c_m c} \subset \Delta_{c_1\ldots c_m}$, *але, взагалі кажучи,*

$$\Delta_{c_1\ldots c_m} \neq \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} \bigcup \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2}.$$

Включення є очевидним, а нерівність має місце, зокрема, коли $A_2 = \{1, 3\}$: $\Delta_1 \neq \Delta_{11} \bigcup \Delta_{13}$.

3. $\inf \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} < \inf \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2}$ *при непарному* m *і* $\inf \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} > \inf \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2}$ *при парному* m.

Справді, при парному m

$$\inf \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} = [c_1,\ldots,c_m,\alpha_1+\beta_2] < [c_1,\ldots,c_m,\alpha_2+\beta_2] = \inf \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2},$$

а при непарному m

$$\inf \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} = [c_1,\ldots,c_m,\alpha_1+\beta_1] < [c_1,\ldots,c_m,\alpha_2+\beta_1] = \inf \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2}.$$

4. *Якщо* $\alpha_2-\alpha_1 = \beta_2-\beta_1$, *що рівносильно* $\alpha_2+\beta_1 = \alpha_1+\beta_2$, *то*

$$\Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2} = [c_1,\ldots,c_m,\alpha_1+\beta_2] = [c_1,\ldots,c_m,\alpha_2+\beta_1].$$

Дійсно, при парному m

$$\max \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2} = [c_1,\ldots,c_m,\alpha_2+\beta_1] = [c_1,\ldots,c_m,\alpha_1+\beta_2] = \min \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1},$$

а при непарному m

$$\max \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} = [c_1,\ldots,c_m,\alpha_1+\beta_2] = [c_1,\ldots,c_m,\alpha_2+\beta_1] = \min \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2}.$$

5. *Якщо* $\alpha_2-\alpha_1 < \beta_2-\beta_1 \Leftrightarrow \alpha_2+\beta_1 < \alpha_1+\beta_2$, *то*

$$\Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2} = [a, b],$$

де

$$a = \begin{cases} [c_1, \ldots, c_m, \alpha_1 + \beta_2] & \text{при парному } m, \\ [c_1, \ldots, c_m, \alpha_2 + \beta_1] & \text{при непарному } m, \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} [c_1, \ldots, c_m, \alpha_2 + \beta_1] & \text{при парному } m, \\ [c_1, \ldots, c_m, \alpha_1 + \beta_2] & \text{при непарному } m. \end{cases}$$

Доведення. Нехай m є парним. Тоді

$$\max \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_2} = [c_1, \ldots, c_m, \alpha_2 + \beta_1] > [c_1, \ldots, c_m, \alpha_1 + \beta_2] = \min \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_1}.$$

На підставі властивості 3 маємо

$$\Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_2} \cap \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_1} = \left[\min \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_1};\ \max \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_2}\right] = [a, b].$$

Якщо m є непарним, то

$$\max \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_1} = [c_1, \ldots, c_m, \alpha_1 + \beta_2] > [c_1, \ldots, c_m, \alpha_2 + \beta_1] = \min \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_2}.$$

У цьому випадку на підставі властивості 3 отримуємо

$$\Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_1} \cap \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_2} = \left[\min \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_2};\ \max \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_1}\right] = [a, b].$$

6. *Якщо* $\alpha_2 - \alpha_1 \le \beta_2 - \beta_1 \Leftrightarrow \alpha_2 + \beta_1 \le \alpha_1 + \beta_2$, *то*

$$\Delta_{c_1 \ldots c_m} = \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_1} \cup \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_2}.$$

Дана властивість є наслідком властивостей 4 і 5.

7. *Якщо* $\alpha_2 - \alpha_1 > \beta_2 - \beta_1$, *що рівносильно* $\alpha_2 + \beta_1 > \alpha_1 + \beta_2$, *то*

$$\Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_1} \cap \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_2} = \varnothing. \tag{7}$$

Доведення. Нехай m є парним. Тоді

$$\max \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_2} = [c_1, \ldots, c_m, \alpha_2 + \beta_1] < [c_1, \ldots, c_m, \alpha_1 + \beta_2] = \min \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_1}.$$

У випадку непарного m

$$\max \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_1} = [c_1, \ldots, c_m, \alpha_1 + \beta_2] < [c_1, \ldots, c_m, \alpha_2 + \beta_1] = \min \Delta_{c_1 \ldots c_m \alpha_2}.$$

На підставі властивості 3 отримуємо (7).

8. *Довжина циліндричного відрізка* $\Delta_{c_1 \ldots c_n}$ *обчислюється за формулою*

$$\left|\Delta_{c_1 \ldots c_n}\right| = \frac{\beta_2 - \beta_1}{(q_n + \beta_1 q_{n-1})(q_n + \beta_2 q_{n-1})}. \tag{8}$$

Справді,

$$\left|\Delta_{c_1 \ldots c_n}\right| = \max \Delta_{c_1 \ldots c_n} - \min \Delta_{c_1 \ldots c_n} =$$

$$= \left|\left[c_1, \ldots, c_n, \beta_2^{-1}\right] - \left[c_1, \ldots, c_n, \beta_1^{-1}\right]\right| =$$

$$= \left|\frac{\beta_2^{-1} p_n + p_{n-1}}{\beta_2^{-1} q_n + q_{n-1}} - \frac{\beta_1^{-1} p_n + p_{n-1}}{\beta_1^{-1} q_n + q_{n-1}}\right| = \left|\frac{p_n + \beta_2 p_{n-1}}{q_n + \beta_2 q_{n-1}} - \frac{p_n + \beta_1 p_{n-1}}{q_n + \beta_1 q_{n-1}}\right| =$$

$$= \frac{\left|\beta_2 (p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n) - \beta_1 (p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n)\right|}{(\beta_1 q_{n-1} + q_n)(\beta_2 q_{n-1} + q_n)} =$$

$$= \frac{(\beta_2 - \beta_1)\left|p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n\right|}{(q_n + \beta_1 q_{n-1})(q_n + \beta_2 q_{n-1})}.$$

Враховуючи, що $p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^n$, отримуємо формулу (8).

***Наслідок* 3.** $\left|\Delta_{c_1\ldots c_n}\right| \to 0, \quad n \to \infty.$

***Наслідок* 4.** *Діаметр циліндра* $\Delta'_{c_1\ldots c_m}$, *збігаючись із довжиною* $\Delta_{c_1\ldots c_m}$, *дорівнює виразу* (8).

***Наслідок* 5.** *Якщо* $\alpha_1 = 1/2$, *а* $\alpha_2 = 1$, *то* $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1$ *і*

$$\left|\Delta_{c_1\ldots c_n}\right| = \frac{1}{(q_{n-1}+q_n)(q_{n-1}+2q_n)}.$$

9. *Основне метричне відношення має вигляд*

$$\frac{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n c}\right|}{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n}\right|} = \frac{\left(1+\beta_1\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1+\beta_2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(c+\beta_1+\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(c+\beta_2+\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

Доведення. Використовуючи формулу (8) для виразів $\left|\Delta_{c_1\ldots c_n}\right|$ і $\left|\Delta_{c_1\ldots c_n c}\right|$ і закон утворення знаменників підхідних дробів, отримуємо

$$\frac{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n c}\right|}{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n}\right|} = \frac{(q_n+\beta_1 q_{n-1})(q_n+\beta_2 q_{n-1})}{(cq_n+q_{n-1}+\beta_1 q_n)(cq_n+q_{n-1}+\beta_2 q_n)} =$$

$$= \frac{\left(1+\beta_1\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1+\beta_2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(c+\beta_1+\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(c+\beta_2+\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

10. *Якщо* $\alpha_2-\alpha_1 = \beta_2-\beta_1$ (*тобто* $\alpha_1\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$), *то*

$$\frac{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n c}\right|}{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n}\right|} = \frac{\left(1+c\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(2c^2+1+2c\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}, \tag{9}$$

$$\frac{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n \alpha_1}\right|}{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n \alpha_2}\right|} = \frac{\left(1+\alpha_1\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(2\alpha_2^2+1+2\alpha_2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(1+\alpha_2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(2\alpha_1^2+1+2\alpha_1\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}. \tag{10}$$

Доведення. Використовуючи властивість 9, отримуємо

$$\lambda_1 = \frac{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n \alpha_1}\right|}{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n}\right|} = \frac{\left(1+\beta_1\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1+\beta_2\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(\alpha_1+\beta_1+\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(\alpha_1+\beta_2+\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

Але $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\alpha_1 = 1/(2\alpha_2)$. Тому після спрощення маємо

$$\lambda_1 = \frac{\left(1+\alpha_1\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(2\alpha_1^2+1+2\alpha_1\dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

Рівність (10) є наслідком рівності (9).

11. *Якщо* $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1$, *то* $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1$ *і*

$$\frac{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n 2^{-1}}\right|}{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n}\right|} = \frac{2+\frac{q_{n-1}}{q_n}}{3+2\frac{q_{n-1}}{q_n}},$$

$$\frac{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n 1}\right|}{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n}\right|} = \frac{1+\frac{q_{n-1}}{q_n}}{3+2\frac{q_{n-1}}{q_n}}, \tag{11}$$

$$\frac{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n 2^{-1}}\right|}{\left|\Delta_{c_1\ldots c_n 1}\right|} = \frac{2+\frac{q_{n-1}}{q_n}}{1+\frac{q_{n-1}}{q_n}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{q_{n-1}}{q_n}}.$$

Доведення. Підставляючи значення α_1 і α_2 в рівності (9), (10), після спрощення отримуємо рівності (11).

5. Тополого-метричні властивості множини L_{A_2}.

Теорема 2. *Якщо* $\alpha_1\alpha_2 \le 1/2$, *то* $L_{A_2} = [\beta_1, \beta_2]$.

Доведення. Оскільки очевидно, що $L_{A_2} \subset [\beta_1, \beta_2]$, то залишається довести, що $[\beta_1, \beta_2] \subset L_{A_2}$.

Нехай x — довільна точка відрізка $[\beta_1, \beta_2]$. Згідно з властивістю 6 $[\beta_1, \beta_2] = \Delta_{\alpha_1} \bigcup \Delta_{\alpha_2}$. Тому існує $c_1 \in A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ таке, що $x \in \Delta_{c_1}$ (звичайно, якщо $x \in \Delta_{\alpha_1} \bigcap \Delta_{\alpha_2}$, то таке c_1 визначається неоднозначно). За тією ж властивістю $\Delta_{c_1} = \Delta_{c_1\alpha_1} \bigcup \Delta_{c_1\alpha_2}$. Тому існує $c_2 \in A_2$ таке, що $x \in \Delta_{c_1c_2}$ і т. д. Якщо $x \in \Delta_{c_1\ldots c_k}$ (а це означає, що $x = [c_1, \ldots, c_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]$, де a_{k+j} — деякі елементи множини A_2), то з того, що

$$\Delta_{c_1\ldots c_k} = \Delta_{c_1\ldots c_k\alpha_1} \bigcup \Delta_{c_1\ldots c_k\alpha_2},$$

випливає існування $c_{k+1} \in A_2$ такого, що $x \in \Delta_{c_1\ldots c_k c_{k+1}}$ і т. д.

Отже, існує нескінченна послідовність $\{c_k\}$, $c_k \in A_2$ така, що x належить всім циліндричним відрізкам

$$\Delta_{c_1},\ \Delta_{c_1c_2},\ \ldots\ ,\ \Delta_{c_1c_2\ldots c_k},\ \ldots\ .$$

Оскільки, згідно з властивістю 2

$$\Delta_{c_1\ldots c_k c_{k+1}} \subset \Delta_{c_1\ldots c_k}$$

і згідно з наслідком 3

$$\left|\Delta_{c_1\ldots c_k}\right| \to 0, \qquad k \to \infty,$$

то за аксіомою Кантора існує єдина точка, яка належить всім цим відрізкам, а такою є точка x. Тому

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1\ldots c_k} = [c_1, \ldots, c_k, \ldots] \in L_{A_2},$$

що й потрібно було довести.

***Наслідок* 6.** *Якщо* $\alpha_1\alpha_2 \leq 1/2$, *то* $\Delta'_{c_1\ldots c_m} = \Delta_{c_1\ldots c_m}$.

Теорема 3. *Якщо* $\alpha_1\alpha_2 = 1/2$, *то зчисленна множина точок* $x \in [\beta_1, \beta_2]$ *має два ланцюгових* A_2*-зображення, решта ж точок мають єдине зображення.*

Доведення. Якщо $x = \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2}$, то x має два ланцюгових A_2-зображення згідно з властивістю 6 циліндричних множин. І таких точок, очевидно, є зчисленна множина (для кожного натурального m їх кількість є скінченною).

Якщо x не є спільною точкою циліндричних відрізків

$$\Delta_{a_1\ldots a_m\alpha_1} \quad \text{і} \quad \Delta_{a_1\ldots a_m\alpha_2}$$

для жодного набору $a_1, \ldots, a_m$, то числа c_k, існування яких встановлено при доведенні попередньої теореми, визначаються однозначно, оскільки

$$\nabla_{c_1\ldots c_{k-1}\alpha_1} \bigcap \nabla_{c_1\ldots c_{k-1}\alpha_2} = \varnothing.$$

У цьому випадку для точки x існує єдина послідовність $\{c_k\}$ така, що $x = [c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots]$. Справді, припустимо, що

$$x = [c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots] = [d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots].$$

Якщо $\alpha_1 = c_1 \neq d_1 = \alpha_2$, то $x \in \Delta_{\alpha_1}$ і $x \in \Delta_{\alpha_2}$, а це суперечить тому, що $\nabla_{\alpha_1} \bigcap \nabla_{\alpha_2} = \varnothing$ і $x \neq \Delta_{\alpha_1} \bigcap \Delta_{\alpha_2}$. Отже, $c_1 = d_1$.

Нехай тепер $c_i = d_i$, $i = \overline{1, m}$, і $c_{m+1} \neq d_{m+1}$. Тоді $x \in \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1}$ і $x \in \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2}$, тобто $x = \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2}$, що суперечить умові

$$\nabla_{c_1\ldots c_m\alpha_1} \bigcap \nabla_{c_1\ldots c_m\alpha_2} = \varnothing,$$

$$x \neq \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_1} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_m\alpha_2}.$$

Отже, для довільного натурального m $c_m \neq d_m$, що й потрібно було довести.

У випадку $\alpha_1\alpha_2 = 1/2$ точки $x \in [\beta_1, \beta_2]$, що є кінцями деякого циліндра, будемо називати A_2*-раціональними.* До таких точок належать ті, що мають два ланцюгових A_2-зображення, а також точки β_1 і β_2. Очевидно, що кожне A_2-раціональне число (окрім β_1 і β_2) можна подати у вигляді

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, \alpha_1, (\alpha_1, \alpha_2)]$$

або

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, \alpha_2, (\alpha_2, \alpha_1)],$$

де n_0 — найменший номер такий, що точка x є спільним кінцем двох циліндрів рангу n для всіх $n > n_0$.

Якщо точка x не є кінцем жодного циліндрічного відрізка $\Delta_{c_1c_2\ldots c_n}$, то таку точку будемо називати A_2*-ірраціональною.*

6. Ланцюгові A_2-дроби, що не містять задану комбінацію двох символів. Нехай $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1$. Позначимо через $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ множину ланцюгових A_2-дробів, що не містять задану комбінацію двох елементів c_1c_2, $c_1, c_2 \in A_2 = \{1/2, 1\}$. Очевидно, що множина $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ при $c_1 \neq c_2$ не містить A_2-раціональних точок.

Теорема 4. *При* $c_1 \neq c_2$ *множина* $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ *є зчисленною, а при* $c_1 = c_2$ *— континуальною множиною, міра Лебега якої дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай $c_1 \neq c_2$. Тоді множина $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ складається з A_2-ірраціональних точок x, A_2-зображення яких до k-го місця включно містить лише елемент c_2, $k = 1, 2, \ldots$, а з $(k+1)$-го місця — лише елемент c_1, а також включає точки $[(1)]$ і $[(1/2)]$. Тому $C[A_2, \overline{c_1c_2}]$ є зчисленною.

Нехай $c_1 = c_2 = c$, $\tilde{c}$ — такий елемент, що $\{\tilde{c}\} = A_2 \setminus \{c\}$. Множина ланцюгових A_2-дробів з $C[A_2, \overline{cc}]$, що містять скінченну кількість елементів c, є зчисленною. Розглянемо точки $x \in C[A_2, \overline{cc}]$, в A_2-зображенні яких міститься нескінченна кількість елементів c. Тоді A_2-зображення таких точок мають вигляд $x = [\underbrace{\tilde{c}, \tilde{c}, \ldots, \tilde{c}}_{k_1}, c, \underbrace{\tilde{c}, \tilde{c}, \ldots, \tilde{c}}_{k_2}, c, \ldots]$. Кожному зображенню поставимо у відповідь нескінченну послідовність натуральних чисел $k_1, k_2, \ldots$. Множина таких послідовностей континуальна, з чого випливає континуальність множини $C[A_2, \overline{cc}]$.

Покажемо, що міра Лебега множини $C[A_2, \overline{cc}]$ дорівнює нулю. Нехай F_k — об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки з множини $C[A_2, \overline{cc}]$. Очевидно, що $F_k \subset F_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $C[A_2, \overline{cc}] = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ і для міри Лебега множини $C[A_2, \overline{cc}]$ мають місце співвідношення

$$\lambda(C[A_2, \overline{cc}]) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) \leq \lim_{k\to\infty}\left(n_k \max_{c_1 \ldots c_k} \left| \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} \right| \right),$$

де n_k — кількість циліндрів рангу k, що містяться в F_k. Дослідимо значення n_k.

Позначимо через $n_{k-1}^{\tilde{c}}$ кількість циліндрів $(k-1)$-рангу вигляду $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}\tilde{c}}$, що входять до F_{k-1}, через n_{k-1}^{c} кількість циліндрів $(k-1)$-го рангу вигляду $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}c}$, що входять до F_{k-1}. Кожний циліндр $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}\tilde{c}}$ з F_{k-1} породжує два циліндри k-го порядку: $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}\tilde{c}c}$ і $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}\tilde{c}\tilde{c}}$, які належать F_k, а кожен циліндр вигляду $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}c}$ породжує лише один циліндр $\Delta_{c_1\ldots c_{k-2}c\tilde{c}}$, який належить множині F_k.

Тоді очевидно, що $n_k = 2n_{k-1}^{\tilde{c}} + n_{k-1}^{c}$. Оскільки $n_{k-1}^{\tilde{c}} = n_{k-2}$, то $n_k = n_{k-1}^{\tilde{c}} + n_{k-1}^{\tilde{c}} + n_{k-1}^{c} = n_{k-2} + n_{k-1}$. Зокрема, $n_0 = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, і при $n_{-1} = 1$ послідовність $\{n_k\}$, $k = -1, 0, 1, \ldots$, збігається з послідовністю чисел Фібоначчі, з чого випливає, що

$$n_k = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \right).$$

На підставі наслідку леми 1 отримуємо

$$\max_{c_1\ldots c_k} \left| \Delta_{c_1c_2\ldots c_k} \right| = \left| \Delta_{\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}}_{k}} \right| \leq \frac{1}{q_{k-1}^2\left(\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}}_{k-1} \right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{17}}{17}\left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} \right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4} \right)^{k} \right) \right)^2}.$$

Тоді для міри Лебега множини $C\left[A_2, \overline{cc}\right]$ виконуються нерівності

$$\lambda\left(C\left[A_2, \overline{cc}\right]\right) \leq \varlimsup_{k\to\infty}\left(n_k \max_{c_1\ldots c_k}\left|\Delta_{c_1c_2\ldots c_k}\right|\right) \leq$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right)}{\left(\frac{2\sqrt{17}}{17}\left(\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^{k}\right)\right)^2} = 0,$$

звідки випливає, що $\lambda(C[A_2, \overline{cc}]) = 0$.

7. Випадкова величина, елементи ланцюгового A_2-зображення якої утворюють однорідний ланцюг Маркова. Нехай

$$\xi = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots]$$

— випадкова величина (в. в.), зображена ланцюговим дробом, елементи η_k якої можуть набувати значень з множини $A_2 = \{1/2, 1\}$ і утворюють однорідний ланцюг Маркова $\{\eta_k\}$ з початковими ймовірностями $p_{\frac{1}{2}} > 0$ і $p_1 > 0$ і матрицею перехідних імовірностей $\|p_{ij}\|$, $i, j \in A_2$, до того ж $p_{ij} \geq 0$ і $p_{i\frac{1}{2}} + p_{i1} = 1$, $i = 1/2, 1$. Очевидно, що в. в. ξ набуває значень з множини $L_{A_2} = [1/2, 1]$.

Нагадаємо, що спектром розподілу в. в. ξ називають множину

$$S = \left\{x : P\{\xi \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\} > 0 \ \forall \varepsilon > 0\right\}.$$

Можна довести, що спектром розподілу в. в. ξ є множина

$$A = \left\{x : x = [a_1, \ldots, a_k, \ldots],\ a_k \in A_2,\ p_{a_k a_{k+1}} > 0 \ \forall k = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Теорема 5. *Якщо матриця перехідних імовірностей* $\|p_{ij}\|$ *містить*:

1) *більше ніж один нуль, то* ξ *має дискретний розподіл з двома атомами*;

2) *тільки один нуль, то* ξ *має*:

а) *дискретний розподіл із зчисленною множиною атомів, якщо* $p_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} p_{11} > 0$;

б) *сингулярний розподіл канторівського типу в протилежному випадку, тобто якщо* $p_{\frac{1}{2}1} p_{1\frac{1}{2}} > 0$.

Доведення. 1. Матриця перехідних імовірностей $\|p_{ij}\|$ не може мати більше ніж два нулі. Якщо $\|p_{ij}\|$ має два нулі, то очевидно, що розподіл в. в. ξ є дискретним і атомами розподілу будуть дві точки:

$$x_1 = \left[\frac{1}{2}, (1)\right] \quad \text{і} \quad x_2 = [(1)] \quad \text{при} \quad p_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = p_{1\frac{1}{2}} = 0,$$

$$x_1 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{і} \quad x_2 = \left[1, \left(\frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{при} \quad p_{\frac{1}{2}1} = p_{11} = 0,$$

$$x_1 = \left[\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right] \quad \text{і} \quad x_2 = \left[\left(1, \frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{при} \quad p_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = p_{11} = 0,$$

$$x_1 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{і} \quad x_2 = [(1)] \quad \text{при} \quad p_{\frac{1}{2}1} = p_{1\frac{1}{2}} = 0.$$

2. Нехай тепер матриця $\|p_{ij}\|$ містить лише один нуль. Можливі два випадки.

2а. Якщо $p_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} p_{11} > 0$, то $p_{\frac{1}{2}1} = 0$ або $p_{1\frac{1}{2}} = 0$. У першому випадку з точністю до зчисленної множини розподіл зосереджено на множині $C\left[A_2, \overline{\frac{1}{2}1}\right]$, у другому — на множині $C\left[A_2, \overline{1\frac{1}{2}}\right]$. За теоремою 4 обидві множини є зчисленними, тому розподіл в. в. ξ буде дискретним із зчисленною множиною атомів.

2б. Нехай $p_{cc} = 0$, де $c \in A_2$. Очевидно, що спектр розподілу в цьому випадку збігається з множиною $C\left[A_2, \overline{cc}\right]$, доповненою A_2-раціональними точками, що є граничними до неї. За теоремою 4 міра Лебега такої множини дорівнює нулю. Оскільки очевидно, що атомів розподілу в цьому випадку немає, то в. в. ξ має сингулярний розподіл канторівського типу [1, с. 69].

Легко бачити, що розподіл в. в. ξ у випадку, коли матриця $\|p_{ij}\|$ не містить нулів, є неперервним. Проте задача визначення типу розподілу в цьому випадку заслуговує на окрему увагу.

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
2. *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets // Acta Arith. – 2007. – **130**, № 3. – P. 215 – 230.
3. *Jager H., de Vroedt C.* Lüroth series and their ergodic properties // Indag. Math. – 1968. – **31**. – P. 31 – 42.
4. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 116 с.
5. *Lévy P.* Théorie de l'addition des variables aléatoirs. – Paris, 1937. – 327 p.
6. *Iosifescu M., Kraaikamp C.* On Denjoy's canonical continued fraction expansion // Osaka J. Math. – 2003. – **40**. – P. 235 – 244.
7. *Lehner J.* Semiregular continued fractions whose partial denominatorrs are 1 or 2. The mathematical legacy of Wilhelm Maghus: droups, geometry and special functions (Brooklyn, NY, 1992) // Contemp. Math. – 1994. – **169**. – P. 407 – 410.
8. *Brown G., Qinghe Yin.* Metrical theory for Farey continued fractions // Osaka J. Math. – 1996. – **33**. – P. 951 – 970.
9. *Кючев Д. В.* Про розмірність Хаусдорфа – Безиковича деяких множин ланцюгових дробів // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2004 – **4** . – С. 285 – 291.

Одержано 07.07.08