УДК 531.36

Д. М. Лила, А. А. Мартынюк (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Conditions of the asymptotic stability of a linear system of matrix differential equations with quasi-periodic coefficients are established via the constructive application of the principle of comparison with the matrix-valued Lyapunov function.

Встановлено умови асимптотичної стійкості лінійної системи матричних рівнянь з квазіперіодичними коефіцієнтами на основі конструктивного застосування принципу порівняння з матричнозначною функцією Ляпунова.

1. Введение. Матричные дифференциальные уравнения применяются в некоторых областях прикладной математики и механики, таких как спектральная факторизация [1], описание инвариантного погружения и процессов рассеяния [2, 3], теория оптимального управления [4], теория матричных дифференциальных игр [5] и других.

В данной статье предлагается новый подход к анализу устойчивости решений матричных дифференциальных уравнений, основанный на использовании матричнозначных функций Ляпунова. Формулируется принцип сравнения с матричнозначной функцией Ляпунова, и для класса матричных линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами указан способ построения и применения матричнозначной функции. В качестве примера исследуется система восьмого порядка.

2. Принцип сравнения для матричной системы. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X), \qquad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и F — матричнозначная функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения $X(t; t_0, X_0)$ системы (1) на интервале $T_0 = [t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$, при $(t_0, X_0) \in T_0 \times N$, $N \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ — открытая связная область; $F(t, X) = 0$ при всех $t \in T_0$, если $X = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Следуя работе [6], предположим, что для системы (1) известна матричнозначная функция $U\colon T_0 \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и существует матричнозначная функция $G(t, U)$ такая, что

$$D^+U(t, X) \leq G(t, U(t, X)) \tag{2}$$

при всех $(t, X) \in T_0 \times N$, где $G \in C\left(T_0 \times \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ и

$$D^+U(t, X) = \limsup\left\{[U(t+h, X+hF(t, X)) - U(t, X)]h^{-1}\colon\ h \to 0^+\right\}.$$

Определение 1. *Матричное дифференциальное уравнение*

$$\frac{dY}{dt} = G(t, U), \quad Y(t_0) = Y_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{3}$$

является системой сравнения для матричного дифференциального уравнения (1), *если в множестве решений уравнения* (3) *существует решение* $\overline{Y}(t)$, *связанное с решениями* $X(t)$ *матричной системы* (1) *соотношениями* $U(t_0, X_0) \leq$ $\leq Y_0$ *и* $U(t, X(t)) \leq \overline{Y}(t)$ *при всех* $t \geq t_0$.

Приведем одно из основных утверждений принципа сравнения, позволяющее исследовать динамические свойства решений уравнения (1) с применением матричнозначной функции.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *и матричной системы сравнения* (3) *выполняются условия*:

1) *существует матричнозначная функция* $U(t, X) \in C\left(T_0 \times \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, *локально липшицева по* X;

2) *существует матричнозначная функция* $G(t, U) \in C\left(T_0 \times \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, *квазимонотонно неубывающая по* U *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$, *такая, что*

$$D^+U(t, X(t)) \leq G(t, U(t, X))$$

при всех $(t, X) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n\times n}$;

3) *существуют решения* $X(t)$ *системы* (1) *и максимальное решение* $\overline{Y}(t) = \overline{Y}(t; t_0, Y_0)$ *системы сравнения* (3) *при всех* $t \geq t_0$.

Тогда при условии, что

$$U(t_0, X_0) < Y_0, \tag{4}$$

выполняется оценка

$$U(t, X(t)) < \overline{Y}(t) \tag{5}$$

при всех $t \geq t_0$.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [6]. Ее фактическое применение связано с конструктивным построением матричнозначной функции для рассматриваемого класса матричных уравнений. Ниже приводится способ построения такой функции для одного класса матричных дифференциальных уравнений.

3. Построение функции Ляпунова для класса линейных нестационарных матричных систем. Рассмотрим матричную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= A_{11}X_1 + A_{12}(t)X_2, \quad X_1(t_0) = X_{10}, \\ \frac{dX_2}{dt} &= A_{22}X_2 + A_{21}(t)X_1, \quad X_2(t_0) = X_{20}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $X_1,\ X_2 \in R^{n\times n}$, матрицы $A_{11},\ A_{22} \in R^{n\times n}$ постоянны и $A_{12}(t),\ A_{21}(t)$ — квазипериодические матрицы-функции. Будем считать, что

$$A_{12}(t) = \sum_{k=-N}^{N} A_{12}^{(k)} e^{i\omega_k t}, \qquad A_{21}(t) = \sum_{k=-N}^{N} A_{21}^{(k)} e^{i\omega_k t},$$

где $\omega_k \in \mathbb{R}$, $\omega_{-k} = -\omega_k$, $\omega_k \neq 0$, $A_{12}^{(k)}$, $A_{21}^{(k)} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), $A_{12}^{(-k)} = \overline{A_{12}^{(k)}}$, $A_{21}^{(-k)} = \overline{A_{21}^{(k)}}$, $A_{12}^{(0)} = 0$, $A_{21}^{(0)} = 0$.

Прямую сумму $X = X_1 \rfloor X_2 = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$ будем называть вектором состояния системы (6).

Обозначим через $\mathcal{K}_1$ множество положительно полуопределенных матриц, образующих замкнутый выпуклый конус вещественного линейного пространства симметрических $(n \times n)$-матриц [7], и получим в качестве соответствующего конуса симметрических $(2n \times 2n)$-матриц фазового пространства $\mathcal{E}$ системы (6) множество $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^2$. При этом:

1) если $A \in \mathcal{K}$, $\lambda \geq 0$, то $\lambda A \in \mathcal{K}$;

2) если $A \in \mathcal{K}$, $B \in \mathcal{K}$, то $A + B \in \mathcal{K}$;

3) если $A \in \mathcal{K}$, $-A \in \mathcal{K}$, то $A = 0$.

Поскольку фазовое пространство системы (6) образует подмножество множества вещественных $(2n \times 2n)$-матриц с полуупорядоченностью, индуцированной конусом положительно полуопределенных матриц соответствующего порядка, оно также полуупорядочено с тем же отношением порядка [8]: $A \overset{\mathcal{K}}{\geq} B$, если $A - B \in \mathcal{K}$. Точно так же $A \overset{\mathcal{K}}{>} B$, если матрица $A - B$ является положительно определенной, т. е. имеет место неравенство $A - B \overset{\mathcal{K}}{>} 0$, где 0 — нулевая матрица такого же порядка.

Конус $\mathcal{K}$ телесный (множество $\mathcal{K}^0 = \left\{X : X \overset{\mathcal{K}}{>} 0\right\}$ его внутренних точек не пусто), воспроизводящий и нормальный [8, 9].

Пусть $U \in \mathcal{K}$, $U \neq 0$. Элемент $X \in \mathcal{E}$ называется измеримым, если при некотором $\alpha \geq 0$ справедлива оценка $-\alpha U \overset{\mathcal{K}}{\leq} X \overset{\mathcal{K}}{\leq} \alpha U$. Наименьшее значение α называется U-нормой [8, 10] элемента X и обозначается $\|X\|_U$.

Единичным шаром в множестве $\mathcal{E}_U$ всех U-измеримых элементов пространства $\mathcal{E}$, представляющих собой блочно-диагональные симметрические матрицы, будет конусный отрезок $\langle -U, U\rangle = \left\{X\colon -U \overset{\mathcal{K}}{\leq} X \overset{\mathcal{K}}{\leq} U\right\}$.

Для системы (6) построим матричнозначную функцию

$$U(t, X) = X^T P(t) X = \begin{bmatrix} X_1^T & 0 \\ 0 & X_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12}(t) \\ P_{12}^T(t) & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $P_{11} \overset{\mathcal{K}_1}{>} 0$, $P_{22} \overset{\mathcal{K}_1}{>} 0$, $P_{12}(t) \in C^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$. При выполнении условия

$$P_{22} \overset{\mathcal{K}_1}{>} P_{12}^T(t)\, P_{11}^{-1}\, P_{12}(t), \quad t \geq t_0, \tag{8}$$

с учетом симметричности матрицы $P(t)$ будем иметь [7] положительную полуопределенность матрицы $U(t, X)$.

Введем в рассмотрение двухкомпонентную (конусозначную) функцию Ляпунова

$$V(t, X, H_1, H_2) = V_1(t, X, H_1) \,\rfloor\, V_2(t, X, H_2), \tag{9}$$

где

$$V_1(t, X, H_1) = H_1^T U(t, X) H_1, \qquad V_2(t, X, H_2) = H_2^T U(t, X) H_2$$

и H_1, $H_2 \in \mathbb{R}^{2n\times n}$ — некоторые матрицы-параметры. Учитывая условие (8), для функции (9) получаем неравенства вида

$$V_1(t, X, H_1) \overset{\mathcal{K}_1}{\geq} 0, \quad V_2(t, X, H_2) \overset{\mathcal{K}_1}{\geq} 0, \quad V(t, X, H_1, H_2) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad t \geq t_0. \tag{10}$$

Найдем полную производную по времени функции (9) вдоль решений системы (6):

$$\left.\frac{dV_i}{dt}\right|_{(6)} = H_i^T \frac{d}{dt}\left(X_1^T P_{11} X_1 + X_1^T P_{12}(t) X_2 + X_2^T P_{12}^T(t) X_1 + X_2^T P_{22} X_2\right)\Big|_{(6)} H_i =$$

$$= H_i^T \Big(X_1^T\left(A_{11}^T P_{11} + P_{11} A_{11} + P_{12}(t) A_{21}(t) + A_{21}^T(t) P_{12}^T(t)\right) X_1 +$$

$$+ X_2^T\left(A_{22}^T P_{22} + P_{22} A_{22} + P_{12}^T(t) A_{12}(t) + A_{12}^T(t) P_{12}(t)\right) X_2 +$$

$$+ \ X_1^T\left(\frac{dP_{12}}{dt} + A_{11}^T P_{12}(t) + P_{12}(t)A_{22} + P_{11}A_{12}(t) + A_{21}^T(t)P_{22}\right)X_2 \ +$$

$$+ \ X_2^T\left(\frac{dP_{12}^T}{dt} + A_{22}^T P_{12}^T(t) + P_{12}^T(t)A_{11} + P_{22}A_{21}(t) + A_{12}^T(t)P_{11}\right)X_1\Bigg)H_i, \quad i = 1, 2.$$

Предположив, что матрица-функция $P_{12}(t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dP_{12}}{dt} + A_{11}^T P_{12}(t) + P_{12}(t)A_{22} = -P_{11}(t)A_{12}(t) - A_{21}^T(t)P_{22}, \tag{11}$$

его решение при известных (см. [11]) ограничениях на матрицы A_{11}, A_{22} будем искать в виде

$$P_{12}(t) = \sum_{k=-N}^{N} P_{12}^{(k)} e^{i\omega_k t}, \tag{12}$$

где $P_{12}^{(k)} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Нетрудно видеть, что

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)} = \left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{(6)} \rfloor \left.\frac{dV_2}{dt}\right|_{(6)}. \tag{13}$$

Здесь

$$\left.\frac{dV_i}{dt}\right|_{(6)} = H_i^T X^T S(t) X H_i, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

и

$$S(t) = S_1(t) \rfloor S_2(t),$$

$$S_1(t) = A_{11}^T P_{11} + P_{11}A_{11} + P_{12}(t)A_{21}(t) + A_{21}^T(t)P_{12}^T(t),$$

$$S_2(t) = A_{22}^T P_{22} + P_{22}A_{22} + P_{12}^T(t)A_{12}(t) + A_{12}^T(t)P_{12}(t).$$

При выполнении условий

$$S_1(t) \overset{\mathcal{K}}{\le} 0, \qquad S_2(t) \overset{\mathcal{K}}{\le} 0 \tag{15}$$

при всех $t \ge t_0$ имеет место отрицательная полуопределенность выражения $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)}$ относительно конуса $\mathcal{K}$.

Наряду с системой уравнений (6) рассмотрим систему сравнения для (6)

$$\frac{dY}{dt} = G(t, Y), \qquad Y(t_0) = Y_0, \tag{16}$$

где $G: T_0 \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — непрерывная функция, гарантирующая существование соответствующего единственного решения, такая, что $G(t, 0) = 0$.

Определение 2. *Решение* $Y \equiv 0$ *уравнения* (16) *называется устойчивым в* $\mathcal{K}$, *если для любых* $\varepsilon > 0$, $t_0 \ge 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что из* $Y_0 \in \mathcal{S}_\delta$ *следует, что* $Y(t;\, t_0,\, Y_0) \in \mathcal{S}_\varepsilon$ *при всех* $t \ge t_0$, *где* $\mathcal{S}_\varepsilon = \langle -\varepsilon U, \varepsilon U\rangle$.

Определение 3. *Решение* $Y \equiv 0$ *уравнения* (16) *называется равномерно устойчивым в* $\mathcal{K}$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что из* $Y_0 \in \mathcal{S}_\delta$ *следует, что* $Y(t;\, t_0,\, Y_0) \in \mathcal{S}_\varepsilon$ *при всех* $t \ge t_0$, *где* $t_0 \ge 0$ — *любой начальный момент времени.*

Определение 4. *Решение* $Y \equiv 0$ *уравнения* (16) *называется равномерно* *асимптотически устойчивым в* $\mathcal{K}$, *если оно равномерно устойчиво в* $\mathcal{K}$ *и для некоторого* $h > 0$ *из* $Y_0 \in \mathcal{S}_h$ *следует, что* $\lim_{t\to\infty} \| Y(t;\ t_0,\ X_0 \|_U = 0$ *(равномерно по отношению к* t_0).

Теорема 2. *Предположим, что система уравнений* (16) *такова, что существуют постоянные симметрические* $(n \times n)$*-матрицы* P_{11}, P_{22} *и постоянные* $(2n \times n)$*-матрицы* H_1, H_2, *для которых выполняются следующие условия*:

1) *все последовательные главные миноры матриц* P_{11}, P_{22} *положительны*;

2) *все последовательные главные миноры матрицы* $P_{22} - P_{12}^T(t)\, P_{11}^{-1} P_{12}(t)$ *положительны при всех* $t \ge t_0$;

3) $U(t, X) = 0$, *если и только если* $X = 0$;

4) $\operatorname{rank} H_1 = \operatorname{rank} H_2 = n$;

5) *все главные миноры матриц* $-S_1(t)$, $-S_2(t)$ *неотрицательны при всех* $t \ge t_0$.

Тогда решение $X \equiv 0$ *системы* (6) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Выберем в качестве вспомогательной функции конусозначную функцию $V(t, X, H_1, H_2)$, определенную соотношением (9). Из условий 1 – 4 и оценок (8), (10) следует положительная полуопределенность этой функции [7] относительно конуса $\mathcal{K}$. Поскольку из условия 5 теоремы 2 и выражений (13), (14) для полной производной функции $V(t, X, H_1, H_2)$ вдоль решений системы (6) следует отрицательная полуопределенность производной dV/dt, естественно принять в качестве правой части системы сравнения (16) $G(t, Y) \equiv 0$ и положить $Y_0 \overset{\mathcal{K}}{\ge} 0$. При этом согласно лемме Важевского (см. [6, 10, 12]) и теореме 1 получим оценки

$$0 \overset{\mathcal{K}}{\le} V(t, X(t), H_1, H_2) \overset{\mathcal{K}}{\le} Y(t; t_0, V(t_0, X_0, H_1, H_2)) \equiv Y_0. \tag{17}$$

Таким образом, исходя из равномерной устойчивости состояния $Y \equiv 0$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0(\varepsilon) = \varepsilon$ такое, что для любых $\| Y_0 \|_U = \| Y(t_0;\ t_0,\ V(t_0,\ X_0, H_1,\ H_2)) \|_U < \delta_0$ имеем $\| Y(t;\ t_0,\ V(t_0, X_0, H_1,\ H_2)) \|_U < \varepsilon$. По непрерывности для каждого ε найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\| X_0 \| < \delta$ следует неравенство $\| V(t_0, X_0, H_1,\ H_2) \| = \| Y_0 \| < \dfrac{C^2\varepsilon^2}{\nu}$, где ν и C — некоторые положительные константы, определяемые ниже. Вслед за неравенством (17) с учетом нормальности конуса $\mathcal{K}(\| V(t, X, H_1,\ H_2) \| \le \nu \| Y_0 \|$, где ν — константа нормальности конуса [8, 9]), получаем оценку $\| V(t, X, H_1,\ H_2) \| < C^2\varepsilon^2$. В свою очередь $\| V(t, X, H_1, H_2) \| \ge \| V_i(t, X, H_i) \| = \left\| H_i^T X^T P^{1/2}(t)\, P^{1/2}(t) X H_i \right\| = \left\| P^{1/2}(t) X H_i \right\|^2$, $i = 1, 2$, где $\| \cdot \|$ — спектральная матричная норма, так что

$$\left\| P^{1/2}(t) X H_i \right\| < C\varepsilon. \tag{18}$$

Для скалярной функции

$$\psi(X) = \left\| P^{1/2}(t) X H_i \right\|, \quad t \ge t_0, \tag{19}$$

легко установить следующие свойства:

1) $\psi(X) = 0$, если и только если $X = 0$;

2) $\psi(cX) = |c|\, \psi(X)$ для всех комплексных чисел c и любой матрицы $X \in \mathcal{E}$;

3) $\psi(X + X') \le \psi(X) + \psi(X')$ для всех $X, X' \in \mathcal{E}$.

Это означает, что функция $\psi(\cdot)$, определенная равенством (19), задает на фазовом пространстве системы (6) матричную норму, эквивалентную, вследствие конечномерности пространства $\mathcal{E}$, норме $\|\cdot\|$. Существование в этом случае положительной константы C такой, что $\|X\| \le \dfrac{\psi(X)}{C}$, приводит, с учетом соотношения (18), к оценке $\|X(t;\, t_0,\, X_0)\| < \varepsilon$. В связи с произвольностью числа ε и независимостью выбора соответствующего δ от момента времени t_0 получение этой оценки из условия $\|X_0\| < \delta$ завершает доказательство равномерной устойчивости состояния $X \equiv 0$ системы (6).

Теорема 3. *Предположим, что система уравнений* (6) *такова, что существуют постоянные симметрические* $(n \times n)$*-матрицы* P_{11}, P_{22} *и постоянные* $(2n \times n)$*-матрицы* H_1, H_2, *для которых выполняются следующие условия*:

1) *все последовательные главные миноры матриц* P_{11}, P_{22} *положительны*;

2) *все последовательные главные миноры матрицы* $P_{22} - P_{12}^T(t)\, P_{11}^{-1}\, P_{12}(t)$ *положительны при всех* $t \ge t_0$;

3) $U(t, X) = 0$, *если и только если* $X = 0$;

4) $\operatorname{rank} H_1 = \operatorname{rank} H_2 = n$;

5) *все последовательные главные миноры матриц* $-S_1(t)$, $-S_2(t)$ *положительны при всех* $t \ge t_0$.

Тогда решение $X \equiv 0$ *системы* (6) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из условий 1 – 4 теоремы 3 и оценок (8), (10) следует положительная полуопределенность функции $V(t, X, H_1, H_2)$.

Пусть ε — положительное число. Согласно теореме 2 можно указать число $\delta > 0$ такое, что из $\|X_0\| < \delta$ следует $\|X(t;\, t_0,\, X_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$. Предположим, что решение $X(t;\, t_0,\, X_0)$ не попадет при $t \ge t_0$ в открытый шар J_δ радиуса δ с центром в точке $X_1 = X_2 = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда вследствие ограниченности решения $X(t;\, t_0,\, X_0)$ при всех $t \ge t_0$ полутраектория $X(t;\, t_0,\, X_0)$ при $t \ge t_0$ будет принадлежать некоторому шаровому слою $D = \bar{J}_R / J_\delta$, во всех точках которого согласно условию 5 теоремы 3 $\dfrac{dV}{dt} \overset{\mathcal{K}}{<} 0$.

Используя понятие и определяющее свойство сопряженного с $\mathcal{K}$ конуса $\mathcal{K}^* = \{\Phi \in \mathcal{E} :\ (\Phi, X) \ge 0$ при всех $X \in \mathcal{K}\}$ (см. [12]), можно утверждать, что во всех точках указанного компактного множества D выполняется неравенство $\left(\Psi,\, \dfrac{dV}{dt}\right) < 0$, где $\Psi \in \mathcal{K}^*$. Отсюда $\sup\limits_{\substack{\|\Psi\|=1 \\ X\in D}} \left(\Psi,\, \dfrac{dV}{dt}\right) = -\mu < 0$ и при всех $\Psi \in \mathcal{K}^*$, $X \in D$ имеет место оценка $\left(\Psi,\, \dfrac{dV}{dt}\right) \le -\mu$. Вследствие этого

$$\int_{t_0}^{t} \left(\Psi,\, \frac{dV}{ds}\right) ds \le -\mu(t - t_0).$$

Окончательно имеем

$$(\Psi,\ V(t, X, H_1,\ H_2)) \le (\Psi,\ V(t_0, X_0, H_1,\ H_2)) - \mu(t - t_0).$$

Этот вывод противоречив, так как связан с отрицательной определенностью функции V при неограниченном возрастании t, когда должно быть $(\Psi,\ V(t,$

$X, H_1, H_2)) \geq 0$. Таким образом, решение $X(t; t_0, X_0)$ попадает в некоторый момент в шар J_δ, но число δ выбрано так, что, попав в J_δ, решение $X(t; t_0, X_0)$ не сможет выйти за пределы J_ε. Так как число ε было взято произвольным, отсюда следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|X(t; t_0, X_0)\| = 0$.

Теорема доказана.

4. Пример. В качестве приложения приведенного способа построения конусозначной функции Ляпунова рассмотрим матричную линейную систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= \alpha X_1 + \beta e^{\nu J t} X_2, \\ \frac{dX_2}{dt} &= \gamma X_2 + \delta e^{-\nu J t} X_1, \end{aligned} \tag{20}$$

где $X_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $i = 1, 2$, α, β, γ, δ, $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq 0$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ [13].

Построим вначале для системы (20) матричнозначную функцию $U(t, X) = X^T P(t) X$, положив $P(t) = \begin{bmatrix} I & P_{12}(t) \\ P_{12}^T(t) & I \end{bmatrix}$, где I — единичная матрица второго порядка, а $P_{12}(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{dP_{12}}{dt} + (\alpha + \gamma) P_{12}(t) = -(\beta + \delta) e^{\nu J t}.$$

Ограниченное решение этого уравнения имеет вид

$$P_{12}(t) = -\frac{\beta + \delta}{(\alpha + \gamma)^2 + \nu^2} ((\alpha + \gamma) I - \nu J) e^{\nu J t}.$$

Полагая $H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$ и учитывая (9), „свертываем" матрицу U для получения конусозначной функции $V(t, X, H_1, H_2) = V_1(t, X, H_1) \,\rfloor\, V_2\,(t, X, H_2)$, где

$$V_1 = V_2 = X_1^T X_1 + X_2^T X_2 + X_1^T P_{12}(t) X_2 + X_2^T P_{12}^T(t) X_1.$$

Таким образом, условия 1 – 4 теоремы 3, обеспечивающие положительную определенность функции Ляпунова для системы (20), сводятся к выполнению неравенства

$$(\alpha + \gamma)^2 + \nu^2 - (\beta + \delta)^2 > 0. \tag{21}$$

Отрицательная определенность полной производной (13), (14) этой функции вдоль решений системы (20) эквивалентна отрицательной определенности матриц

$$S_1 = 2\left(\alpha - \frac{\delta(\beta + \delta)(\alpha + \gamma)}{(\alpha + \gamma)^2 + \nu^2}\right) I, \qquad S_2 = 2\left(\gamma - \frac{\beta(\beta + \delta)(\alpha + \gamma)}{(\alpha + \gamma)^2 + \nu^2}\right) I,$$

поэтому условие 5 теоремы 3 приводится к условию совместности системы неравенств

$$\begin{aligned} \alpha\big((\alpha + \gamma)^2 + \nu^2\big) - \delta(\beta + \delta)(\alpha + \gamma) &< 0, \\ \gamma\big((\alpha + \gamma)^2 + \nu^2\big) - \beta(\beta + \delta)(\alpha + \gamma) &< 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Фиксируя, например, значения α, γ, ν, можно получить область равномерной асимптотической устойчивости данной системы (см. [13]) в пространстве параметров $(\beta; \delta)$.

5. Выводы. Пример линейной системы восьмого порядка с периодическими коэффициентами, рассмотренный в фазовом пространстве, образованном множеством квазидиагональных вещественных матриц четвертого порядка с блоками равных размеров ($n_1 = n_2 = 2$), демонстрирует возможность исследования устойчивости матричных систем дифференциальных уравнений методом функций Ляпунова без „векторизации” матричной системы. При этом техника применения матричнозначных функций (см., например, [10, 12 – 14]) допускает обобщение для матричных дифференциальных уравнений на основе принципа сравнения с матричнозначной функцией Ляпунова [6]. Конструктивность предложенного способа построения функции Ляпунова позволяет исследовать некоторые прикладные задачи, математическими моделями которых являются матричные системы дифференциальных уравнений с эволюционирующими связями между их отдельными подсистемами.

1. *Clements D. J., Anderson B. D. O.* Polynomial factorization via the Riccati equation // SIAM J. Appl. Math. – 1976. – **31**. – P. 179 – 205.
2. *Juang J.* Existence of algebraic matrix Riccati equations arising in transport theory // Linear Algebra and Appl. – 1995. – **230**. – P. 89 – 100.
3. *Kuiper H. J.* Positive invariance and asymptotic stability of solutions to certain Riccati equations // Dynam. and Stabil. Syst. – 1994. – **9**. – P. 331 – 334.
4. *Thompson D. D., Volz R. A.* The linear quadratic cost problem with linear state constraints and the non symmetric Riccati equation // SIAM J. Contr. – 1975. – **13**. – P. 110 – 145.
5. *Basar T., Olsder G. J.* Dynamic non-cooperative game theory. – New York: Acad. Press, 1995. – 228 p.
6. *Мартынюк А. А.* О принципе сравнения для системы матричных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Украины. – 2008. – № 12. – С. 28 –33.
7. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
8. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
9. *Мазко А. Г.* Устойчивость и сравнение состояний динамических систем относительно переменного конуса // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 2. – С. 198 – 213.
10. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев: Наук. думка, 1984. – 308 с.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
12. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
13. *Лила Д. М., Слынько В. И.* О построении матричнозначной функции Ляпунова для линейной системы с квазипериодическими коэффициентами // Докл. НАН Украины. – 2007. – № 1. – С. 60 – 65.
14. *Martynyuk A. A.* Stability of motion: the role of multicomponent Liapunov functions. – London: Cambridge Sci. Publ., 2007. – 322 p.

Получено 21.03.08