УДК 517.956

Г. П. Лопушанська (Львів. нац. ун-т)

УЗАГАЛЬНЕНІ КРАЙОВІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НАПІВЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВАГОВИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРІВ

In weighted C-spaces, we prove the solvability of a boundary-value problem for semilinear $2m$-order elliptic equation in a bounded domain with generalized functions given on its boundary, strong power singularities at some points of the boundary, and finite orders of singularities on the whole boundary. We describe the behavior of a solution near the boundary of the domain.

В весовых C-пространствах установлена разрешимость краевой задачи для полулинейного эллиптического уравнения порядка $2m$ в ограниченной области с заданными на ее границе обобщенными функциями, сильными степенными особенностями в отдельных точках и конечными порядками сингулярностей на всей границе. Установлен характер поведения решения около границы области.

У роботі [1] за допомогою принципів Шаудера та стисливих відображень знайдено умови існування розв'язків крайових задач для квазілінійних еліптичних диференціальних рівнянь у соболєвських просторах.

У роботах [2 – 9] запропоновано метод дослідження крайових задач для напівлінійних еліптичних та параболічних рівнянь при заданих на межі області узагальнених функціях. Відомо (див. [3, 8] та наведену там бібліографію), що регулярний всередині області розв'язок лінійного чи напівлінійного еліптичного рівняння набуває узагальнених крайових значень із простору $(C^\infty)'$ тоді і тільки тоді, коли він належить до певного вагового L_1-простору. З результатів [2 – 9] випливає, зокрема, розв'язність задачі

$$\Delta u = |u|^q, \quad x \in \Omega, \qquad u\,|_{\partial\Omega} = g$$

у ваговому L_1-просторі (з вагою — степенем s відстані до межі області) при довільній узагальненій функції $g \in (C^\infty)'$ та $q \in (0, q_0)$, де $q_0 \in (0,1)$, q_0 та s залежать від порядку сингулярності узагальненої функції g. У статтях [10 – 14] встановлено однозначну розв'язність задачі Діріхле для рівняння $\Delta u = |u|^{q-1}u$ при довільній функції g із простору обмежених мір Бореля на $\partial\Omega$ та $1 < q < q_c = \dfrac{n+1}{n-1}$, а також той факт, що при $q \geq q_c$ узагальнені крайові значення міри можуть не існувати. У роботі [6] досліджувався характер степеневих особливостей розв'язків таких крайових задач на межі області, а у статті [7] – характер точкових степеневих особливостей розв'язків у випадку напівлінійних крайових умов.

У даній статті будемо досліджувати розв'язність лінійної нормальної крайової задачі для напівлінійного еліптичного рівняння порядку $2m$ в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, у вагових C-просторах (підпросторах певного вагового L_1-простору) при заданих на межі області узагальнених функціях із сильними степеневими точковими особливостями та скінченними порядками сингулярностей на всій межі. Встановимо, в якому сенсі слід трактувати розв'язок. Для доведення розв'язності будемо використовувати метод зведення такої узагальненої крайової задачі до інтегрального рівняння у ваговому функціональному просторі.

1. Основні позначення, функціональні простори, формулювання задачі та допоміжні факти. *1.1.* Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею S із класу C^∞, $A(x,D) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$, $a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$, — еліптичний диференціальний вираз, на S задано крайові диференціальні вирази

$$B_j(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m_j} b_{j\alpha}(x)D^\alpha, \qquad b_{j\alpha}\in C^\infty(S), \quad j=\overline{1,m},$$

система $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ є нормальною і задовольняє умову Лопатинського щодо $A(x,D)$. Нехай $T_j, \hat{B}_j, \hat{T}_j$ — крайові диференціальні вирази порядків $\hat{m}_j, 2m-\hat{m}_j-1, 2m-m_j-1$, $j=\overline{1,m}$, відповідно (див., наприклад, [15]), такі, що правильною є формула Гріна

$$\int\limits_\Omega (vAu - uA^*v)dx = \sum_{j=1}^m \int\limits_S (\hat{T}_j v B_j u - \hat{B}_j v T_j u)dS, \quad u,\, v\in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{1}$$

Нехай $\varepsilon_0 \in (0,1)$ і таке, що при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ паралельні до поверхні S поверхні $S_\varepsilon = \big\{x_\varepsilon = x+\varepsilon\nu(x)\colon x\in S\big\}$ також є нескінченно диференційовними. Тут $\nu(x)$ — орт внутрішньої нормалі до поверхні S у точці $x\in S$.

Для довільної фіксованої точки $\hat{x}\in S$ позначимо через $\varrho(x,\hat{x})$ $(x\in\overline{\Omega})$ нескінченно диференційовну функцію, додатну в $\overline{\Omega}\setminus\{\hat{x}\}$, порядку $|x-\hat{x}|$ при $|x-\hat{x}|\to 0$, $\varrho(\hat{x},\hat{x})=0$, через $\varrho(x)$ — нескінченно диференційовну функцію, додатну в Ω, порядку відстані $d(x)$ від точки $x\in\Omega$ до S при $d(x)\to 0$. Також будемо вважати, що $\varrho(x)\le 1$, $\varrho(x,\hat{x})\le 1$, $x\in\overline{\Omega}$. Нехай $d_0\in\left(0,\dfrac{\varepsilon_0}{2}\right]$, d_1, d_2, $\hat{d}_1$, $\hat{d}_2$ — такі додатні сталі, що

$d_1 d(x)\le\varrho(x)\le d_2 d(x)$ при $d(x)\le d_0$ та $\hat{d}_1|x-\hat{x}|\le\varrho(x,\hat{x})\le\hat{d}_2|x-\hat{x}|$ при $|x-\hat{x}|\le d_0$,

$\Omega_0(d_0)=\{y\in\Omega\colon |y-\hat{x}|<d_0\}$, $\Omega_1(d_0)=\{y\in\Omega\colon d(y)<d_0$ та $|y-\hat{x}|>d_0\}$,

$\Omega^1(d_0)=\Omega_0(d_0)\cup\Omega_1(d_0)$, $\Omega_2(d_0)=\Omega\setminus\overline{\Omega^1(d_0)}$.

Для $\{s,k\}\subset\mathbb{R}_+$, $\{l_1,l\}\subset\mathbb{R}_-$, подібно до [3, c. 2], визначаємо такі функціональні простори:

$Z_k(\Omega)=\Big\{\varphi\in C^\infty(\Omega)\cap C^{[k]}(\overline{\Omega})\colon \varrho^{|\alpha|-k}D^\alpha\varphi\in C(\overline{\Omega})$ для всіх α, $|\alpha|>k$, та $\dfrac{D^\alpha\varphi}{\ln\varrho}\in C(\overline{\Omega})$, якщо $|\alpha|=k\in N\Big\}$, де $[k]$ — ціла частина k при k нецілому та $[k]=k-1$ при $k\in N$,

$Z_0(\Omega)=\Big\{\varphi\in C^\infty(\Omega)\colon \dfrac{\varphi}{\ln\varrho}\in C(\overline{\Omega})$ та $\varrho^{|\alpha|}D^\alpha\varphi\in C(\overline{\Omega})$ для всіх α, $|\alpha|\ne 0\Big\}$,

$Z_k(\overline{\Omega},\hat{x})=\Big\{\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\{\hat{x}\})\cap C^{[k]}(\overline{\Omega})\colon \varrho^{|\alpha|-k}(\cdot,\hat{x})D^\alpha\varphi\in C(\overline{\Omega})$ для всіх α, $|\alpha|>k$, та $\dfrac{D^\alpha\varphi}{\ln\varrho(\cdot,\hat{x})}\in C(\overline{\Omega})$, якщо $|\alpha|=k\in N\Big\}$, $k>0$,

$Z_k(S,\hat{x})=\Big\{\varphi\in C^\infty(S\setminus\{\hat{x}\})\cap C^{[k]}(S)\colon \varrho^{|\alpha|-k}(\cdot,\hat{x})D^\alpha\varphi\in C(S)$ для всіх α, $|\alpha|>k$, та $\dfrac{D^\alpha\varphi}{\ln\varrho(\cdot,\hat{x})}\in C(S)$, якщо $|\alpha|=k\in N\Big\}$, $k>0$,

$\tilde{Z}_k(\Omega) = \Big\{\varphi \in C^\infty(\Omega)\colon \varrho^{|\alpha|-k} D^\alpha \varphi \in C(\overline{\Omega})\ \forall \alpha, |\alpha| \neq k$, та $\dfrac{D^\alpha \varphi}{\ln \varrho} \in C(\overline{\Omega})$, якщо $|\alpha| = k \in N \cup \{0\}\Big\}$, $\tilde{Z}_0(\Omega) = Z_0(\Omega)$,

$\tilde{Z}_k(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \Big\{\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{\hat{x}\})\colon \varrho^{|\alpha|-k}(\cdot, \hat{x}) D^\alpha \varphi \in C(\overline{\Omega})$ для всіх $|\alpha| \neq k$ та $\dfrac{D^\alpha \varphi}{\ln \varrho(\cdot, \hat{x})} \in C(\overline{\Omega})$, якщо $|\alpha| = k \in N \cup \{0\}\Big\}$,

$\tilde{Z}_k(S, \hat{x}) = \Big\{\varphi \in C^\infty(S \setminus \{\hat{x}\})\colon \varrho^{|\alpha|-k}(\cdot, \hat{x}) D^\alpha \varphi \in C(S)$ для всіх $|\alpha| \neq k$ та $\dfrac{D^\alpha \varphi}{\ln \varrho(\cdot, \hat{x})} \in C(S)$, якщо $|\alpha| = k \in N \cup \{0\}\Big\}$,

$Z_0(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \tilde{Z}_0(\overline{\Omega}, \hat{x})$, $Z_0(S, \hat{x}) = \tilde{Z}_0(S, \hat{x})$,

$\tilde{Z}_{k,s}(\Omega, \hat{x}) = \Big\{\varphi \in C^\infty(\Omega)\colon \varphi(x) = \varrho^s(x) \varphi(x, \hat{x}),\ \varphi(\cdot, \hat{x}) \in \tilde{Z}_{k-s}(\overline{\Omega}, \hat{x})\Big\}$, $k > s$,

$X_s(\overline{\Omega}) = \Big\{\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})\colon A^*\psi = O(d^s(x))$ при $d(x) \to 0$, $\hat{B}_j \psi = 0, j = \overline{1, m}\Big\}$,

$\tilde{X}_k(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \Big\{\psi \in \tilde{Z}_{k+2m}(\overline{\Omega}, \hat{x})\colon A^*\psi(x) = O(|x - \hat{x}|^k)$ при $|x - \hat{x}| \to 0$, $\hat{T}_j \psi \in Z_{k+m_j+1}(S, \hat{x})$, $\hat{B}_j \psi = 0$, $j = \overline{1, m}\Big\}$,

$\tilde{X}_{k,s}(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \Big\{\varphi \in \tilde{X}_k(\overline{\Omega}, \hat{x})\colon A^*\varphi(x) = O(d^s(x)|x - \hat{x}|^{k-s})$ при $d(x) \to 0\Big\}$ (згідно з [3, с. 2] простори $X_s(\overline{\Omega})$, $\tilde{X}_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$, $\tilde{X}_{k,s}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ непорожні),

$M_s(\Omega) = \Big\{v \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)\colon \|v\|_s = \displaystyle\int_\Omega \varrho^s(x)|v(x)|dx < +\infty\Big\}$,

$M_k(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \Big\{v\colon \displaystyle\int_\Omega \varrho^k(x, \hat{x})|v(x)|dx < +\infty\Big\}$,

$\tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x}) = \Big\{v\colon \|v\|_{k,s} = \displaystyle\int_\Omega \varrho^s(x)\varrho^{k-s}(x, \hat{x})|v(x)|dx < +\infty\Big\}$,

$C_l(\Omega) = \Big\{v \in C(\Omega)\colon \varrho^{-l}(\cdot)v \in C\big(\overline{\Omega}\big)\Big\}$, $\|v\|'_{C_l(\Omega)} = \|v\|'_l = \sup\limits_{x \in \Omega} \varrho^{-l}(x)|v(x)|$,

$C_l(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \Big\{v \in C\big(\overline{\Omega} \setminus \{\hat{x}\}\big)\colon \varrho^{-l}(\cdot, \hat{x})v \in C(\overline{\Omega})\Big\}$,

$$\|v\|'_{C_l(\overline{\Omega}, \hat{x})} = \sup_{x \in \overline{\Omega} \setminus \{\hat{x}\}} \varrho^{-l}(x, \hat{x})|v(x)|,$$

$C_{ll_1}(\Omega, \hat{x}) = \Big\{v \in C(\Omega)\colon \varrho^{-l_1}(\cdot)\varrho^{-(l-l_1)}(\cdot, \hat{x})v \in C(\overline{\Omega})\Big\}$,

$$\|v\|_{C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})} = \|v\|'_{l,l_1} = \sup_{x \in \Omega} \varrho^{-l_1}(x)\varrho^{l-l_1}(x, \hat{x})\big|v(x)\big|.$$

Як і в [3, с. 2], кажемо, що послідовність $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ у просторі $Z_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$ (відповідно $Z_k(S, \hat{x})$), якщо для довільного мультиіндексу α рівномірно у $\overline{\Omega}$ (S) збігається до нуля послідовність $\varrho^{|\alpha|-k}(\cdot, \hat{x})D^\alpha \varphi_\nu$ при $|\alpha| > k$, послідовність $D^\alpha \varphi_\nu$ при $|\alpha| \leq [k]$ і послідовність $\dfrac{D^\alpha \varphi_\nu}{\ln \varrho(\cdot, \hat{x})}$ при $|\alpha| = k \in N$. Аналогічно визначаємо топологію в інших просторах.

Зауважимо, що $Z_{k_1}(\overline{\Omega}, \hat{x}) \subset Z_{k_2}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ при $k_1 \geq k_2$, $M_{k_1}(\overline{\Omega}, \hat{x}) \subset M_{k_2}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ при $k_1 \leq k_2$, $\tilde{M}_{k_1,s}(\Omega, \hat{x}) \subset \tilde{M}_{k_2,s}(\Omega, \hat{x})$ при $s < k_1 \leq k_2$.

Оскільки $\varrho^{-k}\varphi \in C(\overline{\Omega})$ при $\varphi \in \tilde{Z}_k(\Omega)$, $k > 0$, то при довільних $\varphi \in \tilde{Z}_k(\Omega)$ та $v \in M_k(\Omega)$ існує і є скінченним $\displaystyle\int_\Omega \varphi v dx = \int_\Omega \varrho^{-k}\varphi \varrho^k v dx$. При $\varphi \in \tilde{Z}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$,

$k > s$, маємо $\varrho^{-s}(\cdot)\varrho^{s-k}(\cdot,\hat{x})\varphi \in C(\overline{\Omega})$, тому при довільних $\varphi \in \tilde{Z}_{k,s}(\Omega,\hat{x})$ та $v \in \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega,\hat{x})$ існує і є скінченним $\int_\Omega \varphi v dx = \int_\Omega \varrho^{-s}(x)\varrho^{s-k}(x,\hat{x})\varphi(x)\varrho^{s}(x)\varrho^{k-s}(x,\hat{x})v(x)dx$. Звідси $M_k(\Omega)$ (та відповідно $\tilde{M}_{k,s}(\Omega,\hat{x})$) є прикладами просторів регулярних узагальнених функцій на просторах $\tilde{Z}_k(\Omega)$ (відповідно $\tilde{Z}_{k,s}(\overline{\Omega},\hat{x})$).

Зауважимо, що $C_{l_1}(\Omega) \subset M_s(\Omega)$, $C_{ll_1}(\Omega,\hat{x}) \subset \tilde{M}_{k,s}(\Omega,\hat{x}) \subset M_k(\overline{\Omega},\hat{x})$ при $s + l_1 > -1$ та $k + l > -n$. Справді,

$$\|v\|_{k,s} = \int\limits_\Omega \varrho^{s}(x)\varrho^{k-s}(x,\hat{x})|v(x)|dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \varrho^{s+l_1}(x)\varrho^{k-s+l-l_1}(x,\hat{x})\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-(l-l_1)}(x,\hat{x})|v(x)|dx \leq$$

$$\leq \|v\|'_{l,l_1}\int\limits_\Omega \varrho^{s+l_1}(x)\varrho^{k-s+l-l_1}(x,\hat{x})dx = C'\|v\|'_{l,l_1}.$$

Будемо використовувати позначення:

$\Omega_{(0)} = \Omega$, $\Omega_{(j)} = S$ при $j = \overline{1,m}$, $m_0 = 2m$, $(0) = 0$, $(j) = 1$ при $j = \overline{1,m}$,

$D(S) = C^\infty(S)$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$,

Φ' — простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на просторі основних функцій Φ,

(φ, F) — значення узагальненої функції $F \in \Phi'(\overline{\Omega})$ на основній функції $\varphi \in \in \Phi(\overline{\Omega})$,

$\langle\varphi, F\rangle$ — значення $F \in \Phi'(S)$ на основній функції $\varphi \in \Phi(S)$,

$s(F) \leq s$ — порядок сингулярності узагальненої функції $F \in \Phi'(S)$ не вищий за s, тобто [16, 17] при $s \in N \cup \{0\}$

$$\langle\varphi, F\rangle = \int\limits_S \sum_{|\alpha|\leq s} D^\alpha\varphi f_\alpha dS \quad \forall\varphi \in \Phi(S), \tag{2}$$

де $f_\alpha \in L_1(S)$ для всіх $|\alpha| \leq s$, $s(F) \leq s$ при $s < 0$, якщо $D^\alpha F \in L_1(\Omega)$ для всіх $|\alpha| \leq -s$. Так само визначаємо $s(F)$ для $F \in \Phi'(\overline{\Omega})$.

Якщо $F \in D'(S)$ та $s(F) \leq s \in N$, то $F \in (C^s(S))'$ [16]. Тоді, враховуючи вкладення $Z_k(S,\hat{x}) \subset C^s(S)$ при $k > s$, одержуємо $F \in (C^s(S))' \subset Z'_k(S,\hat{x})$ при довільній $\hat{x} \in S$, (2) виконується для довільної $\varphi \in C^s(S)$ (а отже, і для $\varphi \in Z_k(S,\hat{x})$). Простору $Z'_k(\overline{\Omega},\hat{x})$ також належать узагальнені функції $F \in D'(\overline{\Omega})$ порядків сингулярностей $s(F) < k$.

При $F_0 \in Z'_{p_0}(\overline{\Omega},\hat{x})$, $0 \leq s(F_0) \leq s_0 < p_0$, $F_j \in Z'_{p_j}(S,\hat{x})$, $p_j > 0$, $s(F_j) \leq \leq s_j < p_j$, $j = \overline{1,m}$, обмеженій за змінною $x \in \Omega$ та неперервній за змінною $z \in \mathbb{R}$ функції $f_0(x,z)$ розглядаємо крайову задачу

$$A(x,D)u(x) = F_0(x) + f_0(x,u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$B_j(x,D)u(x) = F_j(x), \quad x \in S, \quad j = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Позначаємо $p' = \max\limits_{1\leq j\leq m}(p_j - m_j)$, $s' = \max\limits_{1\leq j\leq m}(\max\{s_j, 0\} - m_j)$.

Зауважимо, що $p' > 1 - 2m$, $s' \geq 1 - 2m$ при $0 \leq s_j < p_j$, $1 \leq j \leq m$.

Припущення A. Відповідна задачі (3), (4) лінійна однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок.

Припущення $\mathbf{A_1}$. Вважаємо

$$s' \geq 2-n, \quad s > s'+n-2, \quad k \geq k_0 = \max\{p'-1, p_0-2m\} \quad \text{та} \;\; k > s,$$

$$\int\limits_\Omega \big|f_0(x, v(x)\big|dx < +\infty \quad \forall v \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x}). \tag{5}$$

Означення. *Розв'язком задачі* (3), (4) *у просторі* $\tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$ *називають таку функцію* $u \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$, *що для довільної* $\psi \in \tilde{X}_{k,s}(\overline{\Omega}, \hat{x})$

$$\int\limits_\Omega A^*\psi u dx = \int\limits_\Omega \psi f_0(\cdot, u)dx + (\psi, F_0) + \sum_{j=1}^m \langle \hat{T}_j\psi, F_j\rangle. \tag{6}$$

Зауважимо, що при $\psi \in \tilde{X}_{k,s}(\overline{\Omega}, \hat{x}) \subset Z_{k+2m}(\overline{\Omega}, \hat{x})$, $F_0 \in Z'_{p_0}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ та $k \geq p_0 - 2m$ визначено (ψ, F_0), при $k \geq p'-1$ маємо $\hat{T}_j\psi \in Z_{k+m_j+1}(S, \hat{x}) \subset Z_{p_j}(S, \hat{x})$, тому для довільних $F_j \in Z'_{p_j}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ визначено $\sum_{j=1}^m \langle \hat{T}_j\psi, F_j\rangle$, із (5) для $u \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$ та $k+2m \geq p_0 > 0$ одержуємо існування $\int_\Omega \psi f_0(\cdot, u)dx$.

1.2. Нехай $G(x,y) = (G_0(x,y), G_1(x,y), \ldots, G_m(x,y))$ — вектор-функція Гріна [18, 19] відповідної для (3), (4) лінійної крайової задачі. У статтях [18, 19] встановлено, що за припущення A функцію $G_0(x,y)$ визначено однозначно, $G_j(x,y) = \hat{T}_j(y, D)G_j(x,y)$, $j = \overline{1,m}$, для довільних мультиіндексів α, γ при $x \neq y$ справджуються оцінки

$$\big|D_x^\alpha D_y^\gamma G_j(x,y)\big| \leq C_{j,\alpha,\gamma}\Big(|x-y|^{m_j+(j)-n-|\alpha|-|\gamma|} + \kappa_{m_j-|\alpha|-|\gamma|}|\ln|x-y|| + 1\Big), \tag{7}$$

де $C_{j,\alpha,\gamma} = \mathrm{const} > 0$, $\kappa_s \neq 0$ тільки при $s = 0$, $\kappa_0 = 1$, а у роботах [3, 6] для $|\alpha| < m_j + (j)$, $k > t > -1$ та довільного мультиіндексу γ одержано оцінки

$$|D_y^\gamma \int\limits_\Omega D_x^\alpha G_j(x,y)\varrho^t(x)\varrho^{k-t}(x,\hat{x})dx| \leq$$

$$\leq C'_{jk\alpha\gamma}\big(\varrho^{k+m_j+(j)-|\alpha|-|\gamma|}(y, \hat{x}) + 1\big), \quad y \in \overline{\Omega}, \quad \hat{x} \in S, \tag{8}$$

$$\int\limits_\Omega \big|D_x^\alpha G_j(x,y)\big|\varrho^t(x)\varrho^{k-t}(x,\hat{x})dx \leq$$

$$\leq C''_{jk\alpha}(\varrho^{k+m_j+(j)-|\alpha|}(y, \hat{x}) + 1), \quad y \in \overline{\Omega}, \quad \hat{x} \in S. \tag{9}$$

Сталі $C'_{jk\alpha\gamma}, C''_{jk\alpha}$ залежать від сталих $C_{j,\alpha,\gamma}$ з оцінок (7). Вважаємо далі $C_{j,\alpha,\gamma} = C_j$, $C'_{jk\alpha\gamma} = C'_{jk}$, $C''_{jk\alpha} = C''_{jk}$ для $|\alpha| = 0$, $|\gamma| = 0$, $j = \overline{0,m}$.

З оцінок (8) видно, що для кожної $\varphi \in \tilde{Z}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$ функція $\psi = \int_\Omega \varphi(x)G_0(x, \cdot)dx \in Z_{k+2m}(\overline{\Omega}, \hat{x})$, при цьому $A^*\psi = \varphi$. Тому при $k \geq p_0 - 2m$, всіх $s < k$ і $F_0 \in Z'_{p_0}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ $(\subset Z'_{k+2m}(\overline{\Omega}, \hat{x}))$ на $\tilde{Z}_{k,s}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ визначено функціонал $\tilde{F}_0$:

$$(\varphi, \tilde{F}_0) = \left(\int\limits_{\Omega} \varphi(x) G_0(x,y) dx, F_0(y) \right), \quad \varphi \in \tilde{Z}_{k,s}(\Omega, \hat{x}).$$

Лема 1. *Якщо* $F_0 \in Z'_{p_0}(\overline{\Omega}, \hat{x})$, $p_0 > 0$, $0 \le s(F_0) \le s_0 < p_0$, *то для довільних* $k \ge p_0 - 2m$ *та* $k > s \in \mathbb{R}_+$ $\tilde{F}_0 \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$ $(\subset \tilde{Z}'_{k,s}(\Omega, \hat{x}))$, *а при додатковій умові* $F_0 \in C(\Omega)$ *маємо* $\tilde{F}_0 \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x}) \cap C^{2m-1}(\Omega)$.

Доведення. З означень та оцінок (8) одержуємо скінченність

$$(\varphi, \tilde{F}_0) = \sum_{|\alpha| \le s_0} \int\limits_{\Omega} \left(D^\alpha \int\limits_{\Omega} \varphi(x) G_0(x,y) dx \right) F_{0\alpha}(y) dy, \quad \varphi \in \tilde{Z}_{k,s}(\Omega, \hat{x}),$$

де $F_{0\alpha} \in L_1(\Omega)$, $|\alpha| \le s_0$.

Лінійність і неперервність функціонала $\tilde{F}_0$ на $\tilde{Z}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$ випливає з оцінок (9). З оцінок (9) випливає, зокрема, скінченність

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^s(x) \varrho^{k-s}(x, \hat{x}) \tilde{F}_0(x) dx =$$

$$= \sum_{|\alpha| \le s_0} \int\limits_{\Omega} \left(D^\alpha \int\limits_{\Omega} \varrho^s(x) \varrho^{k-s}(x, \hat{x}) G_0(x,y) dx \right) F_{0\alpha}(y) dy,$$

а отже, $\tilde{F}_0 \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$ для всіх $k > s \ge 0$.

При $F_0 \in C(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $(\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega_0 \subset \Omega'_0 \subset \Omega)$, $|\alpha| \le 2m - 1$ маємо

$$(\varphi, D^\alpha \tilde{F}_0) = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega'_0} \left(\int\limits_{\Omega_0} (D^\alpha \varphi)(x) G_0(x,y) dx \right) F_0(y) dy =$$

$$= \left(\varphi, D^\alpha \int\limits_{\Omega'_0} G_0(\cdot, y) F_0(y) dy \right),$$

тому за лемою Дюбуа-Реймона [16] $D^\alpha \tilde{F}_0 = D^\alpha \int_{\Omega} G_0(\cdot, y) F_0(y) dy \in C(\Omega)$ при $|\alpha| \le 2m - 1$.

Введемо позначення

$$g(x) = \sum_{j=1}^m g_j(x) = \sum_{j=1}^m \big\langle G_j(x,y), F_j(y) \big\rangle, \quad x \in \Omega.$$

Лема 2. *Якщо* $F_j \in Z'_{p_j}(S, \hat{x})$, $p_j > 0$, $s(F_j) \le s_j < p_j$, $j = \overline{1,m}$, $k > s > n - 2 + s'$ *та* $k \ge p' - 1$, *то* $g \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x}) \cap C^\infty(\Omega)$.

При $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \le s_j$, $j = \overline{1,m}$, $s > n-2+s'$ *також* $g \in M_s(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

Доведення. У випадку $F_j \in D'(S)$, $j = \overline{1,m}$, за теоремою про структуру узагальненої функції [16, 17]

$$\int\limits_{\Omega} \varrho^s(x) g_j(x) dx = \sum_{|\alpha| \le s_j} \int\limits_{\Omega} \varrho^s(x) \left(\int\limits_{S} D_y^\alpha G_j(x,y) f_{j\alpha}(y) dS \right) dx,$$

де $f_{j\alpha} \in L_1(S)$, $|\alpha| \le \max\{s_j, 0\}$. Використовуючи оцінки (7) та враховуючи, що $|x-y| \ge d(x)$ для $x \in \Omega$, $y \in S$, при $s > s' + n - 2$ одержуємо

$$\|g\|_s \le \sum_{j=1}^m \tilde{C}_j \int\limits_{\Omega} \left[\varrho^s(x) + \varrho^{s+m_j+1-n-|\alpha|}(x) \right] dx < +\infty.$$

У випадку $F_j \in Z'_k(S, \hat{x})$, $j = \overline{1,m}$,

$$\|g\|_{k,s} \le \int\limits_{\Omega_0(d_0)} \varrho^k(x,\hat{x}) |g(x)| dx + \int\limits_{\Omega_1(d_0)} \varrho^s(x) |g(x)| dx + \int\limits_{\Omega_2(d_0)} |g(x)| dx.$$

Скінченність першого доданка при $k \ge p' - 1$ доводиться, як і у [3, с. 88; 5], другий доданок є скінченним при $s > s' + n - 2$ (за доведеним вище), третій доданок є скінченним за неперервністю функції g всередині Ω.

Із властивостей вектор-функції Гріна (нескінченної диференційовності всіх її компонент при $x \ne y$) одержуємо $g \in C^\infty(\Omega)$.

Зауважимо також, що $s' + n - 2 \ge n - 2m - 1$ при $s_j \ge 0$, $j = \overline{1,m}$.

Аналогічно до [8], враховуючи формули

$$\int\limits_{\Omega} (A^*\psi)(x) G_0(x,y) dx = \psi(y), \quad y \in \overline{\Omega}, \quad \psi \in \tilde{X}_{k,s}(\overline{\Omega}, \hat{x}),$$

$$\int\limits_{\Omega} (A^*\psi)(x) G_j(x,y) dx = (\hat{T}_j \psi)(y), \quad y \in S, \quad \psi \in \tilde{X}_{k,s}(\overline{\Omega}, \hat{x}), \quad j = \overline{1,m},$$

і те, що $\int_{\Omega} \varrho^s(x) \varrho^{k-s}(x,\hat{x}) G_j(x,\cdot) dx \in Z_{k+m_j+(j)}(\Omega_{(j)}, \hat{x})$, $j = \overline{0,m}$ [3, с. 70], доводимо наступну теорему.

Теорема 1. *Функція $u \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$ є розв'язком задачі* (3), (4) *тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком у просторі $\tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$ інтегрального рівняння*

$$u(x) = \tilde{F}_0(x) + g(x) + \int\limits_{\Omega} G_0(x,y) f_0(y, u(y)) dy, \quad x \in \Omega. \tag{10}$$

2. Розв'язок задачі. Розглянемо задачу (3), (4) у випадку, коли

$$f_0(x,z) = \mu(x) |z|^{q_0}, \quad x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}, \quad \mu \in L_\infty(\Omega), \quad q_0 \in (0;1). \tag{11}$$

На підставі теореми 1 достатньо довести розв'язність інтегрального рівняння (10) у просторі $\tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$.

Припущення Б. $0 < q_0 < 1$ $\left(\text{також } 0 < q_0 < \dfrac{1}{n-2m} \text{ у випадку } 2m < n \text{ та } s_j \ge 0 \text{ для всіх } j = \overline{1,m} \right)$,

$$0 < p_0 < \frac{n}{q_0} + 2m - n, \quad 1 - 2m < p' < \frac{n}{q_0} + 1 - n, \quad 2 - n < s' < \frac{1}{q_0} + 1 - n.$$

Як і у [5], доводимо наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай* $F_0 \in Z'_{p_0}(\Omega, \hat{x})$, $0 \le s(F_0) \le s_0 < p_0$, $F_j \in Z'_{p_j}(S, \hat{x})$, $s(F_j) \le s_j < p_j$, $j = \overline{1, m}$, f_0 *має вигляд* (11), *виконуються припущення* А, Б,

$$\max\{p' - 1, p_0 - 2m\} = k_0 \le k < k_1 = \frac{n}{q_0} - n,$$

$$n - 2 + s' < s < \min\left\{\frac{1}{q_0} - 1, k\right\}.$$

Тоді задача (3), (4) *має розв'язок* $u \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$. *Якщо, крім того,* $F_0 \in C(\Omega)$, $\mu \in C(\Omega)$, *а у випадку* $2m < n$ *також* $q_0 < \dfrac{2m}{n}$, *то* $u \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x}) \cap C^{2m-1}(\Omega)$.

Одержаний результат можна сформулювати по-іншому: якщо $F_0 \in Z'_{p_0}(\Omega, \hat{x})$, $p_0 > 0$, $s(F_0) \le s_0 < p_0$, $F_j \in Z'_{p_j}(S, \hat{x})$, $s(F_j) \le s_j < p_j$, $j = \overline{1, m}$, $k \ge k_0$, $n - 2 + s' < s < k$, $0 < q_0 < \min\left\{\dfrac{n}{n+k}, \dfrac{1}{s+1}\right\} = q^*$, то задача (3), (4) має розв'язок $u \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x})$; при $F_0 \in Z'_{p_0}(\Omega, \hat{x}) \cap C(\Omega)$, $\mu \in L_\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$ та за умови $q_0 < \min\left\{q^*, \dfrac{2m}{n}\right\}$ (якщо $2m < n$) $u \in \tilde{M}_{k,s}(\Omega, \hat{x}) \cap C^{2m-1}(\Omega)$. Зауважимо, що $q^* \le \min\left\{\dfrac{n}{p' + n - 1}, \dfrac{1}{s' + n - 1}, \dfrac{n}{p_0 + n - 2m}\right\}$ при $2m < n$.

У випадку $k = -l - n + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $s = -l_1$ з умов щодо k, s у припущенні А$_1$ маємо $l_1 < 2 - n - s'$, $l \le 2m - n - p_0$ (оскільки $k \ge p_0 - 2m$), $l \le -(p' + n - 1)$ ($k \ge p' - 1$), $0 \le -l_1 \le -l - n$ ($0 < s < k$), звідки $l \le l_1 - n \le -n$. Тому припущення А$_1$ набирає наступного вигляду.

Припущення А$_2$. $l_1 \le 1 - n - s'$,

$$l \le \min\{2m - n - p_0, 1 - n - p', l_1 - n\} = -n + \min\{2m - p_0, 1 - p', l_1\}.$$

За припущення А$_2$ для довільних $\psi \in \tilde{X}_{-l-n+\varepsilon, -l_1}(\overline{\Omega}, \hat{x})$, $F_0 \in Z'_{p_0}(\overline{\Omega}, \hat{x})$, $F_j \in$ $\in Z'_{p_j}(\overline{\Omega}, \hat{x})$ визначено $(\psi, \tilde{F}_0)$ та $\sum_{j=1}^{m} \langle \hat{T}_j \psi, F_j \rangle$, з лем 1, 2 — $\tilde{F}_0, g \in$ $\in \tilde{M}_{-l-n+\varepsilon, -l_1}(\Omega, \hat{x})$.

Розглядатимемо далі інтегральне рівняння (10) у просторі $C_{ll_1}(\Omega, \hat{x}) \subset$ $\subset \tilde{M}_{-l-n+\varepsilon, -l_1}(\Omega, \hat{x})$ за додаткових умов $\tilde{F}_0$, $g_0 \in C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$ та f_0 вигляду (11). Із розв'язності (10) у просторі $C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$ випливає розв'язність його і задачі (3), (4) у просторі $\tilde{M}_{-l-n+\varepsilon, -l_1}(\Omega, \hat{x})$.

Використовуватимемо позначення:

$g_0 = \tilde{F}_0 + g$, $C_{1ll_1} = \|g_0\|'_{ll_1}$,

$\tilde{G}_{ll_1}(x, y, \hat{x}) = \varrho^{-l_1}(x) \varrho^{-l_2}(x, \hat{x}) G_0(x, y) \varrho^{l_1 q_0}(y) \varrho^{l_2 q_0}(y, \hat{x})$, $x, y \in \Omega$, де $l_2 =$ $= l - l_1$,

$R_0 = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \displaystyle\int_\Omega |G_0(x, y)| dy$, $j = \overline{0, m}$.

Лема 3. *За припущень*

$$0 < q_0 < \frac{1}{n - 2m},$$

$$-\frac{2m}{q_0} + \max\left\{0, \frac{(n-1)q_0 - 1}{q_0^2}\right\} < l < -\frac{n - 2m - 1}{1 - q_0},$$

$$-\frac{1}{q_0} < l_1 < lq_0 + 2m + 1 - n$$

у випадку $2m < n$,

$$0 < q_0 < 1, \quad -\min\left\{\frac{n}{q_0}, \frac{1}{q_0^2}\right\} < l < 0, \quad -\frac{1}{q_0} < l_1 < lq_0$$

у випадку $2m \geq n$ *існує така додатна стала* $\hat{C}$, *що*

$$\sup_{x\in\Omega} \int\limits_{\Omega} \left|\tilde{G}_{ll_1}(x, y, \hat{x})\right| dy \leq \hat{C},$$

для довільного $\varepsilon > 0$ *існує таке* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *що для довільної області* $\omega \subset \overline{\Omega}$, *міра якої* $m(\omega) \leq \delta$, *виконується*

$$I = \sup_{x\in\Omega} \int\limits_{\omega} \left|\tilde{G}_{ll_1}(x, y, \hat{x})\right| dy \leq \varepsilon.$$

Доведення. Нехай $2m < n$, $J_{ll_1}(x) = \int_{\Omega} |G_0(x, y)| \varrho^{l_1 q_0}(y) \varrho^{l_2 q_0}(y, \hat{x}) dy$.

При $x \in \Omega_0(d_0)$ розіб'ємо Ω на частини:

$$\Omega_0^1 = \Omega_0^1(x) = \left\{y \in \Omega \colon |y - \hat{x}| < \frac{1}{2}|x - \hat{x}|\right\}$$

$$\left(|y - x| \geq |x - \hat{x}| - |y - \hat{x}| > \frac{1}{2}|x - \hat{x}| \quad \text{при} \;\; y \in \Omega_0^1\right),$$

$$\Omega_0^2 = \Omega_0^2(x) = \left\{y \in \Omega \colon |y - x| < \frac{1}{2}|x - \hat{x}|\right\}$$

$$\left(|y - \hat{x}| \geq |x - \hat{x}| - |y - x| > \frac{1}{2}|x - \hat{x}| \quad \text{при} \;\; y \in \Omega_0^2\right),$$

$$\Omega_0^3 = \Omega_0^3(x) = \Omega \setminus (\overline{\Omega_0^1 \cup \Omega_0^2}).$$

Нехай

$$J_{ll_1}(x) = \sum_{i=1}^{3} J_{ll_1}^{0i}(x) = \sum_{i=1}^{3} \int\limits_{\Omega_0^i} \left|G_0(x, y)\right| \varrho^{l_1 q_0}(y) \varrho^{l_2 q_0}(y, \hat{x}) dy.$$

Маємо $J_{ll_1}^{01}(x) \leq \tilde{C}_1 |x - \hat{x}|^{2m-n} \int_{\Omega_0^1} d^{l_1 q_0}(y) |y - \hat{x}|^{l_2 q_0} dy$, а переходячи в інтегралі до розпрямляючої системи координат із центром у точці $\hat{x}$, на підставі формули (3) із [20, с. 588] при $lq_0 > -n$ одержуємо $J_{ll_1}^{01}(x) \leq C_1 |x - \hat{x}|^{2m-n} |x - \hat{x}|^{lq_0 + n} = C_1 |x - \hat{x}|^{2m + lq_0}$.

При $l_1 q_0 > -1$ аналогічно знаходимо

$$J_{ll_1}^{02}(x) \leq \tilde{C}_2 |x - \hat{x}|^{l_2 q_0} \int\limits_{\Omega_0^2} |G_0(x, y)| d^{l_1 q_0}(y) dy \leq C_2 |x - \hat{x}|^{lq_0 + 2m - n + 1}.$$

Тут і далі $\tilde{C}_i$, C_i, $\tilde{C}'_i$, C'_i, $i = 1,2,3$, $\tilde{C}''_i$, C''_i, $i = 1,2$, $\hat{C}_j$, $\hat{C}'_j$, $\hat{C}''_j$, $\overline{C}_j$, $\overline{C}'_j$, $\overline{C}''_j$, $j = 0,1,2,$ — певні додатні сталі.

При $y \in \Omega_0^3$ маємо $|y-\hat{x}| > \dfrac{1}{2}|x-\hat{x}|$, $|y-x| > \dfrac{1}{2}|x-\hat{x}|$, $\dfrac{1}{2}|x-\hat{x}| < d(y) < |y-\hat{x}|$ або $d(y) < \dfrac{1}{2}|x-\hat{x}|$, тому

$$J_{ll_1}^{03}(x) \le \tilde{C}_3\Bigg[|x-\hat{x}|^{lq_0}\int\limits_{\Omega_0^3}|G_0(x,y)|dy+$$

$$+|x-\hat{x}|^{l_2q_0+2m-n}\int\limits_0^{(|x-\hat{x}|)/2}\varrho^{l_1q_0}(y)dy\Bigg] \le$$

$$\le \frac{1}{2}C_3\Big[|x-\hat{x}|^{lq_0}+|x-\hat{x}|^{lq_0+2m-n+1}\Big] \le C_3|x-\hat{x}|^{lq_0+2m-n+1}.$$

Отже, при $-1 < l_1q_0 < 0$, $-n < lq_0 < 0$, $q_0 \in (0,1)$

$$\sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})J_{ll_1}(x) \le$$

$$\le \sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\Big[(C_1+C_2)|x-\hat{x}|^{2m-l(1-q_0)}+C_3|x-\hat{x}|^{-l(1-q_0)+2m-n+1}\Big],$$

звідки при $-\dfrac{n}{q_0} < l \le -\dfrac{n-2m-1}{1-q_0}$ та $q_0 < \dfrac{n}{2(n-m)-1}$ одержуємо

$$\sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})J_{ll_1}(x) \le \hat{C}_0 d_0^{-l(1-q_0)+2m-n+1} < +\infty.$$

При $x \in \Omega_1(d_0)$ розіб'ємо Ω на частини:

$\Omega_1^1 = \Omega_1^1(x) = \left\{y \in \Omega\colon d(y) < \dfrac{1}{2}d(x)\right\}$ $\Big(|y-x| \ge |x-y_0|-|y-y_0| = |x-y_0|-d(y) \ge d(x)-d(y) > \dfrac{1}{2}d(x)$ при $y \in \Omega_1^1\Big)$,

$\Omega_1^2 = \Omega_1^2(x) = \left\{y \in \Omega\colon |y-x| < \dfrac{1}{2}d(x)\right\}$ $\Big(d(y) = |y-y_0| \ge |x-y_0|-|y-x| > \dfrac{1}{2}d(x)$, а отже, $|y-\hat{x}| \ge d(y) > \dfrac{1}{2}d(x)$ при $y \in \Omega_2^1\Big)$,

$\Omega_1^3 = \Omega_1^3(x) = \Omega \setminus (\overline{\Omega_1^1 \cup \Omega_1^2})$ $\Big(|y-\hat{x}| \ge d(y) > \dfrac{1}{2}d(x)$, $|y-x| > \dfrac{1}{2}d(x)$ при $y \in \Omega_1^3\Big)$.

За позначення $J_{ll_1}^{1i}(x) = \displaystyle\int_{\Omega_1^i}|G_0(x,y)|\varrho^{l_1q_0}(y)\varrho^{l_2q_0}(y,\hat{x})dy$, $i = 1,2,3$, маємо

$$J_{ll_1}^{11}(x) \le$$

$$\le \tilde{C}'_1 d^{2m-n}(x)\Bigg[\int\limits_{\Omega_1^1\cap\{y\colon |y-\hat{x}|<\frac{1}{2}d(x)\}} d^{l_1q_0}(y)|y-\hat{x}|^{l_2q_0}dy + d^{l_2q_0}(x)\int\limits_0^{\frac{1}{2}d(x)}t^{l_1q_0}dt\Bigg] \le$$

$$\leq C_1'\big[d^{lq_0+2m}(x)+d^{2m-n+lq_0+1}(x)\big],$$

якщо $l_1q_0>-1$, $lq_0>-n$,

$$J^{12}_{ll_1}(x)\leq \tilde{C}_2' d^{lq_0}(x)\int\limits_{|y-x|<\frac{1}{2}d(x)}|y-x|^{2m-n}dy\leq C_2'd^{lq_0+2m}(x),$$

$$J^{13}_{ll_1}(x)\leq \tilde{C}_3' d^{lq_0}(x)\int\limits_{\Omega_1^3}\big|G_0(x,y)\big|dy\leq C_3'd^{lq_0}(x),$$

звідки

$$\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}\varrho^{-l_1}(x)J_{ll_1}(x)=\sum_{i=1}^{3}\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}\varrho^{-l_1}(x)J^{1i}_{ll_1}(x)\leq$$

$$\leq\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}[C_1'd^{2m-n-l_1+lq_0+1}(x)+(C_1'+C_2')d^{-l_1+lq_0+2m}(x)+C_3'd^{-l_1+lq_0}(x)]\leq$$

$$\leq \hat{C}_1 d_0^{-l_1+lq_0+2m-n+1}$$

$\Bigg($остання нерівність виконується при $-\dfrac{1}{q_0}<l_1\leq 2m-n+1+lq_0$, а отже, $\max\left\{-\dfrac{n}{q_0},-\dfrac{1}{q_0^2}+\dfrac{n-2m-1}{q_0}\right\}<l<-\dfrac{n-2m-1}{1-q_0}$ та $q_0<\dfrac{1}{n-2m}\leq$ $\leq\dfrac{n}{2(n-m)-1}\Bigg)$.

При $x\in\overline{\Omega_2(d_0)}$ розіб'ємо Ω на частини:

$$\Omega_2^1=\Omega_2^1(x)=\left\{y\in\Omega_2^1\colon |y-x|<\frac{1}{2}d_0\right\}$$

$$\Bigg(d(y)=|y-y_0|\geq|x-y_0|-|x-y|\geq d(x)-\frac{1}{2}d_0>d_0-\frac{1}{2}d_0=\frac{1}{2}d_0,$$

$$|y-\hat{x}|\geq|x-\hat{x}|-|y-x|>\frac{1}{2}d_0\quad\text{при}\quad y\in\Omega_2^1\Bigg),$$

$$\Omega_2^2=\Omega_2^2(x)=\Omega\setminus\overline{\Omega_2^1}.$$

Позначимо $J^{2i}_{ll_1}(x)=\int_{\Omega_2^i}|G_0(x,y)|\varrho^{l_1q_0}(y)\varrho^{l_2q_0}(y,\hat{x})dy$, $i=1,2$. Тоді

$$J^{21}_{ll_1}(x)\leq\tilde{C}_1''d_0^{lq_0}\int\limits_{\Omega_2^1}|y-x|^{2m-n}dy\leq C_1''d_0^{2m+lq_0},$$

$$J^{22}_{ll_1}(x)\leq\tilde{C}_2''d_0^{2m-n}\int\limits_{\Omega_2^2}\varrho^{l_1q_0}(y)\varrho^{l_2q_0}(y,\hat{x})dy\leq C_2''d_0^{2m-n}.$$

В результаті одержуємо існування додатної сталої $\hat{C}=\hat{C}(d_0)$ такої, що

$$\sup_{x\in\Omega}\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})J_{ll_1}(x)=$$

$$=\max\left\{\sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})J_{ll_1}(x),\right.$$

$$\left.\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}\varrho^{-l_1}(x)J_{ll_1}(x),\ \sup_{x\in\overline{\Omega_2(d_0)}}J_{ll_1}(x)\right\}\le\hat{C}.$$

У випадку $2m>n$, використовуючи обмеженість функції $G_0(x,y)$ в $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ та наведені вище міркування щодо збіжності інтегралів, при $lq_0>-n$ та $l_1q_0>-1$ маємо

$$\sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})J_{ll_1}(x)\le$$

$$\le\tilde{C}_1\sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})\int\limits_{\Omega}\varrho^{l_1q_0}(y)\varrho^{l_2q_0}(y,\hat{x})dy\le$$

$$\le C_1\sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\left[|x-\hat{x}|^{-l(1-q_0)+n}+|x-\hat{x}|^{-l(1-q_0)+1}+|x-\hat{x}|^{-l(1-q_0)}\right]\le$$

$$\le\overline{C}_0d_0^{-l(1-q_0)}\le\overline{C}_0,$$

$$\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}\varrho^{-l_1}(x)J_{ll_1}(x)\le\tilde{C}_2\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}\varrho^{-l_1}(x)\int\limits_{\Omega}\varrho^{l_1q_0}(y)\varrho^{l_2q_0}(y,\hat{x})dy\le$$

$$\le C_2\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}\left[d^{-l_1+lq_0+1}(x)+d^{-l_1+lq_0+n}(x)+d^{-l_1+lq_0}(x)\right]\le$$

$$\le\overline{C}_1d_0^{-l_1+lq_0}\le\overline{C}_1,$$

якщо $l_1\le lq_0$ $\left(\text{а тоді } l>-\min\left\{\dfrac{n}{q_0},\dfrac{1}{q_0^2}\right\}\right)$, $\sup\limits_{x\in\Omega_2(d_0)}J_{ll_1}(x)\le\overline{C}_2$, звідки $\sup\limits_{x\in\Omega}J_{ll_1}(x)\le\max\left\{\overline{C_0},\overline{C_1},\overline{C_2}\right\}\le\hat{C}$.

У випадку $2m=n$ одержуємо такий самий результат.

Доведемо друге твердження леми. За доведеним вище

$$I^{(1)}(d_0)=\sup_{x\in\overline{\Omega^1(d_0)}}\int\limits_{\omega}\left|\tilde{G}_{ll_1}(x,y,\hat{x})\right|dy\le ad_0^{l_*},$$

де $l_*=-l_1+lq_0+2m-n+1$ у випадку $2m<n$, $l_*=-l_1+lq_0$ у випадку $2m\ge n$ ($l_*>0$ за умов леми), a — додатна стала. За заданим $\varepsilon>0$, вибираючи $d_0<\left(\dfrac{\varepsilon}{a}\right)^{1/l_*}$, отримуємо $I^{(1)}(d_0)\le\varepsilon$.

При $x\in\overline{\Omega_2}(d_0)$, $\omega'=\omega\cap\Omega_2^1(x)$, $\omega''=\omega\setminus\overline{\omega'}$ із попередніх оцінок у випадку $2m<n$ одержуємо

$$I^{(2)}(d_0)=\sup_{x\in\overline{\Omega_2(d_0)}}\int\limits_{\omega}\left|\tilde{G}_{ll_1}(x,y,\hat{x})\right|dy=$$

$$= \sup_{x\in\Omega_2(d_0)} \left[\int\limits_{\omega'} \left|\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)\right| dy + \int\limits_{\omega''} \left|\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)\right| dy \right] \le$$

$$\le \tilde b \left[d_0^{lq_0} \int\limits_{\omega'} |x-y|^{2m-n} dy + d_0^{2m-n} \int\limits_{\omega''} \varrho^{l_1 q_0}(y) \varrho^{l_2 q_0}(y,\hat x) dy \right] \le$$

$$\le b\Big[d_0^{lq_0+2m} + d_0^{2m-n} t m(\omega) \Big],$$

де t — таке додатне число, що $\displaystyle\int\limits_{\omega''} \varrho^{l_1 q_0}(y)\varrho^{l_2 q_0}(y,\hat x) dy = tm(\omega'') \le tm(\omega)$.

У випадку $2m \ge n$ маємо $I^{(2)}(d_0) \le 2btm(\omega)$, $\tilde b$, b — додатні сталі.

Вибираючи $d_0 < \left(\dfrac{\varepsilon}{2b}\right)^{1/(lq_0+\min\{2m,n\})}$ та $m(\omega) \le \delta = \dfrac{d_0^{lq_0+n}}{t}$, одержуємо $I^{(2)}(d_0) \le \varepsilon$, а тоді при $d_0 < \min\left\{ \left(\dfrac{\varepsilon}{a}\right)^{1/l_*}, \left(\dfrac{\varepsilon}{3b}\right)^{1/(lq_0+\min\{2m,n\})} \right\}$ та $m(\omega) \le \delta$ $I = \max\left\{I^{(1)}(d_0), I^{(2)}(d_0)\right\} \le \varepsilon$.

***Зауваження* 1.** Поєднуючи припущення A_2 та умови леми 3, у випадку $2m < n$ отримуємо $-\dfrac{2m}{q_0} + \max\left\{0, \dfrac{(n-1)q_0-1}{q_0^2}\right\} < l \le l_1 - n < lq_0 + 2m - 2n + 2$, тоді $-\dfrac{2m}{q_0} + \max\left\{0, \dfrac{(n-1)q_0-1}{q_0^2}\right\} < l < -\dfrac{2(n-m)-1}{1-q_0}$, що можливо при $q_0 < \min\left\{\dfrac{1}{n-2m}, \dfrac{2m}{2n-1}\right\}$ та $nq_0^2 + (n-2m)q_0 - 1 < 0 \Leftrightarrow q_0 < \hat q_0 = \dfrac{n-2m}{2n}\left[\left(1+\dfrac{4n}{(n-2m)^2}\right)^{1/2} - 1\right]$, а отже, $q_0 < \min\left\{\dfrac{2m}{2n-1}, \hat q_0\right\}$; зазначимо, що $-\dfrac{2(n-m)-1}{1-q_0} \le -n$ для всіх $q_0 \in (0,1)$; $\min\left\{\dfrac{2m}{2n-1}, \hat q_0\right\} = \hat q_0$ при $m \ne 1$;

$-\dfrac{1}{q_0} - n < -\dfrac{2(n-m)-1}{1-q_0}$ при $q_0 < \hat q_0$, $-\dfrac{2m}{q_0} + \max\left\{0, \dfrac{(n-1)q_0-1}{q_0^2}\right\} < l \le -\dfrac{1}{q_0} - n$ можливо при $q_0 < \min\left\{\hat q_0, \dfrac{2m-1}{n}\right\}$, а тоді $l_1 > -\dfrac{1}{q_0} \ge l + n$;

$-\dfrac{2m}{q_0} + \max\left\{0, \dfrac{(n-1)q_0-1}{q_0^2}\right\} < l \le 2m - n - p_0$, звідки $p_0 < 2m - n + \dfrac{2m}{q_0} - \max\left\{0, \dfrac{(n-1)q_0-1}{q_0^2}\right\}$;

$-\dfrac{2m}{q_0} + \max\left\{0, \dfrac{(n-1)q_0-1}{q_0^2}\right\} < l \le 1 - n - p'$, звідки $p' < 1 - n + \dfrac{2m}{q_0} - \max\left\{0, \dfrac{(n-1)q_0-1}{q_0^2}\right\}$;

з умови $-\dfrac{1}{q_0} < l_1 \le 1 - n - s'$ одержуємо $s' < 1 - n - \dfrac{1}{q_0}$.

Зауважимо, що $\hat q_0 < \dfrac{2m}{n}$, $\hat q_0 = \dfrac{1}{n-1}$ при $m = 1$, а $\max\left\{0, \dfrac{(n-1)q_0-1}{q_0^2}\right\} = 0$ при $q_0 \le \dfrac{1}{n-1}$.

Аналогічно у випадку $2m \geq n$ знаходимо $\max\left\{ -\dfrac{n}{q_0}, -\dfrac{1}{q_0^2}\right\} < l \leq l_1 - n < < lq_0 - n$, а отже, $\max\left\{ -\dfrac{n}{q_0}, -\dfrac{1}{q_0^2}\right\} < l < -\dfrac{n}{1-q_0}$ при $nq_0^2 + q_0 - 1 < 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow q_0 < \overline{q} = \dfrac{[4n+1]^{1/2}-1}{2n} \ \left(< \dfrac{1}{2}\right)$, при $q_0 < \overline{q}$ також $\max\left\{ -\dfrac{n}{q_0}, -\dfrac{1}{q_0^2}\right\} < l \leq \leq -\dfrac{1}{q_0} - n < -\dfrac{n}{1-q_0}$, тоді $\max\left\{ -\dfrac{1}{q_0}, l+n\right\} = -\dfrac{1}{q_0} < l_1 < lq_0$. Крім того, $\hat{q} \leq \overline{q}$ при $2m < n$.

Наступне припущення забезпечує одночасне виконання A_2 та умов леми 3.

Припущення B. У випадку $2m < n$ вважаємо $q_0 < \hat{q} = \min\left\{ \dfrac{2m}{2n-1}, \dfrac{2m-1}{n}, \hat{q}_0 \right\}$, де

$$\hat{q}_0 = \frac{n-2m}{2n}\left[\left(1 + \frac{4n}{(n-2m)^2}\right)^{1/2} - 1\right] \quad \left(\in \left[\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2m}\right)\right),$$

$$0 < p_0 < 2m - n + \frac{2m}{q_0} - \max\left\{0, \frac{(n-1)q_0 - 1}{q_0^2}\right\},$$

$$1 - 2m < p' < 1 - n + \frac{2m}{q_0} - \max\left\{0, \frac{(n-1)q_0 - 1}{q_0^2}\right\}, \quad s' < 1 - n + \frac{1}{q_0},$$

$$-\frac{2m}{q_0} + \max\left\{0, \frac{(n-1)q_0 - 1}{q_0^2}\right\} < l \leq \min\left\{-\frac{1}{q_0} - n, 1 - n - p', 2m - n - p_0\right\},$$

$$-\frac{1}{q_0} < l_1 < lq_0 + 2m - n + 1 \quad \left(< -\frac{n-2m-1}{1-q_0}\right) \quad \text{та} \quad l_1 \leq 1 - n - s';$$

у випадку $2m \geq n$

$$q_0 < \overline{q} = \frac{[4n+1]^{1/2}-1}{2n}, \qquad 0 < p_0 < 2m - n + \min\left\{\frac{n}{q_0}, \frac{1}{q_0^2}\right\},$$

$$1 - 2m < p' < 1 - n + \min\left\{\frac{n}{q_0}, \frac{1}{q_0^2}\right\}, \qquad 1 - n < s' < \frac{1}{q_0} + 1 - n,$$

$$\max\left\{-\frac{n}{q_0}, -\frac{1}{q_0^2}\right\} < l \leq \min\left\{-\frac{1}{q_0} - n, 1 - n - p', 2m - n - p_0\right\},$$

$$-\frac{1}{q_0} < l_1 < lq_0 \quad \text{та} \quad l_1 \leq 1 - n - s'.$$

Лема 4. *Нехай* $l < l_1 < 0$ ($l_1 < 2m - n + 1$ *у випадку* $2m < n$), $F_0 \in C_{\overline{l}\overline{l}_1}(\Omega, \hat{x})$, *де* $\overline{l} \in (-n, 0]$ (*та* $\overline{l} \geq l_1 + n - 2m - 1$ *при* $2m < n$, $\overline{l} \geq l_1$ *при* $2m \geq n$), $\overline{l_1} \in (-1, 0]$ *або* $\overline{l} \geq lq_0$, $\overline{l}_1 \geq l_1 q_0$ *за припущення* B *щодо* q_0, l, l_1. *Тоді* $\tilde{F}_0 \in C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$.

Якщо $l < 0$, $F_0 \in C_{\overline{l}}(\overline{\Omega}, \hat{x})$, *де* $\overline{l} \in (-n, 0]$ (*та* $\overline{l} \geq l - 2m$ *при* $2m < n$, $\overline{l} \geq l$ *при* $2m \geq n$), *то* $\tilde{F}_0 \in C_l(\overline{\Omega}, \hat{x})$.

Якщо $l_1 < 0$, $F_0 \in C_{\overline{l}_1}(\Omega)$, *де* $\overline{l}_1 \in (-1, 0]$ (*та* $\overline{l}_1 \geq l_1 + n - 2m - 1$ *при* $2m < n$, $\overline{l}_1 \geq l_1$ *при* $2m \geq n$), *то* $\tilde{F}_0 \in C_{l_1}(\Omega)$.

Доведення. Нехай

$$\overline{J}_{ll_1\overline{l}_1}(x)=\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})\int\limits_{\Omega}G_0(x,y)\varrho^{\bar{l}_1}(y)\varrho^{\bar{l}}(y,\hat{x})dy.$$

Як і при доведенні леми 3, знаходимо оцінку $\sup\limits_{x\in\Omega}\overline{J}_{ll_1\overline{l}_1}$: у випадку $2m<n$ при $\bar{l}>-n$, $\bar{l}_1>-1$ та $\bar{l}\geq l+n-2m-1$

$$\sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\overline{J}_{ll_1\overline{l}_1}(x)\leq$$

$$\leq\frac{\overline{C}_0}{2}\sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\Big[|x-\hat{x}|^{\bar{l}-l+2m}+|x-\hat{x}|^{\bar{l}-l+2m-n+1}\Big]\leq\overline{C}_0d_0^{\bar{l}-l+2m-n+1},$$

при $\bar{l}\geq l_1+n-2m-1$ $(>l+n-2m-1)$

$$\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}\overline{J}_{ll_1\overline{l}_1}(x)\leq$$

$$\leq\frac{\overline{C}_1}{3}\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}\Big[d^{\bar{l}-l_1+2m-n+1}(x)+d^{\bar{l}-l_1+2m}(x)+d^{\bar{l}-l_1}(x)\Big]\leq$$

$$\leq\overline{C}_1d^{\bar{l}-l_1+2m-n+1}(x)\leq\overline{C}_1d_0^{\bar{l}-l_1+2m-n+1},$$

$$\sup_{x\in\Omega_2(d_0)}\overline{J}_{ll_1\overline{l}_1}(x)\leq\overline{C}_3\Big[d_0^{\bar{l}+2m}+d_0^{2m-n}\Big];$$

у випадку $2m\geq n$ при $\bar{l}>-n$

$$\sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\overline{J}_{ll_1\overline{l}_1}(x)\leq$$

$$\leq\frac{\overline{C}_0}{3}\sup_{x\in\Omega_0(d_0)}\Big[|x-\hat{x}|^{\bar{l}-l+n}+|x-\hat{x}|^{\bar{l}-l+1}+|x-\hat{x}|^{\bar{l}-l}\Big]\leq\overline{C}_0d_0^{\bar{l}-l},$$

при $\bar{l}\geq l_1$ $(>l)$

$$\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}\overline{J}_{ll_1\overline{l}_1}(x)\leq\frac{\overline{C}_1}{3}\sup_{x\in\Omega_1(d_0)}\Big[d^{\bar{l}-l_1}(x)+d^{\bar{l}-l_1+n}(x)+d^{\bar{l}-l_1}(x)\Big]\leq$$

$$\leq\overline{C}_1d^{\bar{l}-l_1}(x)\leq\overline{C}_1d_0^{\bar{l}},$$

$$\sup_{x\in\Omega_2(d_0)}\overline{J}_{ll_1\overline{l}_1}(x)\leq\overline{C}_3.$$

Отже, при $F_0\in C_{\overline{l}\overline{l}_1}(\Omega,\hat{x})$ за умов леми (та на підставі леми 3 у випадку $\bar{l}\geq lq_0$, $\bar{l}_1\geq l_1q_0$ та припущення B щодо q_0, l, l_1) існує така стала $\overline{C}=\max\left\{\overline{C}_1,\overline{C}_2,\overline{C}_3\right\}$, що $\sup\limits_{x\in\Omega}\overline{J}_{ll_1\overline{l}_1}(x)\leq\overline{C}$. Тоді $\left\|\int_{\Omega}G_0(\cdot,y)F_0(y)dy\right\|'_{l,l_1}\leq\sup\limits_{x\in\Omega}\overline{J}_{ll_1\overline{l}_1}(x)\|F_0\|'_{\bar{l},\bar{l}_1}\leq$ $\leq\overline{C}\|F_0\|'_{\bar{l},\bar{l}_1}$, так що $\int_{\Omega}G_0(\cdot,y)F_0(y)dy\in C_{ll_1}(\Omega,\hat{x})\subset\tilde{M}_{-l-n+\varepsilon,-l_1}(\Omega,\hat{x})$ і для довільної $\varphi\in\tilde{Z}_{-l-n+\varepsilon,-l_1}(\Omega,\hat{x})$ визначено

$$\left(\varphi, \int\limits_{\Omega} G_0(\cdot, y) F_0(y) dy\right) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x) \left(\int\limits_{\Omega} G_0(x, y) F_0(y) dy\right) dx = (\varphi, \tilde{F}_0),$$

тобто $\tilde{F}_0 = \int_{\Omega} G_0(\cdot, y) F_0(y) dy \in C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$. Інші випадки розглядаються аналогічно.

Лема 5. *Якщо* $F_j \in Z'_{p_j}(S, \hat{x})$, $s(F_j) \le s_j < p_j$, $j = \overline{1, m}$, $l \le 1 - n - p'$, $l_1 \le 1 - n - s'$, *то* $g \in C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$. *При* $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \le s_j$, $j = \overline{1, m}$, $l_1 \le 1 - n - s'$ *маємо* $g \in C_{l_1}(\Omega)$.

Доведення. Якщо $F_j \in D'(S)$, $0 \le s(F_j) \le s_j$, $j = \overline{1, m}$, то за теоремою про структуру узагальненої функції [16, 17]

$$\|g_j\|'_{l_1} = \sup_{x \in \Omega} \varrho^{-l_1}(x) \big| \langle G_j(x, y), F_j(y) \rangle \big| \le$$

$$\le \max \left\{ \sup_{x \in \Omega_1(d_0)} \varrho^{-l_1}(x) |g_j(x)|, \sup_{x \in \Omega_2(d_0)} |g_j(x)| \right\} \le$$

$$\le c_j \max \left\{ \sup_{x \in \Omega_1(d_0)} \varrho^{-l_1}(x) \max_{|\gamma| \le s_j} \sup_{y \in S} |D_y^\gamma G_j(x, y)|, 1 \right\}.$$

З оцінок (7) випливає, що $\big|D_y^\gamma G_j(x, y)\big| \le \tilde{c}_{j\gamma}$ при $|\gamma| < m_j + 1 - n$, $\big|D_y^\gamma G_j(x, y)\big| \le \tilde{c}_{j\gamma} \ln |x - y|$ при $|\gamma| = m_j + 1 - n$, $\big|D_y^\gamma G_j(x, y)\big| \le \tilde{c}_{j\gamma} |x - y|^{m_j + 1 - n - |\gamma|} < \tilde{c}_{j\gamma} d^{m_j + 1 - n - |\gamma|}(x)$ при $|\gamma| > m_j + 1 - n$, тому при $l_1 \le m_j + 1 - n - s_j$ маємо $\|g_j\|'_{l_1} \le C_j$, $\tilde{c}_{j\gamma}$, c_j, C_j — додатні сталі.

Якщо $s_j < 0$, то використовуємо такі ж оцінки при $|\gamma| = 0$.

При $F_j \in Z'_{p_j}(S, \hat{x})$, $0 \le s(F_j) \le s_j < p_j$, $j = \overline{1, m}$,

$$\|g_j\|'_{l, l_1} \le \max \left\{ \sup_{x \in \overline{\Omega_0(d_0)}} \varrho^{-l_1}(x) \varrho^{-l_2}(x, \hat{x}) \big| g_j(x) \big|, \right.$$

$$\left. \sup_{x \in \overline{\Omega_1(d_0)}} \varrho^{-l_1}(x) |g_j(x)|, \sup_{x \in \overline{\Omega_2(d_0)}} \big| g_j(x) \big| \right\}.$$

Другий та третій вирази оцінюємо, як і у випадку $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \le s_j$. Для оцінки першого виразу використаємо результат [5]: існують функції $\tilde{f}_j \in L_2(S)$ і натуральні числа N_j, $s_j + \frac{n-1}{2} < N_j < p_j + \frac{n-1}{2}$, такі, що

$$g_j(x) = \langle G_j(x, y), F_j(y) \rangle = \int\limits_S (1 - \Delta_S)_y^{N_j/2} G_j(x, y) \tilde{f}_j(y) dS, \quad j = \overline{1, m},$$

де Δ_S — оператор Лапласа – Бельтрамі на S.

Нехай

$$S^1 = S^1(x, \hat{x}) = \left\{ y \in S \colon |y - x| < \frac{1}{2} |x - \hat{x}| \right\},$$

$$S^2 = S^2(x, \hat{x}) = \left\{ y \in S \colon |y - x| > \frac{1}{2} |x - \hat{x}| \right\}.$$

При $y \in S^1$ маємо $|y-\hat{x}| \geq |x-\hat{x}|-|y-x| > \dfrac{1}{2}|x-\hat{x}|$ (звідки $|x-\hat{x}| < 2|y-\hat{x}|$), при $y \in S^2 - d(x) \leq |x-\hat{x}| < 2|y-x|$, тому за умови $m_j + \dfrac{1-n}{2} - N_j - l > 0$

$$\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x}) \int\limits_{S^1} \big|(1-\Delta_S)_y^{N_j/2} G_j(x,y)\big| |\tilde{f}_j(y)| dS \leq$$

$$\leq \left[\int\limits_{S^1} \varrho^{-2l}(y,\hat{x}) \big|(1-\Delta_S)_y^{N_j/2} G_j(x,y)\big|^2 dS \right]^{1/2} \left[\int\limits_{S^1} |\tilde{f}_j(y)|^2 dS \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_{j1} \left[\int\limits_{S^1} |y-x|^{2(m_j+1-n-N_j)} |y-\hat{x}|^{-2l} dS \right]^{1/2} \left[\int\limits_{S^1} |\tilde{f}_j(y)|^2 dS \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq c_{j1} |x-\hat{x}|^{m_j+(1-n)/2-N_j-l} < +\infty,$$

$$\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x}) \int\limits_{S^2} |(1-\Delta_S)_y^{N_j/2} G_j(x,y)| |\tilde{f}_j(y)| dS \leq$$

$$\leq \tilde{c}_{j2} \left[\int\limits_{S^2} \big[1+|y-x|^{2(m_j+1-n-N_j-l)}\big] dS \right]^{1/2} \left[\int\limits_{S^2} |\tilde{f}_j(y)|^2 dS \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq c_{j2} \big[1+|x-\hat{x}|^{m_j+(1-n)/2-N_j-l}\big] < +\infty,$$

$\tilde{c}_{ji},\ c_{ji},\ i=1,2,$ — певні додатні сталі, а отже, $\sup\limits_{x \in \Omega_0(d_0)} \varrho^{-l}(x,\hat{x}) \big|g_j(x)\big| < +\infty$. Оскільки $1-n-p_j < \dfrac{1-n}{2} - N_j$, то при $l \leq m_j+1-n-p_j$ та $l_1 \leq m_j+1-n-s_j$ маємо $\|g_j\|'_{l,l_1} < +\infty$, $j=\overline{1,m}$.

Лему доведено.

Теорема 3. *Нехай* $F_j \in Z'_{p_j}(S,\hat{x})$, $s(F_j) \leq s_j < p_j$, $j=\overline{1,m}$, f_0 *має вигляд* (11), *виконуються припущення* A, B, $F_0 \in C_{\overline{l}\overline{l}_1}(\Omega,\hat{x})$, *де* $\overline{l} \in (-n,0]$ (*та* $\overline{l} \geq l_1+n-2m-1$ *при* $2m<n$, $\overline{l} \geq l_1$ *при* $2m \geq n$), $\overline{l_1} \in (-1,0]$ *або* $\overline{l} \geq lq_0$, $\overline{l}_1 \geq l_1 q_0$. *Тоді задача* (3), (4) *має розв'язок* $u \in C_{ll_1}(\Omega,\hat{x})$.

Доведення. При $u \in C_{ll_1}(\overline{\Omega},\hat{x})$, $lq_0 > -n$, $l_1 q_0 > -1$ інтеграл

$$\int\limits_{\Omega} |\mu(y)| |u|^{q_0} dy = \int\limits_{\Omega} |\mu(y)| \Big[|u(y)| \varrho^{-l_1}(y) \varrho^{-l_2}(y,\hat{\,})\Big]^{q_0} \varrho^{l_1 q_0}(y) \varrho^{l_2 q_0}(y,\hat{x}) dy \leq$$

$$\leq \Big[\|u\|'_{l,l_1}\Big]^{q_0} \left[\int\limits_{\Omega} \big|\mu(y)\big| \varrho^{l_1 q_0}(y) \varrho^{l_2 q_0}(y,\hat{x}) dy \right]$$

є скінченним — виконується умова (5) та скінченним є інтеграл $\int_\Omega \psi(x) f_0(x, u(x)) dx$ для кожної $\psi \in \tilde{X}_{-l-n+\varepsilon,-l_1}(\overline{\Omega},\hat{x})$. За умов теореми для всіх $\psi \in \tilde{X}_{-l-n+\varepsilon,-l_1}(\overline{\Omega},\hat{x})$ визначено $\sum_{j=1}^{m} \langle \hat{T}_j \psi, F_j \rangle$. За лемами 4, 5 $g_0 = g + \tilde{F}_0 \in$

$\in C_{ll_1}(\overline{\Omega}, \hat{x})$. Тому функція $u \in C_{ll_1}(\overline{\Omega}, \hat{x})$, яка задовольняє (6) для довільної $\psi \in \tilde{X}_{-l-n+\varepsilon,-l_1}(\overline{\Omega}, \hat{x})$, буде розв'язком задачі (3), (4). Згідно з теоремою 1 достатньо довести розв'язність інтегрального рівняння (10) у просторі $C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$.

Нехай

$$(Pu)(x) = \int\limits_{\Omega} G_0(x,y)\mu(y)\big|u(y)\big|^{(q_0)}dy + g_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Тоді рівняння (10) набирає вигляду $u = Pu$, і для доведення його розв'язності використаємо принцип Шаудера [21].

При $v \in C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$ розглянемо

$$\|Pv\|'_{l,l_1} \le \sup_{x\in\Omega} \varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x}) \left| \int\limits_{\Omega} G_0(x,y)\mu(y)|v(y)|^{q_0}dy \right| + \|g_0\|'_{l,l_1} \le$$

$$\le \mu_0 \sup_{x\in\Omega} \varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x}) \int\limits_{\Omega} \big|G_0(x,y)\big|\varrho^{l_1 q_0}(y)\varrho^{l_2 q_0}(y,\hat{x})\times$$

$$\times \left[\sup_{y\in\Omega} \varrho^{-l_1}(y)\varrho^{-l_2}(y,\hat{x})|v(y)| \right]^{q_0} dy + C_{1ll_1} =$$

$$= \mu_0 \big[\|v\|'_{l,l_1}\big]^{q_0} \sup_{x\in\Omega} \int\limits_{\Omega} \big|\tilde{G}_{ll_1}(x,y,\hat{x})\big|dy,$$

де

$$\mu_0 = \sup_{x\in\Omega} |\mu(x)|, \qquad C_{1ll_1} = \|g_0\|'_{l,l_1}.$$

Використовуючи лему 3 та позначення $A_{ll_1} = \mu_0 \sup\limits_{x\in\Omega} \int_{\Omega} \big|\tilde{G}_{ll_1}(x,y,\hat{x})\big|dy$, маємо

$$\|Pv\|'_{l,l_1} \le A_{ll_1}\big(\|v\|'_{l,l_1}\big)^{q_0} + C_{1ll_1} < +\infty \quad \forall v \in C_{ll_1}(\Omega, \hat{x}). \tag{12}$$

Нехай $C_{ll_1,C}(\Omega, \hat{x}) = \big\{v \in C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})\colon \|v\|'_{ll_1} \le C\big\}$ (куля у просторі $C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$). Покажемо існування такої сталої $C > 0$, що $P\colon C_{ll_1,C}(\Omega, \hat{x}) \to C_{ll_1,C}(\Omega, \hat{x})$.

Із (12) одержуємо

$$\|Pv\|'_{l,l_1} \le A_{ll_1}C^{q_0} + C_{1ll_1} \quad \forall v \in C_{ll_1,C}(\Omega, \hat{x}). \tag{13}$$

Для довільних додатних A_{ll_1}, C_{1ll_1} та $q_0 \in (0,1)$ існує така стала $C_0 > 0$, що при $C > C_0$

$$A_{ll_1}C^{q_0} + C_{1ll_1} < C.$$

Тоді з (13) при $C > C_0$ отримуємо $P\colon C_{ll_1,C}(\Omega, \hat{x}) \to C_{ll_1,C}(\Omega, \hat{x})$.

Для довільних $v_1, v_2 \in C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$, $q_0 \in (0,1)$ за умов леми 3 подібно оцінюємо

$$\|Pv_1 - Pv_2\|'_{l,l_1} =$$

$$= \sup_{x\in\Omega} \varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x}) \left| \int\limits_{\Omega} G_0(x,y)\mu(y)\big[|v_1(y)|^{q_0} - |v_2(y)|^{q_0}\big]dy \right| \le$$

$$\leq A_{ll_1}\left[\|v_1 - v_2\|'_{ll_1}\right]^{q_0},$$

а отже, оператор P є неперервним на просторі $C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$.

Доведемо компактність оператора P на просторі $C_{ll_1,C}(\Omega, \hat{x})$, тобто відносну компактність множини $\{Pv\colon v \in C_{ll_1,C}(\Omega, \hat{x})\}$ у просторі $C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$.

Із (13) випливає рівномірна обмеженість $\|Pv\|'_{l,l_1}$ на просторі $C_{ll_1,C}(\Omega, \hat{x})$. Доведемо одностайну неперервність множини $\{Pv\colon v \in C_{ll_1,C}(\Omega, \hat{x})\}$ у просторі $C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$. Вважаємо $\varrho(x+z, \hat{x}) = 0$, якщо $x + z \notin \Omega$. При $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}^n$, $v \in C_{ll_1}(\Omega, \hat{x})$

$$\left\|(Pv)(x+t) - (Pv)(x)\right\|'_{l,l_1} =$$

$$= \sup_{x\in\Omega}\left|\varrho^{-l_1}(x+z)\varrho^{-l_2}(x+z,\hat{x})(Pv)(x+z) - \varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})(Pv)(x)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\Omega}\left\{\left|\varrho^{-l_1}(x+z)\varrho^{-l_2}(x+z,\hat{x})g_0(x+z) - \varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})g_0(x)\right| + \right.$$

$$+\mu_0\int\limits_{\Omega}\left|\varrho^{-l_1}(x+z)\varrho^{-l_2}(x+z,\hat{x})G_0(x+z,y) - \right.$$

$$\left.-\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})G_0(x,y)\right|\,|v(y)|^{q_0}dy\Bigg\} \leq$$

$$\leq J_1(z) + J_2(z),$$

де

$$J_1(z) = \sup_{x\in\Omega}\left|\varrho^{-l_1}(x+z)\varrho^{-l_2}(x+z,\hat{x})g_0(x+z) - \varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})g_0(x)\right|,$$

$$J_2(z) = C^{q_0}\mu_0\sup_{x\in\Omega}\int\limits_{\Omega}\left|\tilde{G}_{ll_1}(x+z,y,\hat{x}) - \tilde{G}_{ll_1}(x,y,\hat{x})\right|dy.$$

Із рівномірної неперервності функції $\varrho^{-l_1}(x)\varrho^{-l_2}(x,\hat{x})g_0(x)$ в $\overline{\Omega}$ випливає існування для довільного $\varepsilon > 0$ такого $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$, що для довільних $x \in \overline{\Omega}$, $z \in \mathbb{R}^n, |z| \leq \delta'$ виконується $J_1(z) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Нехай $\eta \in (0, \varepsilon_0)$, Ω_η — підобласть Ω, обмежена поверхнею S_η. За лемою 3 для довільного $\varepsilon > 0$ існують $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ та відповідне $\eta_0 \in (0, \varepsilon_0)$ такі, що $m(\Omega \setminus \Omega_{\eta_0}) \leq \delta_0$ та

$$I_{21} = \mu_0 C^q \sup_{x\in\Omega}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}}\left|\tilde{G}_{ll_1}(x,y,\hat{x})\right|dy \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Через ω^z позначимо зсув множини ω на вектор z. Тоді також для всіх $z \in \mathbb{R}^n$

$$I'_{21}(z) = \mu_0 C^q \sup_{x\in\Omega}\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0}}\left|\tilde{G}_{ll_1}(x+z,y,\hat{x})\right|dy =$$

$$= \mu_0 C^q \sup_{x\in\Omega} \int\limits_{(\Omega\setminus\Omega_{\eta_0})^{-z}} \big|\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)\big|dy \le \frac{\varepsilon}{8}.$$

Виберемо $\eta_1 < \min\left\{\dfrac12\eta_0, \left(\dfrac{\delta_0}{\sigma_n}\right)^{1/n}\right\}$, де σ_n — площа поверхні одиничної сфери в $\mathbb{R}^n$.

Для $x\in\overline{\Omega}_{\eta_0/2}$ визначимо множини $\omega_{\eta_1}(x) = \big\{\xi\in\Omega_{\eta_0}\colon |\xi - x| < \eta_1\big\}$. Маємо $m(\omega_{\eta_1}(x)) = \sigma_n\eta_1^n < \delta_0$. Тоді за лемою 3 $\mu_0 C^{q_0}\sup\limits_{x\in\Omega}\displaystyle\int_{\omega_{\eta_1}(x)}\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)dy \le \frac{\varepsilon}{8}$.

Виберемо $\delta_1 < \min\left\{\sigma_n\eta_1^n, \dfrac12\eta_1\right\}$. Якщо $x\in\overline{\Omega}_{\eta_0/2}$, $z\in\mathbb{R}^n$, $|z|\le\delta_1$ $\left(< \dfrac14\eta_0\right)$, то $x+z\in\Omega_{\eta_0/4}\subset\Omega$, $\omega_{\eta_1}^{-z}(x)\subset\Omega$. Отже, за лемою 3

$$I_{22}(z) = \mu_0 C^q \sup_{x\in\overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{2}}}\left[\int\limits_{\omega_{\eta_1}(x)}\big|\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)\big|dy + \int\limits_{\omega_{\eta_1}(x)}\big|\tilde G_{l,l_1}(x+z,y,\hat x)\big|dy\right] =$$

$$= \mu_0 C^q \sup_{x\in\overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{2}}}\left[\int\limits_{\omega_{\eta_1}(x)}\big|\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)\big|dy + \int\limits_{\omega_{\eta_1}^{-z}(x)}\big|\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)\big|dy\right] \le \frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

При $x\in\overline{\Omega}_{\eta_0/4}$, $y\in\Omega_{\eta_0}\setminus\omega_{\eta_1}(x)$, $z\in\mathbb{R}^n$, $|z|\le\delta_1$ $\left(<\dfrac14\eta_0\right)$ маємо $x+z\in\Omega$, $|y-x|\ge\eta_1$, $|y-(x+z)|\ge|y-x|-|z|\ge\eta_1-\delta_1>0$, а отже, $y\ne x$ та $y\ne x+z$. Також $d(y)\ge\eta_0$, $|y-\hat x|\ge\eta_0$. Внаслідок рівномірної неперервності функції $\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)$ на замкненій множині $V = \big\{(x,y)\in\Omega\colon x\in\overline{\Omega_{\eta_0/4}},\ y\in\overline{(\Omega_{\eta_0}\setminus\omega_{\eta_1}(x))}\big\}$ для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)\in(0,\delta_1]$, що для довільних $(x,y)\in V_1 = \overline{\Omega}_{\eta_0/2}\times\overline{(\Omega_{\eta_0}\setminus\omega_{\eta_1}(x))}\subset V$, $z\in\mathbb{R}^n$, $|z|\le\delta_2$ виконується $\big|\tilde G_{ll_1}(x+z,y,\hat x) - \tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)\big| \le \dfrac{\varepsilon}{4\mu_0 C^{q_0} m(\Omega)}$, тоді

$$I_{23}(z) = \mu_0 C^{q_0}\sup_{x\in\overline{\Omega}_{\eta_0/2}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}\setminus\omega_{\eta_1}(x)}\big|\tilde G_{ll_1}(x+z,y,\hat x) - \tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)\big|dy \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отже, для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta_2>0$, що для довільного $z\in\mathbb{R}^n$, $|z|\le$ $\le\delta_2$,

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}_{\frac{\eta_0}{2}}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}}\big|\tilde G_{ll_1}(x+z,y,\hat x) - \tilde G_{l,l_1}(x,y,\hat x)\big|dy \le I_{22}(z)+I_{23}(z) \le \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

При $x\in\overline{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0/2}}$, $y\in\overline{\Omega}_{\eta_0}$, $z\in\mathbb{R}^n$, $|z|\le\delta_1$ та $x+z\in\Omega$ маємо $y\ne x$, $y\ne x+z$, також $d(y)\ge\eta_0$, $|y-\hat x|\ge\eta_0$. Тому $\varrho^{l_1 q_0}(y)\varrho^{l_2 q_0}(y,\hat x)\le b_1\eta_0^{lq_0}$, $b_1=\mathrm{const}$, а внаслідок рівномірної неперервності функції $\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)$ на замкненій множині $V' = \big(\overline{\Omega\setminus\Omega_{(3/4)\eta_0}}\big)\times\overline{\Omega_{\eta_0}}$ для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta_3\in(0,\delta_1]$, що для довільних $(x,y)\in V_1' = (\overline{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0/2}})\times\overline{\Omega_{\eta_0}}\subset V'$, $z\in\mathbb{R}^n$, $|z|\le\delta_3$ виконується

$$\big|\tilde G_{ll_1}(x+z,y,\hat x) - \tilde G_{l,l_1}(x,y,\hat x)\big|dy \le \frac{\eta_0^{-lq_0}}{2b_1\mu_0 C^{q_0} m(\Omega)}\varepsilon,$$

звідки

$$I_{24}(z)=\mu_0C^{q_0}\sup_{x\in\Omega\setminus\Omega_{\eta_0/2}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}}\big|\tilde G_{ll_1}(x+z,y,\hat x)-\tilde G_{l,l_1}(x,y,\hat x)\big|dy\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для тих $x\in\overline{\Omega\setminus\Omega_{\eta_0/2}}$, $y\in\Omega_{\eta_0}$, $z\in\mathbb{R}^n$, $|z|\le\delta_4'<\delta_1$, для яких $x+z\notin\Omega$ (а отже, $d(x)<\delta_4'$), маємо

$$I_{24}'(z)=\mu_0C^{q_0}\sup_{x\in\Omega\setminus\overline{\Omega}_{\eta_0/2}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}}\big|\tilde G_{ll_1}(x+z,y,\hat x)-\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)\big|dy=$$

$$=\mu_0C^{q_0}\sup_{x\in\Omega\setminus\overline{\Omega}_{\eta_0/2}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}}\big|\tilde G_{ll_1}(x,y,\hat x)\big|dy\le$$

$$\le\mu_0C^{q_0}(\delta_4')^{-l_1}d_2^{-l_1}d_1^{l_1q_0}\hat d_1^{l_2q_0}\eta_0^{lq_0}\sup_{x\in\Omega\setminus\overline{\Omega}_{\eta_0/2}}\int\limits_{\Omega_{\eta_0}}|G_0(x,y)|dy\le M_0(\delta_4')^{-l_1}\eta_0^{lq_0},$$

$I_{24}'(z)\le\dfrac{\varepsilon}{2}$ при $\delta_4'\le\delta_4=\left(\dfrac{\varepsilon\eta_0^{-lq_0}}{2M_0}\right)^{1/(-l_1)}$. Отже, при $z\in\mathbb{R}^n$, $|z|\le\delta''=$ $=\min\{\delta_2,\delta_3,\delta_4\}$

$$J_2(z)\le\max\Big\{I_{21}+I_{21}'(z),I_{22}+I_{23}(z),I_{24}(z),I_{24}'(z)\Big\}\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

В результаті для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta=\min\{\delta',\delta''\}>0$, що для довільного $z\in\overline{\Omega}$, $|z|\le\delta$

$$\big\|(Pv)(x+z)-(Pv)(x)\big\|_{l,l_1}'\le J_1(z)+J_2(z)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ми показали виконання умов принципу Шаудера для оператора P.

Теорему доведено.

***Зауваження* 2.** Нехай f_0 має вигляд (11).

У випадку $F_j\in Z_{p_j}'(S,\hat x)$, $\operatorname{supp}F_j=\{\hat x\}$, $j=\overline{1,m}$,

$$0<q_0<1,\quad 1-2m<p'<1-n+\frac{\min\{2m,n\}}{q_0},$$

$$-\frac{\min\{2m,n\}}{q_0}<l\le 1-n-p',$$

$F_0\in C_{\bar l}(\overline{\Omega},\hat x)$, де $\bar l\in(-n,0]$ (та $\bar l\ge l-2m$ при $2m<n$, $\bar l\ge l$ при $2m\ge n$) або $\bar l\ge lq_0$, задача (3), (4) є розв'язною у $C_l(\overline{\Omega},\hat x)$.

У випадку $F_j\in D'(S)$, $s(F_j)\le s_j$, $j=\overline{1,m}$,

$q_0<\dfrac{1}{n-2m}, 1-n\le s'<\dfrac{1}{q_0}+1-n, -\dfrac{1}{q_0}<l_1\le\min\left\{1-n-s',-\dfrac{n-2m-1}{1-q_0}\right\}$ при $2m<n$,

$q_0\in(0,1)$, $1-n\le s'<\dfrac{1}{q_0}+1-n$, $-\dfrac{1}{q_0}<l_1\le 1-n-s'$ при $2m\ge n$,

$F_0\in C_{\bar l_1}(\Omega)$, де $\bar l_1\in(-1,0]$ (та $\bar l_1\ge l_1+n-2m-1$ при $2m<n$, $\bar l_1\ge l_1$ при $2m\ge n$) або $\bar l_1\ge l_1q_0$, задача (3), (4) є розв'язною у $C_{l_1}(\Omega)$.

1. *Крейн С. Г., Симонов А. С.* Теорема о гомеоморфизмах и квазилинейные уравнения // Докл. АН СССР. – 1966. – **167**, № 6. – С. 1226 – 1229.
2. *Лопушанська Г. П.* Задача Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь у просторі розподілів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип. 35. – С. 26 – 31.
3. *Лопушанська Г. П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. – Львів: Львів. нац. ун-т, 2002. – 287 с.
4. *Лопушанська Г. П., Жидик У. В.* Про узагальнені граничні значення розв'язків квазілінійного еліптичного рівняння 2-го порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 126 – 138.
5. *Лопушанська Г. П.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь // Укр. мат. вісн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 377 – 394.
6. *Лопушанська Г. П.* Крайові значення із $(C^\infty)'$ розв'язків напівлінійних еліптичних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2006. – **16**. – С. 173 – 185.
7. *Lopushanska H.* Solutions with strong power singularities to nonlinear elliptic boundary value problems // Мат. вісн. Наук. т-ва ім. Т. Шевченка. – 2006. – **3**. – С. 247 – 260.
8. *Лопушанська Г. П.* Узагальнені крайові значення розв'язків квазілінійних з лінійною головною частиною еліптичних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 12. – С. 1674 – 1688.
9. *Лопушанська Г. П., Чмир О. Ю.* Узагальнені крайові значення розв'язків напівлінійних еліптичних та параболічних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2007. – **17**. – С. 50 – 73.
10. *Похожаев С.* О задаче Дирихле для уравнения $\Delta u = u^2$ // Докл. АН СССР. – 1960. – **134**, № 4. – Р. 769 – 772.
11. *Gmira A., Veron L.* Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equation // Indiana Math. J. – 1991. – **64**. – P. 271 – 324.
12. *Le Gall J.-F.* The Brounian snake and the solutions of $\Delta u = u^2$ in a domain // Probab. Theory Relat. Fields. – 1995. – **102**. – P. 393 – 432.
13. *Dynkin E. B., Kuznetsov S. E.* Trace on the boundary for solutions of nonlinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – **350**. – P. 4499 – 4519.
14. *Marcus M., Veron L.* Removable singularities and boundary traces // J. math. pures et appl. – 2001. – **80**, № 1. – P. 879 – 900.
15. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
16. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
17. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
18. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, № 5. – С. 3 – 32.
19. *Красовский Ю. П.* Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – **33**, № 1. – С. 109 – 137.
20. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
21. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

Одержано 14.04.08