УДК 517. 51

А. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АППРОКСИМАТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Exact-order estimates of the best orthogonal trigonometric approximations of the Besov classes $B^r_{p,\theta}$ and the Nikol's'kyi classes H^r_p of periodic multivariable functions in the metric L_q, $1 \le p,\ q \le \infty$, are obtained. Orders of the best approximations of functions from these classes in the spaces L_1 and L_∞ by trigonometric polynomials with the corresponding spectrum are also established.

Одержано точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$ і Нікольського H^r_p періодичних функцій багатьох змінних у метриці L_q, $1 \le p,\ q \le \infty$. Встановлено також порядки найкращих наближень функцій з цих же класів у просторах L_1 і L_∞ тригонометричними поліномами з відповідним спектром.

1. Введение. В настоящей работе исследуются некоторые вопросы приближения изотропных классов О. В. Бесова $B^r_{p,\theta}$ [1] и С. М. Никольского H^r_p [2] периодических функций многих переменных. Рассматриваемые аппроксимативные характеристики этих классов функций будут определены в соответствующих частях работы, а сначала приведем необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, обозначает d-мерное пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ и $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^d [-\pi; \pi)$ — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)| < \infty.$$

Обозначим через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вида

$$V_m(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2 \sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt.$$

Тогда многомерное ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, определим согласно формуле

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Пусть V_m — оператор, который задает свертку функций $f(x)$ с многомерным ядром $V_m(x)$, т. е.

$$V_m f = f * V_m = V_m(f, x).$$

Таким образом, $V_m(f, x)$ — кратная сумма Валле Пуссена функции $f(x)$. Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ положим

$$\sigma_0(f, x) = V_1(f, x), \qquad \sigma_s(f, x) = V_{2^s}(f, x) - V_{2^{s-1}}(f, x), \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Прежде чем привести определение рассматриваемых классов функций, сделаем следующее замечание. В последующих рассуждениях нам будет удобно пользоваться определениями классов $B^r_{p,\theta}$ и H^r_p в так называемом декомпозиционном виде. С точностью до абсолютных постоянных эти определения эквивалентны исходным, которые даны в [1] и [2] соответственно для классов $B^r_{p,\theta}$ и H^r_p.

Итак, в принятых обозначениях классы $B^r_{p,\theta}$, $1 \le p$, $\theta \le \infty$, $r > 0$, можно определить следующим образом (см., например, [3]):

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x)\colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \|\sigma_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$
$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x)\colon \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr} \|\sigma_s(f,x)\|_p \le 1 \right\}, \quad \theta = \infty. \tag{1}$$

Отметим, что в случае $1 < p < \infty$ можно записать эквивалентные определения классов $B^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, и $B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p$, используя в (1) вместо $\sigma_s(f,x)$ „блоки" ряда Фурье функции $f(x)$.

Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ и $s \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначения

$$f_{(0)}(x) = \hat{f}(0) \quad \text{и} \quad f_{(s)}(x) = \sum_{\substack{2^{s-1} \le \max |k_j| < 2^s \\ j = \overline{1,d}}} \hat{f}(k)\, e^{i(k,x)}, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где $(k,x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$ и

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(y)\, e^{-i(k,y)}\, dy$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Таким образом, при $1 < p < \infty$, $r > 0$ (с точностью до абсолютных постоянных)

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x)\colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta} \|f_{(s)}(x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$
$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x)\colon \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} 2^{sr} \|f_{(s)}(x)\|_p \le 1 \right\}, \quad \theta = \infty. \tag{2}$$

Отметим, что с увеличением параметра θ классы $B^r_{p,\theta}$ расширяются, т. е. при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$ имеют место вложения

$$B^r_{p,1} \subset B^r_{p,\theta} \subset B^r_{p,\theta'} \subset B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p.$$

Таким образом, поскольку в формулируемых ниже утверждениях параметр θ принимает и предельное значение $\theta = \infty$, согласно принятым обозначениям в этих утверждениях содержатся соответствующие результаты и для классов С. М. Никольского H^r_p.

2. Наилучшие ортогональные тригонометрические приближения. Сначала определим аппроксимативную характеристику, которую будем исследовать в данном пункте.

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ — конечное множество, содержащее m элементов, т. е. $|\Lambda| = m$. Для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \le q \le \infty$, положим

$$S_\Lambda(f, x) = \sum_{k \in \Lambda} \hat{f}(k)\, e^{i(k,x)}$$

и рассмотрим величину

$$e_m^\perp(f)_q = \inf_\Lambda \| f(x) - S_\Lambda(f, x) \|_q.$$

Если $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — некоторый класс функций, то полагаем

$$e_m^\perp(F)_q = \sup_{f \in F} e_m^\perp(f)_q. \tag{3}$$

Величину $e_m^\perp(F)_q$ называют наилучшим ортогональным тригонометрическим приближением класса F в пространстве L_q. Наилучшие ортогональные тригонометрические приближения некоторых классов функций многих переменных исследовались в работах [4, 5], в которых можно ознакомиться с соответствующей библиографией.

В этом пункте основное внимание сосредоточено на получении точных по порядку оценок величин $e_m^\perp\left(B^r_{p,\theta}\right)_q$, $1 \le p,\ q \le \infty$. Параллельно будут установлены порядки приближения функций из классов $B^r_{p,\theta}$ их частными суммами Фурье по соответствующим областям. В некоторых случаях для доказательства оценок снизу величин $e_m^\perp\left(B^r_{p,\theta}\right)_q$ будем использовать известные оценки наилучших m-членных тригонометрических приближений функций из классов $B^r_{p,\theta}$.

Для формулировки соответствующего результата приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ и $\left\{k^j\right\}_{j=1}^m$ — произвольный набор d-мерных векторов $k^j = \left(k_1^j, \ldots, k_d^j\right)$ с целочисленными координатами. Тогда величина

$$e_m(f)_q = \inf_{k^j, c_j} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^m c_j e^{i\left(k^j, x\right)} \right\|_q,$$

где c_j — произвольные числа, называется наилучшим m-членным тригонометрическим приближением функции $f(x)$. Для функционального класса $F \subset$ $\subset L_q(\mathbb{T}^d)$ полагаем

$$e_m(F)_q = \sup_{f \in F} e_m(f)_q.$$

Заметим, что, как следует из определений, для $e_m(F)_q$ и $e_m^\perp(F)_q$ справедливо соотношение

$$e_m(F)_q \le e_m^\perp(F)_q. \tag{4}$$

Величина $e_m(f)_2$ для функций одной переменной введена С. Б. Стечкиным [6] при формулировке критерия абсолютной сходимости ортогональных рядов. Затем величины $e_m(f)_q$ и $e_m(F)_q$, $1 \le q \le \infty$, для функций как одной переменной, так и многих переменных, исследовались во многих работах. С соответствующей библиографией можно ознакомиться, например, в работе [7]. Для исследуемых нами классов функций $B^r_{p,\theta}$ в [8] получен следующий результат.

Теорема А. *Пусть* $1 \le p,\ q,\ \theta \le \infty$ *и*

$$r(p,q) = \begin{cases} d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)_+, 1 \le p \le q \le 2 \quad \text{или} \quad 1 \le q \le p \le \infty, \\ \max\left\{\dfrac{d}{p}; \dfrac{d}{2}\right\} \text{— в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда для $r > r(p,q)$

$$e_m\left(B^r_{p,\theta}\right)_q \asymp m^{-r/d + (1/p - \max\{1/q; 1/2\})_+},$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.

При получении оценок сверху величин $e^{\perp}_m(B^r_{p,\theta})_q$ будем использовать неравенство, установленное С. М. Никольским [2] и называемое „неравенством разных метрик". Для удобства также сформулируем его.

Теорема Б. *Пусть* $n = (n_1, \ldots, n_d)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, *и*

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тогда при $1 \le q < p \le \infty$ *имеет место неравенство*

$$\|t\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{1/q - 1/p} \|t\|_q.$$

Отметим, что в случае $d = 1$, $p = \infty$ соответствующее неравенство доказал Джексон [9].

Все полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. При этом для функций $\nu_1(n)$ и $\nu_2(n)$ запись $\nu_1 \ll \nu_2$ означает, что существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что $\nu_1(n) \le C_1 \nu_2(n)$. Соотношение $\nu_1 \asymp \nu_2$ равносильно тому, что выполнены порядковые неравенства $\nu_1 \ll \nu_2$ и $\nu_1 \gg \nu_2$. Отметим, что постоянные C_i, $i = 1, 2, \ldots$, входящие в определения функций и в порядковые соотношения, могут зависеть только от тех параметров, которые содержатся в определениях классов, от метрики и размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p,\ q,\ \theta \le \infty$, $(p, q) \ne (1, 1)$, (∞, ∞). *Тогда при* $r > d(1/p - 1/q)_+$ *справедливо соотношение*

$$e^{\perp}_m(B^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-r/d + (1/p - 1/q)_+}. \tag{5}$$

Доказательство. Сначала установим в (5) оценку сверху. При этом в силу вложения $B^r_{p,\theta} \subset H^r_p$, $1 \le \theta < \infty$, необходимую оценку достаточно получить для величины $e^{\perp}_m(H^r_p)_q$. Рассмотрим последовательно несколько соотношений между параметрами p и q.

Пусть сначала имеет место случай $1 \le p < q \le \infty$. Тогда по заданному $m \in \mathbb{N}$ подберем число $n(m)$ из соотношения $2^n \asymp m^{1/d}$ и рассмотрим для $f \in H^r_p$ приближение ее кубической суммой Фурье $S_n(f, x)$ вида

$$S_n(f,x) = \sum_{s=0}^{n} f_{(s)}(x).$$

Пусть q_0 — некоторое число, удовлетворяющее условию $p < q_0 < q$. Поскольку для $f \in H_p^r$, $1 \le p \le \infty$, выполнено соотношение $\|\sigma_s(f,x)\|_p \le 2^{-sr}$ (см. (1)), согласно неравенству Минковского и неравенству разных метрик Никольского можем записать

$$e_m^{\perp}(f)_q \ll \|f(x) - S_n(f,x)\|_q = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)}(x) \right\|_q \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \left\| f_{(s)}(x) \right\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/q_0 - 1/q)} \left\| f_{(s)}(x) \right\|_{q_0} \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/q_0 - 1/q)} \|\sigma_s(f,x)\|_{q_0} \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/q_0 - 1/q)} 2^{sd(1/p - 1/q_0)} \|\sigma_s(f,x)\|_p = \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/p - 1/q)} \|\sigma_s(f,x)\|_p \le$$

$$\le \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sd(r/d - 1/p + 1/q)} \ll 2^{-nd(r/d - 1/p + 1/q)} \asymp m^{-r/d + 1/p - 1/q}.$$

В случае $1 < p = q < \infty$ в силу неравенства Минковского и соотношения $\left\| f_{(s)}(x) \right\|_p \le 2^{-sr}$, $f \in H_p^r$ (см. (2)), будем иметь

$$e_m^{\perp}(f)_q \ll \|f(x) - S_n(f,x)\|_p = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_{(s)}(x) \right\|_p \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \left\| f_{(s)}(x) \right\|_p \le$$

$$\le \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr} \asymp m^{-r/d}. \tag{6}$$

Оценка сверху величины $e_m^{\perp}(H_p^r)_q$ в случае $1 < q < p < \infty$ следует из (6) согласно вложению $H_p^r \subset H_q^r$, т. е.

$$e_m^{\perp}(H_p^r)_q \le e_m^{\perp}(H_q^r)_q \asymp m^{-r/d}. \tag{7}$$

При $1 < q < \infty$ и $p = \infty$ соответствующая оценка величины $e_m^{\perp}(H_\infty^r)_q$ является следствием (7) в силу вложения $B_{\infty,\theta}^r \subset B_{p,\theta}^r$.

Наконец, в случае $q = 1$ и $1 < p \le \infty$ искомая оценка величины $e_m^{\perp}(H_p^r)_1$ следует из (7) согласно неравенству $\|\cdot\|_1 < \|\cdot\|_q$, $q > 1$, и вложению $H_\infty^r \subset H_p^r$. Оценки сверху во всех случаях теоремы доказаны.

Переходя к установлению в (5) оценки снизу, заметим, что в случаях $1 \le p \le$ $\le q \le 2$, $1 \le q \le p \le \infty$ и $(p,q) \ne (1,1)$, (∞,∞) искомые оценки следуют из теоремы А согласно (4). Поэтому рассмотрим те из оставшихся случаев, для которых величины $e_m^{\perp}(B_{p,\theta}^r)_q$ и $e_m(B_{p,\theta}^r)_q$ имеют разные порядки. Предварительно заметим, что в силу вложения $B_{p,1}^r \subset B_{p,\theta}^r$, $1 < \theta \le \infty$, достаточно получить соответствующие оценки снизу для величины $e_m^{\perp}(B_{p,1}^r)_q$.

Итак, пусть сначала выполнены соотношения $2 \le p < q < \infty$ или $1 < p \le 2 <$ $< q < \infty$. Для $f \in B_{p,1}^r$ рассмотрим приближающий полином

$$S_\Lambda(f,x) = \sum_{k\in\Lambda} \hat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ и $|\Lambda| = m$.

Тогда в силу следствия Д 1.2 (см. [10, с. 392]) можем записать

$$\|f(x) - S_\Lambda(f,x)\|_q = \sup_{g:\|g\|_{q'}\le 1} \left| \int_{\mathbb{T}^d} \big(f(x) - S_\Lambda(f,x)\big)\, g(x)\, dx \right|, \tag{8}$$

где $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$.

Чтобы воспользоваться соотношением (8), построим соответствующие функции. По заданному m подберем $n \in \mathbb{N}$ из неравенств $2^{(n-2)d} \le m < 2^{(n-1)d}$ и рассмотрим функцию

$$F_n(x) = \prod_{j=1}^{d} \sum_{|k_j|=2^n}^{2^{n+1}-1} e^{ik_j x_j}.$$

Принимая во внимание, что

$$\left\| \sum_{|k_j|=2^n}^{2^{n+1}-1} e^{ik_j x_j} \right\|_p \asymp 2^{n(1-1/p)}, \quad 1 < p < \infty, \tag{9}$$

записываем

$$\|F_n\|_{B^r_{p,1}} = \sum_s 2^{sr} \big\|(F_n)_{(s)}(x)\big\|_p = 2^{(n+1)r} \|F_n\|_p \asymp$$

$$\asymp 2^{nr} 2^{nd(1-1/p)} = 2^{nd(r/d+1-1/p)}. \tag{10}$$

Из (10) делаем заключение, что функция

$$f_1(x) = C_2 2^{-nd(r/d+1-1/p)} F_n(x)$$

при надлежащем выборе постоянной $C_2 > 0$ принадлежит классу $B^r_{p,1}$.

Далее, поскольку согласно (9)

$$\|F_n\|_{q'} \asymp 2^{nd/q}, \quad 1 < q < \infty,$$

функция

$$g_1(x) = C_3 2^{-nd/q} F_n(x)$$

с соответствующей постоянной $C_3 > 0$ удовлетворяет условию $\|g_1\|_{q'} \le 1$.

Таким образом, применив соотношение (8) к функциям $f_1(x)$ и $g_1(x)$, будем иметь

$$\|f_1(x) - S_\Lambda(f_1,x)\|_q \gg 2^{-nd(r/d+1-1/p)} 2^{-nd/q} (2^{nd} - m) >$$

$$> 2^{-nd(r/d+1+1/q-1/p)} 2^{nd}\left(1 - \frac{1}{2^d}\right) \asymp 2^{-nd(r/d-1/p+1/q)} \asymp m^{-r/d+1/p-1/q}.$$

Пусть теперь имеет место случай $1 \le p < \infty$ и $q = \infty$. По заданному m подберем число $n(m) \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялись соотношения $2^{nd} \asymp m$ и $2^{nd} \ge 4m$, и положим

$$v_{n+1}(x) = \prod_{j=1}^{d}\Big(V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)\Big).$$

Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = C_4 2^{-nd(r/d+1-1/p)} v_{n+1}(x), \quad C_4 > 0.$$

Поскольку (см., например, [11, с. 66])

$$\left\| v_{n+1} \right\|_p \asymp 2^{nd(1-1/p)}, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{11}$$

легко убедиться, что функция $f_2(x)$ с соответствующей постоянной $C_4 > 0$ принадлежит классу $B^r_{p,1}$. Действительно, согласно (1) можем записать

$$\| f_2 \|_{B^r_{p,1}} = \sum_s 2^{sr} \| \sigma_s(f_2, x) \|_p \asymp 2^{-nd(r/d+1-1/p)} 2^{(n+1)r} \left\| v_{n+1} \right\|_p \asymp$$

$$\asymp 2^{-nd(1-1/p)} 2^{nd(1-1/p)} = 1.$$

Далее, пусть $S_\Lambda(f_2, x)$ — частная сумма, состоящая из m произвольных гармоник ряда Фурье функции $f_2(x)$. Тогда, принимая во внимание, что

$$\left\| v_{n+1} \right\|_\infty \asymp 2^{nd},$$

имеем

$$\| f_2(x) - S_\Lambda(f_2, x) \|_\infty \ge \| f_2(x) \|_\infty - \| S_\Lambda(f_2, x) \|_\infty \gg$$

$$\gg 2^{-nd(r/d+1-1/p)} (2^{nd} - m) \asymp 2^{-nd(r/d+1-1/p)} 2^{nd} = 2^{-nd(r/d-1/p)} \asymp$$

$$\asymp m^{-r/d+1/p}.$$

Наконец, пусть $p = 1$ и $q \in (1, \infty)$. Заметим, что в случае $q \in (1, 2]$ искомая оценка снизу величины $e^\perp_m(B^r_{1,1})_q$ следует из теоремы А. Поэтому осталось получить искомую оценку при $q \in (2, \infty)$. С этой целью воспользуемся соотношением (8). В качестве функций $f(x)$ и $g(x)$ из (8) выберем функции $f_2(x)$ при $p = 1$ и

$$g_2(x) = C_5 2^{-nd/q} v_{n+1}(x), \quad C_5 > 0,$$

соответственно. При этом, по-прежнему, предполагаются выполненными соотношения $2^{nd} \asymp m$ и $2^{nd} \ge 4m$.

Поскольку в силу (11)

$$\| g_2 \|_{q'} \asymp 2^{-nd(1-1/q')} \left\| v_{n+1} \right\|_{q'} \asymp 2^{-nd(1-1/q')} 2^{nd(1-1/q')} = 1,$$

при соответствующем выборе постоянной $C_5 > 0$ функция $g_2(x)$ удовлетворяет условию соотношения (8) для функции $g(x)$.

Таким образом, применив это соотношение к функциям $f_2(x)$ при $p = 1$ и $g_2(x)$, получим

$$e^\perp_m(f_2)_q \gg 2^{-nr} 2^{-nd/q} \left(\left\| v_{n+1} \right\|_2^2 - m \right) \gg 2^{-nd(r/d+1/q)} \left(2^{nd} - 2^{(n-1)d} \right) \asymp$$

$$\asymp 2^{-nd(r/d+1/q)} 2^{nd} = 2^{-nd(r/d-1+1/q)} \asymp m^{-r/d+1-1/q}.$$

Оценки снизу во всех случаях теоремы установлены.

Теорема доказана.

В заключение этого пункта приведем некоторые комментарии к полученному результату, сопоставив его с оценками близких, в определенном смысле, аппроксимативных характеристик классов $B^r_{p,\theta}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$K(m) = \left\{k = (k_1, \ldots, k_d) \colon \left|k_j\right| \le \left[m^{1/d}\right] + 1,\ j = \overline{1, d}\right\}$$

и рассмотрим для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ ее кубическую сумму Фурье вида

$$S_{K(m)}(f, x) = \sum_{k \in K(m)} \hat{f}(k) e^{i(k, x)}.$$

Тогда, как следует из доказательства теоремы 1, в рассмотренных в ней случаях можем записать

$$e_m^{\perp}(B^r_{p,\theta})_q \asymp \sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \left\| f(x) - S_{K(m)}(f, x) \right\|_q.$$

Пусть $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ и $\left\{\hat{f}(k(l))\right\}_{l=1}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье $\left\{\hat{f}(k)\right\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ функции $f(x)$, упорядоченные в порядке невозрастания их модулей, т. е.

$$\left|\hat{f}(k(1))\right| \ge \left|\hat{f}(k(2))\right| \ge \ldots .$$

Обозначим для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$

$$G_m(f, x) = \sum_{l=1}^{m} \hat{f}(k(l)) e^{i(k(l), x)}$$

и, если $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — некоторый класс функций, положим

$$G_m(F)_q = \sup_{f \in F} \| f(x) - G_m(f, x) \|_q .$$

Легко видеть, что согласно определениям величин $e_m^{\perp}(F)_q$ и $G_m(F)_q$ имеет место неравенство

$$e_m^{\perp}(F)_q \le G_m(F)_q .$$

В [12] получено следующее утверждение.

Теорема B. *Пусть* $1 \le p,\ q,\ \theta \le \infty$. *Тогда*

$$G_m(B^r_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} m^{-r/d + (1/p - 1/2)_+}, & 1 \le q \le 2, \quad r > d\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2}\right)_+, \\ m^{-r/d + \max\{1/p; 1/2\} - 1/q}, & 2 \le q \le \infty, \quad r > d \max\left\{\dfrac{1}{p}; \dfrac{1}{2}\right\}. \end{cases} \qquad (12)$$

Таким образом, сопоставляя теорему 1 с оценками (12), видим, что существуют соотношения между параметрами p, q и r, для которых

$$e_m^{\perp}(B^r_{p,\theta})_q \asymp G_m(B^r_{p,\theta})_q ,$$

а также такие, для которых величины $e_m^{\perp}(B^r_{p,\theta})_q$ и $G_m(B^r_{p,\theta})_q$ имеют разные порядки.

3. Наилучшие приближения функций из классов $B^r_{p,\theta}$ полиномами из T_m. Пусть T_m — множество тригонометрических полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{k \in K(m)} c_k e^{i(k,x)}.$$

Для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, обозначим

$$E_m(f)_q = \inf_{t \in T_m} \| f - t \|_q$$

и, если $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — некоторый функциональный класс, положим

$$E_m(F)_q = \sup_{f \in F} E_m(f)_q.$$

Известно (см., например, [3], лемма 3), что для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 < q < \infty$, справедливо соотношение

$$\| f(x) - S_{K(m)}(f, x) \|_q \asymp E_m(f)_q.$$

Следовательно, порядковые оценки величин $E_m(B^r_{p,\theta})_q$ при $1 < q < \infty$ реализуются с помощью приближения функций $f(x)$ из классов $B^r_{p,\theta}$ их частными суммами Фурье $S_{K(m)}(f, x)$. Таким образом, представляется интересным получить оценки величин $E_m(B^r_{p,\theta})_q$ в случаях $q = 1, \infty$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $r > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$. *Тогда при* $p = 1, \infty$

$$E_m(B^r_{p,\theta})_p \asymp m^{-r/d}. \tag{13}$$

Доказательство. Оценку сверху в (13) установим при $\theta = \infty$, т. е. для классов H^r_p. По заданному $m \in \mathbb{N}$ подберем число $n(m) \in \mathbb{N}$ из соотношения $2^n \asymp m^{1/d}$ и рассмотрим для $f \in H^r_p$ приближающий полином вида

$$t_n(f, x) = \sum_{s=0}^{n} \sigma_s(f, x).$$

Поскольку для $f \in H^r_p$ выполнено соотношение $\|\sigma_s(f, x)\|_p \leq 2^{-sr}$, $p = 1, \infty$, согласно неравенству Минковского будем иметь

$$\| f(x) - t_n(f, x) \|_p = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \sigma_s(f, x) \right\|_p \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\sigma_s(f, x)\|_p \leq$$

$$\leq \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr} \asymp m^{-r/d}.$$

Оценка сверху в (13) установлена. Соответствующая оценка снизу следует из теоремы А согласно неравенству

$$E_m(B^r_{p,\theta})_p \gg e_m(B^r_{p,\theta})_p.$$

Теорема доказана.

В следующем утверждении рассмотрим случай $1 \leq p < \infty$, $q = \infty$, где порядки величин $E_m(B^r_{p,\theta})_\infty$ и $e_m(B^r_{p,\theta})_\infty$ различны.

Теорема 3. *Пусть* $1 \leq p < \infty$, $r > \dfrac{d}{p}$. *Тогда при* $1 \leq \theta \leq \infty$

$$E_m(B^r_{p,\theta})_\infty \asymp m^{-r/d+1/p}. \tag{14}$$

Доказательство. Оценка сверху в (14) следует из результата приближения функций $f \in B^r_{p,\theta}$ их частными суммами Фурье $S_{K(m)}(f, x)$ согласно соотношению

$$E_m(f)_\infty \ll \left\| f(x) - S_{K(m)}(f, x) \right\|_\infty .$$

Соответствующая оценка получена при доказательстве теоремы 1.

Переходя к установлению в (14) оценки снизу, заметим, что при этом достаточно рассмотреть случай $\theta = 1$. По заданному $m \in \mathbb{N}$ подберем число $n \in \mathbb{N}$ из неравенств $2^{d(n-2)} \le m < 2^{d(n-1)}$, т. е. $2^{nd} \asymp m$. Рассмотрим функцию

$$f_2(x) = C_4 2^{-nd(r/d+1-1/p)} v_{n+1}(x), \quad C_4 > 0,$$

которая, как показано при доказательстве теоремы 1, принадлежит классу $B^r_{p,1}$.

Далее, пусть

$$t^*(x) = \sum_{k \in K(m)} c_k^* e^{i(k,x)}$$

— полином наилучшего приближения функции $f_2(x)$ в метрике пространства $L_\infty(\mathbb{T}^d)$.

Тогда, с одной стороны, согласно соотношению между числами m и n можем записать

$$\big((f_2 - t^*), v_{n+1}\big) = (f_2, v_{n+1}) \asymp 2^{-nd(r/d+1-1/p)} \left\| v_{n+1} \right\|_2^2 \asymp$$

$$\asymp 2^{-nd(r/d+1-1/p)} 2^{nd} = 2^{-nd(r/d-1/p)} \asymp m^{-r/d+1/p}, \tag{15}$$

а с другой — в силу неравенства Гельдера и оценки (11) будем иметь

$$\big((f_2 - t^*), v_{n+1}\big) \le \left\| f_2 - t^* \right\|_\infty \left\| v_{n+1} \right\|_1 \asymp \left\| f_2 - t^* \right\|_\infty = E_m(f_2)_\infty . \tag{16}$$

Сопоставляя (15) и (16), получаем оценку

$$E_m(f_2)_\infty \gg m^{-r/d+1/p}.$$

Оценка снизу, а вместе с ней и теорема доказаны.

Замечание **1.** Сопоставляя соотношение (см. теорему А при $q = \infty$)

$$e_m(B^r_{p,\theta})_\infty \asymp m^{-r/d+(1/p-1/2)_+}, \quad 1 \le p \le \infty, \quad 1 \le \theta \le \infty,$$

с оценками (13) и (14), видим, что при $1 \le p < \infty$, $r > \max\{d/p; d/2\}$ и $r > 0$ при $p = \infty$ имеет место соотношение

$$E_m(B^r_{p,\theta})_\infty \asymp e_m(B^r_{p,\theta})_\infty m^{1/p^*},$$

где $p^* = \max\{p; 2\}$.

В заключение сформулируем утверждение, которое является следствием известных результатов.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le \theta \le \infty$, $1 < p \le \infty$. *Тогда при* $r > 0$ *справедлива оценка*

$$E_m(B^r_{p,\theta})_1 \asymp m^{-r/d}. \tag{17}$$

Доказательство. Оценка сверху в (17) следует из результата приближения функций из класса $B^r_{p,\theta}$ их частными суммами Фурье $S_{K(m)}(f, x)$. Соответствующая оценка получена при доказательстве теоремы 1. Оценка снизу в (17) следует из теоремы А.

***Замечание* 2.** Сопоставляя (13) и (17) с соответствующими утверждениями теоремы А, видим, что при $1 \le p$, $\theta \le \infty$ и $r > 0$ справедливы соотношения

$$E_m(B^r_{p,\theta})_1 \asymp e_m(B^r_{p,\theta})_1 \asymp m^{-r/d}.$$

1. *Бесов О. В.* Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **60**. – С. 42 – 61.
2. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Там же. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
3. *Лизоркин П. И.* Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 5. – С. 1127 – 1152.
4. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 2002. – **70**, № 1. – С. 109 – 121.
5. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, № 2. – С. 69 – 98.
6. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 2. – С. 37 – 40.
7. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
8. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. and Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29 – 48.
9. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. (2). – 1933. – **39**, № 12. – P. 889 – 906.
10. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
11. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
12. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation // Constr. Approxim. – 1998. – **14**. – P. 569 – 587.

Получено 04.06.08