УДК 517. 5

А. С. Сердюк, Е. Ю. Овсий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ $C_\beta^\psi H_\omega$ ОБОБЩЕННЫМИ СУММАМИ ЗИГМУНДА

Asymptotic equalities are found for exact upper bounds of approximations by the generalized Zygmund sums in the uniform metric on classes of continuous 2π-periodic functions whose (ψ, β)-derivatives belong to the set H_ω in the case where sequences ψ generating classes tend to zero not faster than the power function.

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень узагальненими сумами Зигмунда у рівномірній метриці на класах неперервних 2π-періодичних функцій, (ψ, β)-похідні яких належать множині H_ω, у випадку, коли послідовності ψ, що породжують класи, прямують до нуля не швидше степеневої функції.

Пусть L — пространство суммируемых на $(0, 2\pi)$ 2π-периодических функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$, M — пространство измеримых и существенно ограниченных 2π-периодических функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_M = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$, а C — пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(t)$, в котором норма определяется равенством $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$.

Через C_β^ψ обозначим введенные А. И. Степанцом [1, 2] классы непрерывных 2π-периодических функций следующим образом. Пусть $f \in C$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье. Если последовательность $\psi = \psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, действительных чисел и число $\beta \in \mathbb{R}$ таковы, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L$, то $\varphi(\cdot)$ называют (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$ и обозначают через $f_\beta^\psi(\cdot)$. При этом говорят, что функция $f(\cdot)$ принадлежит множеству C_β^ψ. Если $f \in C_\beta^\psi$ и $\left\| f_\beta^\psi \right\|_M \le 1$, то полагаем, что $f \in C_{\beta,\infty}^\psi$. Если же $f \in C_\beta^\psi$ и $f_\beta^\psi \in H_\omega$, где

$$H_\omega = \{\varphi \in C : |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le \omega(|t_1 - t_2|) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}\},$$

а $\omega(t)$ — фиксированный модуль непрерывности, то будем записывать $f \in$ $\in C_\beta^\psi H_\omega$. При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, классы $C_{\beta,\infty}^\psi$ и $C_\beta^\psi H_\omega$ совпадают с известными классами Вейля – Надя W_β^r и $W_\beta^r H_\omega$ соответственно (см., например, [2, с. 25 – 33]).

Далее будем полагать, что последовательность $\psi(k)$, которая определяет классы $C_\beta^\psi H_\omega$, является сужением на множестве $\mathbb{N}$ некоторой непрерывной функции $\psi(t)$ непрерывного аргумента t, принадлежащей множеству

$$\mathfrak{M} = \left\{\psi(t), t \ge 1\colon\ \psi(t) > 0, \psi(t_1) - 2\psi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) + \psi(t_2) \ge 0\ \ \forall t_1, t_2 \in [1;\infty),\right.$$

$$\left.\lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0\right\}.$$

Следуя А. И. Степанцу (см., например, [3, с. 160]), из множества $\mathfrak{M}$ будем выделять подмножества $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_C$ и $\mathfrak{M}_\infty^+$ вида

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M}\colon\ 0 < \mu(\psi; t) \le K < \infty\quad \forall t \ge 1\},$$

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M}\colon\ 0 < K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2 < \infty\quad \forall t \ge 1\},$$

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \left\{\psi \in \mathfrak{M}\colon\ \mu(\psi; t) \uparrow \infty, t \to \infty\right\},$$

где $\mu(\psi; t) = \dfrac{t}{\eta(\psi; t) - t}$, $\eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\psi^{-1}(\cdot)$ — обратная к $\psi(\cdot)$ функция, а константы K, K_1 и K_2, вообще говоря, могут зависеть от функции ψ. Естественными представителями множества $\mathfrak{M}_C$ являются, например, функции t^{-r}, $r > 0$, представителями множества $\mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_C$ — функции $\ln(t+e)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, а множества $\mathfrak{M}_\infty^+$ — функции вида $e^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$. Через $\mathfrak{M}'$ будем обозначать подмножество функций $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$, подчиненных условию $\int_1^\infty \dfrac{\psi(t)}{t} dt < \infty$. Положим также $\mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$.

Пусть $f(x)$ — некоторая суммируемая функция с периодом 2π и (1) — ее ряд Фурье. Рассмотрим полиномы вида

$$Z_n^\varphi(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{\varphi(k)}{\varphi(n)}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где $\varphi(k)$ — значения в целочисленных точках некоторой функции $\varphi \in F$, F — множество всех непрерывных и монотонно возрастающих к бесконечности на $[1, \infty)$ функций $\varphi(u)$. Полиномы $Z_n^\varphi(f; x)$ появились в работах [4, 5] и называются обобщенными суммами Зигмунда. Понятно, что если $\varphi(t) = t^s$, $s > 0$, то $Z_n^\varphi(f; x)$ совпадают с классическими суммами Зигмунда $Z_n^s(f; x)$, т. е. полиномами вида

$$Z_n^s(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k^s}{n^s}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

При $s = 1$ суммы Зигмунда $Z_n^s(f; x)$ превращаются в известные суммы Фейера $\sigma_n(f; x)$ порядка $n-1$ функции $f(x)$.

На основании известных утверждений С. М. Никольского [6, с. 261] (см. также [3, с. 18, 20]), касающихся необходимых и достаточных условий регулярности линейных методов суммирования рядов Фурье, для полиномов $Z_n^\varphi(f; x)$ легко установить следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть функция* $\varphi(u) \ge 0$, $u \in [0, \infty)$, *такова, что* $\varphi(0) = 0$, $\varphi \in F$, *и для любого* $n = 2, 3, \ldots$ $\varphi(u)$ *выпукла вверх или вниз при* $u \in [0, n]$. *Тогда условие*

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varphi(n) - \varphi(k)}{n-k} \le K \tag{3}$$

является необходимым и достаточным для равномерной сходимости полиномов $Z_n^{\varphi}(f;x)$ *к функции* $f(x)$ *на всем пространстве* C.

На основании теоремы 2.1 работы [3, с. 92], содержащей достаточные условия и порядки насыщения общих линейных методов суммирования рядов Фурье, легко убедиться, что метод Z_n^{φ}, порождаемый положительной функцией φ, является насыщенным в пространстве C с порядком насыщения $\dfrac{1}{\varphi(n)}$. Это значит, что для обобщенных сумм Зигмунда из соотношения

$$\left\| f(\cdot) - Z_n^{\varphi}(f;\cdot) \right\|_C = \frac{o(1)}{\varphi(n)}, \quad n \to \infty,$$

следует, что $f(x) \equiv \mathrm{const}$ и найдется хотя бы одна функция $f(x)$, отличная от постоянной, для которой

$$\left\| f(\cdot) - Z_n^{\varphi}(f;\cdot) \right\|_C = \frac{O(1)}{\varphi(n)}, \quad n \to \infty.$$

Целью данной работы является нахождение асимптотических равенств для величин

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^\psi H_\omega; Z_n^\varphi\right)_C = \sup_{f \in C_\beta^\psi H_\omega} \left\| f(\cdot) - Z_n^{\varphi}(f;\cdot) \right\|_C, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

при некоторых естественных ограничениях на функции $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, $\omega(\cdot)$ и параметр β. Если такие равенства получены, то говорят [3, 7], что решена задача Колмогорова – Никольского для метода Z_n^φ на классе $C_\beta^\psi H_\omega$ в метрике пространства C. Для различных линейных методов суммирования рядов Фурье на различных функциональных классах решение этой задачи получило развитие во многих работах (см., например, [3, 8 – 19]). Более детально с историей данного вопроса можно ознакомиться в комментариях и библиографических указаниях монографий [3, 7, 11, 12, 14].

Наиболее полные результаты, касающиеся нахождения асимптотических равенств для величин

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; Z_n^s\right)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \left\| f(\cdot) - Z_n^{s}(f;\cdot) \right\|_C, \quad n \to \infty,$$

при $\mathfrak{N} = W_\beta^r$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, получены С. А. Теляковским [16], а при $\mathfrak{N} = C_{\beta,\infty}^\psi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{M}'$ — Д. Н. Бушевым [20]. Изучению аппроксимативных свойств обобщенных сумм Зигмунда $Z_n^\varphi(f;x)$ на классах $C_{\beta,\infty}^\psi$ при различных $\psi(\cdot)$ посвящены работы [4, 5, 21 – 24]. В работе [5] показано, в частности, что если $\psi \in \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty^+$, $\beta = 0$ и $\varphi(t)\,\psi(t) = 1$, $t \ge 1$, то для любой функции $f \in C_{\beta,\infty}^\psi$ справедлива оценка

$$\left\| f(\cdot) - Z_n^{\varphi}(f;\cdot) \right\|_C = O(1)\,\psi(n)\ln\left(1 + \min\{\mu(\psi;n), n\}\right), \quad n > 1.$$

В работах [23, 25] получены асимптотические равенства для величин

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; Z_n^\varphi\right)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \left\| f(\cdot) - Z_n^{\varphi}(f;\cdot) \right\|_C, \tag{5}$$

когда $\mathfrak{N} = C_\beta^\psi H_\omega$, $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, $\varphi(t)\,\psi(t) = 1$, $t \ge 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, при некоторых дополнительных ограничениях на функции $\omega(t)$ и $\mu(\psi;t)$. В частности, показано [23, с. 81], что если $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, и

$$\omega(1/n)\ln(\min\{\mu(\psi;n),n\}) = o(1), \quad n\to\infty,$$

то при $n\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_{n}\right)_{C} = \frac{2\psi(n)}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n)\ln(\min\{\mu(\psi;n),n\}). \tag{6}$$

Из результатов работы [24] следует, в частности, что если $\psi\in\mathfrak{M}'_0$, $\beta\in\mathbb{R}$ и функция $\varphi(u)\,\psi(u)$ не убывает и выпукла вверх при $u\geq 1$, то при $n\to\infty$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; Z^{\varphi}_{n}\right)_{C} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\varphi(n)}\int\limits_{1}^{n}\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u}du + \int\limits_{n}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\right) + O(1)\,\psi(n).$$

В настоящей работе исследовано асимптотическое поведение величин $\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega};\, Z^{\varphi}_{n}\right)_{C}$ при $\varphi(t)\,\psi(t)=1$, $t\geq 1$, в случае, когда $\psi\in\mathfrak{M}_0$ и $\beta=0$ либо когда $\psi\in\mathfrak{M}'_0$ и $\beta\in\mathbb{R}$. Полученные результаты дополняют упомянутые выше исследования [23, 25] на классах $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ и, кроме того, в качестве следствия содержат ряд новых утверждений для классических сумм Зигмунда $Z^{s}_{n}(f;x)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\psi\in\mathfrak{M}'_0$, $\beta\in\mathbb{R}$ *и* $\varphi(u)\psi(u)=1$ *при всех* $u\geq 1$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_{n}\right)_{C} = \frac{\theta_{\omega}}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\psi(n)\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega(2t)}{t}dt + \int\limits_{0}^{1/n}\omega(2t)\int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)\sin ut\,du\,dt\right) + $$
$$+ O(1)\,\psi(n), \tag{7}$$

где $\theta_{\omega}\in[2/3,1]$, *причем* $\theta_{\omega}=1$, *если* $\omega(t)$ — *выпуклый модуль непрерывности.*

Если, кроме того,

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{\omega(t)}{t}dt \leq K, \tag{8}$$

то при $n\to\infty$ *имеет место оценка*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_{n}\right)_{C} = O(1)\,\psi(n). \tag{9}$$

В формулах (7) *и* (9) $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n *и* β.

Как следует из работы [3, с. 214, 216], в случае, когда $\psi(t)=t^{-r}$, $r>0$, второе слагаемое в правой части равенства (7) не превышает по порядку остаточный член. В этом случае равенство (7) получено в работе [15, с. 42]. В случае, когда $\psi\in\mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, утверждение, аналогичное теореме 1, было установлено в работе [25, с. 185].

Сопоставление равенства (3.10) из работы [3, с. 216] и равенства (10) из работы [26, с. 662] позволяет получить асимптотическую формулу

$$\int\limits_{0}^{1/n}\omega(2t)\int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)\sin ut\,du\,dt = \int\limits_{0}^{1/n}\psi\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\omega(t)}{t}dt + O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n) +$$
$$+ O(1)\,n(\psi(n)-\psi(n+1))\,\omega(1/n), \quad \psi\in\mathfrak{M}'_0.$$

Но поскольку для произвольной функции $\psi\in\mathfrak{M}'_0$ имеет место соотношение

$$n(\psi(n)-\psi(n+1)) \;=\; O(1)\,\psi(n),$$

которое легко следует из формулы (12.10) работы [3, с. 161], то

$$\int\limits_0^{1/n} \omega(2t) \int\limits_n^{\infty} \psi(u)\sin ut\,du dt \;=\; \int\limits_0^{1/n} \psi\!\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\omega(t)}{t}dt \;+\; O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n), \quad \psi \in \mathfrak{M}'_0. \quad (10)$$

Учитывая (10), равенство (7) можно записать в виде

$$\mathcal{E}\!\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_n\right)_C \;=\; \frac{\theta_{\omega}}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\psi(n)\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega(2t)}{t}dt \;+\; \int\limits_0^{1/n}\psi\!\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\omega(t)}{t}dt\right) \;+$$
$$+\; O(1)\,\psi(n). \qquad (7')$$

Заметим, что, например, для функции $\psi(t) = \ln(t+1)^{-\alpha}$, $\alpha > 1$, и для мажоранты $\omega(t)$, совпадающей на интервале $(0, 1/e]$ с функцией $\ln(1/t)^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, первое и второе слагаемые в правой части равенства $(7')$ являются главными, и, следовательно, в данном случае теорема 1 содержит решение задачи Колмогорова – Никольского для метода Z^{φ}_n на классах $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$. В то же время несложно привести пример мажоранты $\omega(t)$, для которой данная теорема позволяет получить лишь точное по порядку равенство величины (5) при $\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$ (выбрав, в частности, $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$). В случае $\beta \in \mathbb{Z}$ удается получить более точные оценки величины $\mathcal{E}\!\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_n\right)_C$, которые приведены в следующих теоремах.

Теорема 2. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}'_0$, $\beta = 2l+1$, $l \in \mathbb{Z}$, *и* $\varphi(u)\psi(u) = 1$ *при всех* $u \ge 1$. *Тогда если*

$$\int\limits_0^{\delta}\frac{\omega(t)}{t}dt \;=\; O(1)\,\omega(\delta), \qquad (11)$$

то при $n \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\!\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_n\right)_C \;=\; \frac{\theta_{\omega}\,\psi(n)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{\sin t}dt \;+\; O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n), \qquad (12)$$

где $\theta_{\omega} \in [2/3, 1]$, *причем* $\theta_{\omega} = 1$, *если* $\omega(t)$ *— выпуклый модуль непрерывности, а* $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n *и* β.

При $\psi(k) = k^{-1}$, $\beta = 1$ и $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, равенство (12) было доказано С. М. Никольским [9, с. 26], а для произвольного выпуклого модуля непрерывности — А. И. Степанцом (см. теорему 5 работы [27]). При $\psi(k) = k^{-r}$, $r = 1, 3, \ldots$, $\beta = r$, и $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, равенство (12) доказано Б. Надем [10, с. 48].

Теорема 3. *Пусть* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, *и* $\varphi(u)\psi(u) = 1$ *при всех* $u \ge 1$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}\!\left(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}; Z^{\varphi}_n\right)_C \;=\; \frac{2\psi(n)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega(2t)\,dt \;+\; O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n), \qquad (13)$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n *и* β.

При $\psi(k) = k^{-2}$ и $\beta = 2$ равенство (13) доказано А. И. Степанцом [28, с. 352].

На основании (6) и (13) заключаем, что если $\psi \in \mathfrak{M}_0 \cup \mathfrak{M}^{+}_{\infty}$, $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, и $\varphi(u)\psi(u) = 1$, $u \ge 1$, то при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; Z^{\varphi}_{n}\Big)_{C} = \frac{2\psi(n)}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\omega(2t)\,dt + O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n)\Big(1+\ln^{+}(\min\{\mu(\psi;n),n\})\Big),$$

где $\ln^{+}(t) = \ln(t)$, если $t > 1$, и $\ln^{+}(t) = 0$, если $t \le 1$.

Прежде чем перейти к доказательству теорем 1 – 3, заметим, что поскольку классы $C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$ инвариантны относительно сдвига аргумента (см., например, [1, с. 121, 122]), то выполняется равенство

$$\mathcal{E}\Big(C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}; Z^{\varphi}_{n}\Big)_{C} = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}} |\rho_n(f;0)|, \tag{14}$$

где $\rho_n(f;0) = \rho_n\big(f;0;\ Z^{\varphi}_{n}\big) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(0) - Z^{\varphi}_{n}(f;0)$. Для оценки величины $\rho_n(f;0)$ нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\psi\in\mathfrak{M}'_0$, $\beta\in\mathbb{R}$ *или* $\psi\in\mathfrak{M}_0$ *и* $\beta = 2l$, $l\in\mathbb{Z}$. *Тогда если* $\varphi(u)\psi(u) = 1$ *при* $u \ge 1$, *то для произвольной функции* $f \in C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$ *и* $n\in\mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\rho_n(f;0) = -\frac{1}{\pi}\sin\frac{\beta\pi}{2}\left(\psi(n)n\int\limits_{|t|\ge 1}\delta\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|t|\le 1}\delta\Big(\frac{t}{n}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt\right) + \frac{n}{\pi}\cos\frac{\beta\pi}{2}\,\psi(n)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}dt +$$

$$+ O(1)\,\psi(n)\,\omega(1/n), \tag{15}$$

где $\delta(\cdot) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f^{\psi}_{\beta}(\cdot) - f^{\psi}_{\beta}(0)$, *а* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n *и* β.

Доказательство. Положим

$$\tau_n(u) = \begin{cases}\psi(n)nu, & 0\le u\le \frac{1}{n},\\ \psi(n), & \frac{1}{n}\le u\le 1,\\ \psi(nu), & u\ge 1,\end{cases}\qquad \nu_n(u) = \begin{cases}\psi(n)u, & 0\le u\le 1,\\ \psi(nu), & u\ge 1,\end{cases}$$

и $\mu_n(u) = \tau_n(u) - \nu_n(u)$ при $u\ge 0$. Пусть ψ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда на основании леммы 3.1 работы [3, с. 186] заключаем, что преобразование

$$\hat{\nu}_n(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\nu_n(u)\cos\Big(ut+\frac{\beta\pi}{2}\Big)du$$

(понимаемое как несобственный интеграл) является суммируемой на всей оси функцией, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\hat{\nu}_n(t)|\,dt < \infty. \tag{16}$$

Поскольку функция $\mu_n(u)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, $\mu_n(1) = 0$ и, как несложно убедиться, интегралы

$$\int_0^1 u(1-u)\,|d\mu_n'(u)|, \qquad \int_0^1 \frac{|\mu_n(u)|}{u}du, \qquad \int_0^1 \frac{|\mu_n(u)|}{1-u}du$$

сходятся, согласно теореме 1 работы [16, с. 70] имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^1 \mu_n(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt \;<\; \infty. \tag{17}$$

Учитывая (16) и (17), приходим к выводу, что функция

$$\hat{\tau}_n(t) \;=\; \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tau_n(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du$$

является суммируемой на всей оси. Тогда, поскольку

$$\tau_n(u) \;=\; \begin{cases} (1-\lambda_n(1/n))\,\psi(1)\,nu, & 0 \le u \le \dfrac{1}{n}, \\ (1-\lambda_n(u))\,\psi(nu), & \dfrac{1}{n} \le u \le 1, \qquad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где

$$\lambda_n(u) \;=\; \begin{cases} 1 - \dfrac{\varphi(1)}{\varphi(n)} nu, & 0 \le u \le \dfrac{1}{n}, \\ 1 - \dfrac{\varphi(nu)}{\varphi(n)}, & \dfrac{1}{n} \le u \le 1, \qquad \varphi \in F, \end{cases}$$

согласно теореме 3.2 работы [2, с. 56] для каждой функции $f \in C_\beta^\psi H_\omega$ справедливо равенство

$$\rho_n(f;0) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right) \hat{\tau}_n(t)\,dt. \tag{18}$$

Поскольку $\tau_n(0) = 0$, согласно лемме 3 работы [16, с. 71], в силу которой $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t)\,dt = 0$, равенство (18) можно представить в виде

$$\rho_n(f;0) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_\beta^\psi\left(\frac{t}{n}\right) - f_\beta^\psi(0) \right) \hat{\tau}_n(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{n}\right) \hat{\tau}_n(t)\,dt \;=$$

$$= \; \frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{n}\right) \int_0^{\infty} \tau_n(u) \cos ut\,du\,dt \;-\; \frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{n}\right) \int_0^{\infty} \tau_n(u) \sin ut\,du\,dt. \tag{19}$$

Выполняя интегрирование по частям и учитывая равенство $\tau_n(\infty) = 0$, находим

$$\int_0^{\infty} \tau_n(u) \cos ut\,du \;=\; \psi(n)n \frac{\cos\frac{t}{n} - 1}{t^2} \;-\; \frac{n}{t} \int_1^{\infty} \psi'(nu) \sin ut\,du, \qquad \psi'(t) \stackrel{\text{df}}{=} \psi'(t+0) \tag{20}$$

и

$$\int_0^{\infty} \tau_n(u) \sin ut\,du \;=\; \psi(n) \frac{n \sin\frac{t}{n}}{t^2} \;+\; \frac{n}{t} \int_1^{\infty} \psi'(nu) \cos ut\,du. \tag{21}$$

Из формул (19) – (21) получаем

$$\rho_n(f;0) =$$

$$= \frac{n\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\left(\psi(n)\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\cos\frac{t}{n}-1}{t^2}dt - \int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{t}\int_1^{\infty}\psi'(nu)\sin ut\,du\,dt\right) -$$

$$-\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\left(\psi(n)n\int_{|t|\geq 1}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\frac{\sin\frac{t}{n}}{t^2}dt + n\int_{|t|\geq 1}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{t}\int_1^{\infty}\psi'(nu)\cos ut\,du\,dt +\right.$$

$$\left.+\int_{|t|\leq 1}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\int_0^1\tau_n(u)\sin ut\,du\,dt + \int_{|t|\leq 1}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\int_1^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt\right). \tag{22}$$

Поскольку $\tau_n(u)\leq\psi(n)$ при $u\in[0,1]$ и $|\delta(t)|\leq\omega(|t|)$, имеем

$$\int_{|t|\leq 1}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\int_0^1\tau_n(u)\sin ut\,du\,dt = O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{23}$$

Как следует из работы [3, с. 223, 226] (см. также [29, с. 285]), справедливы оценки

$$n\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{t}\int_1^{\infty}\psi'(nu)\sin ut\,du\,dt = O(1)\psi(n)\omega(1/n), \quad \psi\in\mathfrak{M}_0, \tag{24}$$

и

$$n\int_{|t|\geq 1}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{t}\int_1^{\infty}\psi'(nu)\cos ut\,du\,dt = O(1)\psi(n)\omega(1/n), \quad \psi\in\mathfrak{M}'_0. \tag{25}$$

Объединяя (22) – (25), получаем равенство (15).

Лемма 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Будем исходить из равенств (14) и (15). Выполняя замену переменных в первом и третьем интегралах правой части равенства (15) и используя формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}y(t)dt \quad \forall y\in L \tag{26}$$

(см., например, [30, с. 1084]), после элементарных преобразований получаем

$$\rho_n(f;0) = -\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\left(\psi(n)\int_{|t|\geq 1/n}\delta(t)\frac{\sin t}{t^2}dt + \int_{|t|\leq 1}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\int_1^{\infty}\psi(nu)\sin ut\,du\,dt\right) +$$

$$+ O(1)\psi(n). \tag{27}$$

Далее мы будем упрощать правую часть в (27), не теряя при этом ее главного значения. Легко видеть, что

$$\int_{|t|\geq 1/n}\delta(t)\frac{\sin t}{t^2}dt = \int_{1/n\leq|t|\leq 1}\delta(t)\frac{\sin t}{t^2}dt + O(1) =$$

$$= \int_{1/n\leq|t|\leq 1}\frac{\delta(t)}{t}dt + \int_{1/n\leq|t|\leq 1}\delta(t)\frac{\sin t - t}{t^2}dt + O(1). \tag{28}$$

Поскольку функция $\dfrac{\sin t - t}{t^2}$ ограничена на сегменте $[-1, 1]$, объединяя формулы (27) и (28), получаем

$$\rho_n(f;0) = -\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\pi}\left(\psi(n)\int\limits_{1/n\le|t|\le 1}\frac{\delta(t)}{t}dt + \int\limits_{|t|\le 1}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\int\limits_1^\infty \psi(nu)\sin ut\,du\,dt\right) + $$
$$+ O(1)\psi(n). \tag{29}$$

В силу леммы 3.1.6 работы [7, с. 143] функция $\int_1^\infty \psi(nu)\,\sin ut\,du$ положительна при $t\in(0,1]$, и поскольку она нечетная, имеем

$$\left|\int\limits_{|t|\le 1}\delta\left(\frac{t}{n}\right)\int\limits_1^\infty\psi(nu)\sin ut\,du\,dt\right| = \left|\int\limits_0^1\left(\delta\left(\frac{t}{n}\right)-\delta\left(-\frac{t}{n}\right)\right)\int\limits_1^\infty\psi(nu)\sin ut\,du\,dt\right| \le$$
$$\le \int\limits_0^{1/n}\omega(2t)\int\limits_n^\infty\psi(u)\sin ut\,du\,dt. \tag{30}$$

Учитывая оценку

$$\left|\int\limits_{1/n\le|t|\le 1}\frac{\delta(t)}{t}dt\right| = \left|\int\limits_{1/n}^1\frac{\delta(t)-\delta(-t)}{t}dt\right| \le \int\limits_{1/n}^1\frac{\omega(2t)}{t}dt$$

и формулы (14), (29) и (30), находим

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^\psi H_\omega; Z_n^\varphi\right)_C \le$$
$$\le \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{1/n}^1\frac{\omega(2t)}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{1/n}\omega(2t)\int\limits_n^\infty\psi(u)\sin ut\,du\,dt\right) + O(1)\psi(n). \tag{31}$$

Пусть

$$\varphi^*(t) = \begin{cases}\frac{1}{2}\,\omega(2t), & 0\le t\le\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}\,\omega(2\pi-2t), & \frac{\pi}{2}\le t\le\pi,\\ -\varphi^*(-t), & -\pi\le t\le 0,\end{cases} \qquad \varphi^*(t+2\pi) = \varphi^*(t)$$

и $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности. В этом случае (см., например, [15, с. 28, 29]) функция $\varphi^*(t)$ принадлежит классу H_ω. Очевидно, что $\varphi^*\in H_\omega^0$, где $H_\omega^0 = \{\varphi : \varphi\in H_\omega,\ \varphi\perp 1\}$. Тогда согласно п. 7.2 работы [2, с. 109, 110] в классе $C_\beta^\psi H_\omega$, $\psi\in\mathfrak{M}'_0$, существует функция $g^*(\cdot)$, для (ψ,β)-производной которой $g^{*\psi}_{\ \beta}(t)$ выполняется равенство

$$g^{*\psi}_{\ \beta}(t) = \varphi^*(t). \tag{32}$$

Для функции $g^*(t)$, согласно формуле (29), имеем

$$\left|\rho_n(g^*;0)\right| = \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega(2t)}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1/n}\omega(2t)\int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)\sin ut\,du\,dt\right) + {} + O(1)\psi(n).$$

Отсюда следует, что в соотношении (31) можно поставить знак равенства. Тем самым в случае, когда $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, равенство (7) доказано.

Если $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности, то функция $\varphi^*(t)$ может и не принадлежать классу H_{ω}. Однако, как показано в работе [15, с. 11], функция $\varphi_*(t) = 2\varphi^*(t)/3$ уже принадлежит классу H_{ω}. Значит, в классе $C^{\psi}_{\beta} H_{\omega}$ найдется функция $g_*(t)$, (ψ, β)-производная которой $g_{*\beta}^{\psi}(t)$ удовлетворяет равенству

$$g_{*\beta}^{\psi}(t) = \varphi_*(t). \tag{33}$$

Для функции $g_*(t)$, согласно формуле (29), имеем

$$\left|\rho_n(g_*;0)\right| = \frac{2}{3}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{1/n}^{1}\frac{\omega(2t)}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1/n}\omega(2t)\int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)\sin ut\,du\,dt\right) + {} + O(1)\psi(n).$$

Отсюда заключаем, что в случае произвольных модулей непрерывности $\omega(t)$ имеет место равенство (7).

Пусть, кроме того, для мажоранты $\omega(t)$ выполняется условие (8). В работе [3, с. 191] показано, что

$$\left|\int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)\sin ut\,du\right| < \int\limits_{n}^{n+2\pi/t}\psi(u)\,du \quad \forall\,\psi\in\mathfrak{M}'_0.$$

Отсюда следует оценка

$$\int\limits_{0}^{1/n}\omega(2t)\int\limits_{n}^{\infty}\psi(u)\sin ut\,du\,dt = O(1)\int\limits_{0}^{1/n}\omega(2t)\int\limits_{n}^{n+2\pi/t}\psi(u)\,du\,dt = {}$$

$$= O(1)\psi(n)\int\limits_{0}^{1/n}\frac{\omega(t)}{t}dt. \tag{34}$$

Тогда из формул (8), (31) и (34) получаем (9).

Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.** Не умаляя общности, достаточно рассмотреть лишь случай $\beta = 1$. Выполняя замену переменных в первом интеграле правой части формулы (15) и используя равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} y(t)\frac{t-\sin t}{t^2}dt = 0 \quad \forall\, y\in L$$

(см., например, [30, с. 1084]), получаем

$$\rho_n(f;0) = -\frac{\psi(n)}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-1/n}^{1/n}\right)\delta(t)\frac{\sin t}{t^2}dt \; -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\le 1} \delta\left(\frac{t}{n}\right) \int\limits_1^{\infty} \psi(nu) \sin ut \, du \, dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n) =$$

$$= -\frac{\psi(n)}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{t} dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \frac{\sin t - t}{t^2} dt - \int\limits_0^{1/n} (\delta(t) - \delta(-t)) \frac{\sin t}{t^2} dt \right) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\le 1} \delta\left(\frac{t}{n}\right) \int\limits_1^{\infty} \psi(nu) \sin ut \, du \, dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n) =$$

$$= -\frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\le 1} \delta\left(\frac{t}{n}\right) \int\limits_1^{\infty} \psi(nu) \sin ut \, du \, dt +$$

$$+ O(1)\psi(n)\left(\int\limits_0^{1/n} \omega(2t) \frac{\sin t}{t^2} dt + \omega(1/n) \right) =$$

$$= -\frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t)}{t} dt - \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\le 1} \delta\left(\frac{t}{n}\right) \int\limits_1^{\infty} \psi(nu) \sin ut \, du \, dt +$$

$$+ O(1)\psi(n)\left(\int\limits_0^{1/n} \frac{\omega(t)}{t} dt + \omega(1/n) \right). \tag{35}$$

Согласно формуле (1.33) работы [2, с. 43], выполняется равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} y(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \qquad \forall\, y \in L,$$

используя которое, из (11), (30), (34) и (35) находим

$$\rho_n(f; 0) = -\frac{\psi(n)}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{36}$$

Далее, поскольку

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt = \left(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} (\delta(t) - \delta(-t)) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt - \int\limits_0^{\pi/2} (\delta(\pi + t) - \delta(\pi - t)) \operatorname{tg} \frac{t}{2} dt,$$

то

$$\left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \right| \le \int\limits_0^{\pi/2} \omega(2t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt + \int\limits_0^{\pi/2} \omega(2t) \operatorname{tg} \frac{t}{2} dt = 2 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{\sin t} dt. \tag{37}$$

Объединяя формулы (14), (36) и (37), имеем

$$\mathcal{E}\left(C_\beta^\psi H_\omega; Z_n^\varphi\right)_C \le \frac{\psi(n)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\omega(2t)}{\sin t} dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n). \tag{38}$$

С помощью равенства (36) нетрудно убедиться, что для функции $\tilde{g}(t)$, совпадающей с рассмотренной ранее функцией $g^*(t)$ в случае, когда $\omega(t)$ — выпуклая мажоранта, и с функцией $g_*(t)$ в остальных случаях, справедлива формула

$$|\rho_n(\tilde{g};0)| = \alpha(\omega)\frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\omega(2t)}{\sin t}dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n), \qquad (39)$$

где $\alpha(\omega)=1$, если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, и $\alpha(\omega)=2/3$ в остальных случаях. Объединяя соотношения (38) и (39), получаем (12).

Теорема 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Не умаляя общности, достаточно рассмотреть лишь случай $\beta = 0$. Выполняя замену переменных в третьем интеграле правой части формулы (15) и учитывая равенство (26), находим

$$|\rho_n(f;0)| = \frac{1}{\pi}\psi(n)\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\frac{\cos t - 1}{t^2}dt\right| + O(1)\psi(n)\omega(1/n) =$$

$$= \frac{\psi(n)}{2\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f^\psi_\beta(t) - f^\psi_\beta(0)\right)dt\right| + O(1)\psi(n)\omega(1/n). \qquad (40)$$

Из (40) следует оценка

$$|\rho_n(f;0)| =$$

$$= \frac{\psi(n)}{2\pi}\left|\int\limits_0^{\pi}\left(f^\psi_\beta(t) - f^\psi_\beta(0)\right)dt + \int\limits_0^{\pi}\left(f^\psi_\beta(-t) - f^\psi_\beta(0)\right)dt\right| + O(1)\psi(n)\omega(1/n) \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\psi(n)\int\limits_0^{\pi/2}\omega(2t)dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n). \qquad (41)$$

На основании равенств (14) и (41) имеем

$$\mathcal{E}\left(C^\psi_\beta H_\omega; Z^\varphi_n\right)_C \le \frac{2}{\pi}\psi(n)\int\limits_0^{\pi/2}\omega(2t)dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n). \qquad (42)$$

Положим

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\omega(2\tau)d\tau - \omega(t), & 0 \le t \le \pi, \\ \varphi_0(-t), & -\pi \le t \le 0, \end{cases} \qquad \varphi_0(t+2\pi) = \varphi_0(t).$$

Понятно, что $\varphi_0 \in H^0_\omega$, и, значит (см. п. 7.2 работы [2, с. 109, 110]), в классе $C^\psi_\beta H_\omega$, $\psi \in \mathfrak{M}_0$, существует функция $g_0(\cdot)$, (ψ, β)-производная которой совпадает на периоде с функцией $\varphi_0(t)$. Для функции $g_0(t)$ из (40) получаем

$$|\rho_n(g_0;0)| = \frac{2}{\pi}\psi(n)\int\limits_0^{\pi/2}\omega(2t)dt + O(1)\psi(n)\omega(1/n).$$

Отсюда заключаем, что в (42) можно поставить знак равенства.

Теорема 3 доказана.

Полагая в теоремах 2 и 3 $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, и учитывая, что в данном случае

$C_\beta^\psi H_\omega = W_\beta^r H_\omega$, получаем такое утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть* $r > 0$, $s = r$, $\beta \in \mathbb{Z}$ *и, кроме того, при* $\beta = 2l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$, *выполняется условие* (11). *Тогда при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}\left(W_\beta^r H_\omega; Z_n^s\right)_C = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n^r} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \omega(2t)dt + O(1)n^{-r}\,\omega(1/n), & \beta = 2l, \\ \dfrac{\theta_\omega}{\pi n^r} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\omega(2t)}{\sin t}dt + O(1)n^{-r}\,\omega(1/n), & \beta = 2l+1, \end{cases} \quad l \in \mathbb{Z}, \tag{43}$$

где величины θ_ω *и* $O(1)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 2.

Поскольку при $\omega(t) = t$ имеет место равенство $W_{r-1}^{r-1} H_\omega = W^r$, $r = 2, 3, \ldots$, где W^r — класс 2π-периодических функций, $(r - 1)$-е производные которых абсолютно непрерывны и почти всюду $\left|f^{(r)}\right| \leq 1$, учитывая формулу $\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t} dt = 2G$, где G — константа Каталана (см., например, [31, с. 431]), из следствия 1 получаем следующее утверждение.

***Следствие* 2.** *Пусть* $s = r - 1$ *и* $r = 2, 3, \ldots$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}\left(W^r; Z_n^s\right)_C = \begin{cases} \dfrac{4G}{\pi n^s} + O(1)n^{-r}, & r = 2, 4, \ldots, \\ \dfrac{\pi}{2n^s} + O(1)n^{-r}, & r = 3, 5, \ldots, \end{cases} \tag{44}$$

где G — *константа Каталана, а* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Нетрудно заметить, что, поскольку $G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ (см., например, [31, с. 21]), константы в главных членах формулы (44) совпадают при $j = 1$ с так называемыми константами Фавара – Ахиезера – Крейна $\tilde{K}_j$ и K_j,

$$K_j = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(j+1)}}{(2k+1)^{j+1}}, \qquad \tilde{K}_j = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{kj}}{(2k+1)^{j+1}}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

(см., например, [11, с. 89, 329]).

Асимптотические равенства (44) были доказаны Б. Надем [10, с. 47].

Легко видеть, что в силу (2) в теоремах 1 – 3 условие $\varphi(t)\psi(t) = 1$, $t \geq 1$, может быть заменено условием $\varphi(t)\psi(t) = \mathrm{const}$, $t \geq 1$.

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101 – 136.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближения: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – **40**. – Ч 1. – 427 с.
4. *Гаврилюк В. Т.* О характеристике класса насыщения $C_0^\psi L_\infty$ // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 421 – 427.
5. *Гаврилюк В. Т.* О классах насыщения линейных методов суммирования рядов Фурье // Там же. – 1988. – **40**, № 5. – С. 569 – 576.
6. *Никольский С. М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер.

мат. – 1948. – **12**, № 3. – С. 259 – 278.
7. *Степанец А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **68**. – 386 с.
8. *Kolmogoroff A. N.* Zur Grössenordnung des Restliedes Fouriershen Reihen differenzierbaren Funktionen // Ann. Math. – 1935. – **36**. – S. 521 – 526.
9. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 1 – 76.
10. *Nagy B.* Sur une classe générale de procédés de summation pour les séries de Fourier // Hung. Acta Math. – 1948. – **3**. – P. 14 – 52.
11. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
12. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
13. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126 – 151.
14. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
15. *Ефимов А. В.* Линейные методы приближения некоторых классов непрерывных периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 3 – 47.
16. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Там же. – 1961. – **62**. – С. 61 – 67.
17. *Теляковский С. А.* Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье // Мат. заметки. – 1968. – **4**, № 3. – С. 291 – 300.
18. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами в среднем // Там же. – 1974. – **16**, № 1. – С. 15 – 26.
19. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы рядов Фурье и приближение функций полиномами в пространствах L и C // Докл. АН СССР. – 1989. – **306**, № 2. – С. 292 – 296.
20. *Бушев Д. Н.* Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда. – Киев, 1984. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.56).
21. *Ковальская И. Б.* Приближение классов периодических функций аналогами сумм Зигмунда в метрике C // Приближение классов периодических классов одной и многих переменных в метрике C и L_p. – Киев, 1988. – С. 3 – 28. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.14).
22. *Новиков О. А.* Приближение классов непрерывных периодических функций линейными методами . – Киев, 1991. – 38 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 91.50).
23. *Островская О. В.* Приближение классов периодических функций обобщенными суммами Зигмунда в метрике C // Ряды Фурье: теория и приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 69 – 87.
24. *Рукасов В. И., Новиков О. А.* Приближение функций с небольшой гладкостью из классов $C_\infty^{\overline{\psi}}$ линейными методами // Теорія наближень та гармонічний аналіз: Пр. Укр. мат. конгр. – 2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 184 – 193.
25. *Островська О. В.* Наближення узагальненими сумами Зигмунда періодичних функцій класів $C_\beta^\psi H_\omega$ // Ряди Фур'є: теорія і застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **20**. – С. 181 – 191.
26. *Шогунбеков Ш. Ш.* О приближении периодических функций частными суммами их рядов Фурье // Докл. АН ТаджССР. – 1989. – **32**, № 10. – С. 661 – 664.
27. *Степанец А. И.* Аппроксимационные свойства метода Зигмунда // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 4. – С. 493 – 518.
28. *Степанец А. И.* Приближение периодических функций классов Гельдера суммами Риса // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 3. – С. 341 – 354.
29. *Степанец А. И.* Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 274 – 291.
30. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Там же. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069 – 1113.
31. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Получено 14.07.08,
после доработки — 21.01.09