УДК 517.9

С. М. Чуйко (Пед. ун-т, Славянск)

СЛАБОНЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОСОБОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

We study the problem of finding existence conditions and the construction of solutions of weakly nonlinear Noetherian boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. We consider the particular critical case where the equation for the determination of a generating solution of a Noetherian weakly nonlinear boundary-value problem becomes the identity. We give a refined classification of the critical cases and iterative algorithm for the construction of solutions of Noetherian weakly nonlinear boundary-value problems in the particular critical case.

Досліджено задачу про знаходження умов існування та побудову розв'язків нетерових слабконелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Розглянуто особливий критичний випадок, коли рівняння для знаходження породжуючого розв'язку нетерової слабконелінійної крайової задачі перетворюється на тотожність. Уточнено класифікацію критичних випадків та побудовано ітераційний алгоритм для знаходження розв'язків нетерових слабконелінійних крайових задач в особливому критичному випадку.

1. Постановка задачи. Исследуем задачу о нахождении условий существования и построении решения $z(t,\varepsilon) \in C^1[a,b], C[0,\varepsilon_0]$ системы дифференциальных уравнений [1–4]
$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{1}$$
удовлетворяющих краевому условию
$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{2}$$

Решение нетеровой $(m \neq n)$ задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи
$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \qquad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^m. \tag{3}$$

Здесь $A(t)$ — $(n\times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементами которых являются непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал. Нелинейности
$$Z(z,t,\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(Z^{(1)}(z,t,\varepsilon),\ldots,Z^{(n)}(z,t,\varepsilon)\Big),$$
$$J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = \mathrm{col}\Big(J^{(1)}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon),\ldots,J^{(m)}(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big)$$
задачи (1), (2) предполагаем дважды непрерывно дифференцируемыми по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Z(z,t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$. Исследован критический случай $(P_{Q^*} \neq 0)$, причем предполагается выполненным условие
$$P_{Q_d^*}\big\{\alpha - \ell K\big[f(s)\big](\cdot)\big\} = 0; \tag{4}$$
в этом случае порождающая задача (3) имеет $(r = n - n_1)$-параметрическое семейство решений $z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\big[f(s);\alpha\big](t),\ c_r \in R^r$. Здесь $X(t)$

— нормальная ($X(0) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части системы (3), $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, $X_r(t) = X(t)P_{Q_r}$, P_{Q_r} — $(n \times r)$-матрица, составленная из r линейно независимых столбцов $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q R^n \to N(Q)$, $P_{Q_r^*}$ — $(r \times n)$-матрица, составленная из r линейно независимых строк $(n \times n)$-матрицы-ортопроектора $P_{Q^*}\colon R^n \to N(Q^*)$, $G\big[f(s);\alpha\big](t) = K\big[f(s)\big](t) - X(t)Q^+\ell K\big[f(s)\big](\cdot)$ — обобщенный оператор Грина краевой задачи (3), $K\big[f(s)\big](t) = X(t)\displaystyle\int_a^t X^{-1}(s)f(s)ds$ — оператор Грина задачи Коши для системы (3), Q^+ — псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1]. Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (3) имеет вид

$$P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \ell K\big[Z(z_0(s,c_r)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\} = 0. \qquad (5)$$

Решение задачи (1), (2) $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$ ищем в окрестности решения порождающей задачи (3), известного с точностью до вектора $c_r \in R^r$, для нахождения которого в равенстве (5) переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$:

$$F_0(c_r) = P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot,c_r),0) - \ell K\big[Z(z_0(s,c_r),s,0)\big](\cdot)\Big\} = 0. \qquad (6)$$

Традиционно это условие используют для нахождения параметра $c_r^* \in R^r$, обусловливающего выбор порождающего решения, однако возможно это не всегда, так как в ряде случаев [5] последнее равенство выполняется тождественно:

$$F_0(c_r) = P_{Q_d^*}\Big\{J(z_0(\cdot,c_r),0) - \ell K\big[Z(z_0(s,c_r),s,0)\big](\cdot)\Big\} \equiv 0. \qquad (7)$$

Краевые задачи (1), (2) при условии (7) по классификации И. Г. Малкина [5, с. 139] представляют *особый критический случай,* поскольку традиционная схема анализа и построения решения [1, 4] для таких задач не применима в силу невозможности нахождения параметра c_r^*, определяющего выбор порождающего решения, непосредственно из уравнения (6). Для нахождения возмущения $x(t,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $C[0,\varepsilon_0]$, $x(t,0) \equiv 0$, порождающего решения $z_0(t,c_r)$ получаем задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \qquad \ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \qquad (8)$$

Решение задачи (8) представимо в виде $x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon)$, где

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[Z(z_0(s,c_r)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t),$$

$$c_r(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0].$$

В малой окрестности порождающего решения имеет место разложение

$$Z(z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) =$$
$$= Z(z_0(t,c_r),t,0) + A_1(t)x + \varepsilon A_3(t) + \varepsilon R_3(z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \qquad (9)$$

Здесь

$$A_1(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r)\\ \varepsilon=0}}, \qquad A_3(t) = \frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r)\\ \varepsilon=0}}.$$

Остаток $\varepsilon R_3(z_0(t,c_r)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения функции $Z(z,t,\varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по неизвестной x в малой окрестности нуля и по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля, чем два первых члена разложения (9), поэтому $R_3(z_0(t,c_r),t,0)\equiv 0$. Аналогично в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$ имеет место разложение

$$J(z_0(\cdot,c_) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) =$$
$$= J(z_0(\cdot,c_r),0) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r),0) + \varepsilon J_3(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \qquad (10)$$

представимое через производные (по Фреше)

$$\ell_1 x(\cdot,\varepsilon) = \frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r)\\ \varepsilon=0}}, \qquad \ell_3(z_0(\cdot,c_r),0) = \frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r)\\ \varepsilon=0}}.$$

Остаток $\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ разложения функционала $J(z,\varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости по x и ε в окрестности точек $x=0$ и $\varepsilon=0$, чем два первых члена разложения (10), поэтому $J_3(z_0(\cdot,c_r),0)=0$. Поскольку в особом критическом случае равенство (7) удовлетворяется тождественно, ключевая в традиционной схеме анализа и построения решений [1, 4] матрица

$$B_0 = \frac{\partial F_0(c_r)}{\partial c_r} = P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K\big[A_1(s)X_r(s)\big](\cdot)\Big\} \equiv 0.$$

Переходя в равенстве (5) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем необходимое условие существования искомого решения

$$F_1(c_r) = P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\big[Z(z_0(s,c_r),s,0); J(z_0(\cdot,c_r),0)\big](\cdot) + \ell_3(z_0(\cdot,c_r),0) -$$
$$- \ell K\Big[A_1(s)G\big[Z(z_0(\tau,c_r),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r),0)\big](s) + A_3(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \qquad (11)$$

В особом критическом случае данное требование представляет уравнение относительно вектора $c_r\in R^r$.

Таким образом, доказано следующее утверждение [10].

Лемма. *Пусть выполнено условие* (4) *и краевая задача* (1), (2) *представляет особый критический случай* $P_{Q^*}\neq 0, F_0(c_r)\equiv 0$. *Предположим также, что задача* (1), (2) *имеет решение* $z(t,\varepsilon)\in C^1[a,b], C[0,\varepsilon_0],\ z(t,0)=z_0(t,c_r^*)$. *Тогда вектор* $c_r^*\in R^r$ *удовлетворяет уравнению* (11).

Корни уравнения (11) определяют порождающее решение, в малой окрестности которого в особом критическом случае могут существовать искомые решения исходной задачи (1), (2). Если же уравнение (11) не имеет действительных корней, то исходная задача (1), (2) в особом критическом случае не имеет искомых решений. Предположим, что уравнение (11) не вырождается в тождество и имеет корень $c_r^*\in R^r$. Решение исходной задачи (1), (2) ищем в окрестности порождающего решения

$$z_0(t,c_r^*) = X_r(t)c_r^* + G\big[f(s);\alpha\big](t).$$

Уточним разложение (9), для чего выделим из остатка [9]

$$\varepsilon R_3(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)=$$
$$=\frac{1}{2}\big[\varepsilon A_4(t)x+A_5(t,x(t,\varepsilon))x+\varepsilon^2A_6(t)\big]+\varepsilon^2R_4(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon) \qquad (12)$$

слагаемые, содержащие $(n\times n)$-матрицы [8]

$$A_4(t)=\left.\frac{\partial^2Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z\partial\varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}, \qquad A_5(t,x(t,\varepsilon))=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left.\left[\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}x\right]\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}$$

и n-мерный вектор-столбец

$$A_6(t)=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2Z(z,t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}.$$

Произведение [8, с. 313]

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\cdot x\right]\right\}\cdot y=\begin{bmatrix} y*\cdot H_1(z,t,\varepsilon)\cdot x\\ y*\cdot H_2(z,t,\varepsilon)\cdot x\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y*\cdot H_n(z,t,\varepsilon)\cdot x\end{bmatrix}$$

выражается через $(n\times n)$-мерные симметрические матрицы Гессе

$$H_i(z,t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2Z^{(i)}(z,t,\varepsilon)}{\partial(z^{(1)})^2} & \frac{\partial^2Z^{(i)}(z,t,\varepsilon)}{\partial z^{(1)}\partial z^{(2)}} & \dots & \frac{\partial^2Z^{(i)}(z,t,\varepsilon)}{\partial z^{(1)}\partial z^{(n)}}\\ \frac{\partial^2Z^{(i)}(z,t,\varepsilon)}{\partial z^{(2)}\partial z^{(1)}} & \frac{\partial^2Z^{(i)}(z,t,\varepsilon)}{\partial(z^{(2)})^2} & \dots & \frac{\partial^2Z^{(i)}(z,t,\varepsilon)}{\partial z^{(2)}\partial z^{(n)}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial^2Z^{(i)}(z,t,\varepsilon)}{\partial z^{(n)}\partial z^{(1)}} & \frac{\partial^2Z^{(i)}(z,t,\varepsilon)}{\partial z^{(n)}\partial z^{(2)}} & \dots & \frac{\partial^2Z^{(i)}(z,t,\varepsilon)}{\partial\left(z^{(n)}\right)^2}\end{bmatrix}, \quad i=1,2,\dots,$$

и представляет собой отображение

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}x\right]\right\}y\colon R^n\times R^n\to R^n,$$

обладающее свойствами симметрии [11]

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\cdot x\right]\right\}\cdot y=\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial Z(z,t,\varepsilon)}{\partial z}\cdot y\right]\right\}\cdot x$$

и билинейности [8, с. 314]. Остаток $\varepsilon^2R_4(z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ разложения вектор-функции $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ выше второго порядка малости по x и ε, поэтому $R_4(z_0(t,c_r^*),t,0)\equiv 0$,

$$\left.\frac{\partial R_4(z,t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}\equiv 0, \qquad \left.\frac{\partial R_4(z,t,\varepsilon)}{\partial x}\right|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}\equiv 0.$$

Аналогично из остатка [9]

$$\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\varepsilon\ell_4 x(\cdot,\varepsilon)+\ell_5(\cdot,x(\cdot,\varepsilon))x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon^2\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big]+$$
$$+\,\varepsilon^2 J_4(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) \tag{13}$$

выделяем слагаемые, содержащие производные (по Фреше)

$$\ell_4 x(\cdot,\varepsilon)=\frac{\partial^2 J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z\partial\varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}},\qquad \ell_6 x(\cdot,\varepsilon)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon^2}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}},$$
$$\ell_5(\cdot,x(\cdot,\varepsilon))x(\cdot,\varepsilon)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}x(\cdot,\varepsilon)\Big]\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}.$$

Остаток $\varepsilon^2 J_4(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ разложения функционала $J(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ выше второго порядка малости по x и ε, поэтому $J_4(z_0(\cdot,c_r^*),0)=0$,

$$\frac{\partial J_4(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}\equiv 0,\qquad \frac{\partial J_4(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\bigg|_{\substack{z=z_0(t,c_r^*)\\ \varepsilon=0}}\equiv 0.$$

Равенства (9) – (13) приводят к необходимому и достаточному условию существования решения исходной задачи (1), (2)

$$P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\Big[A_1(s)x+\varepsilon A_3(s)+\varepsilon R_3(z,s,\varepsilon);\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_0,0)+\varepsilon J_3(z,\varepsilon)\Big](\cdot)\,+$$
$$+\,\ell_4 x(\cdot,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\ell_5(\cdot,x(\cdot,\varepsilon))x(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_6(z_0(\cdot,\varepsilon),0)+\varepsilon J_4(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\,-$$
$$-\,\ell K\Big[A_1(s)G\Big[A_1(\tau)x+\varepsilon A_3(\tau)+\varepsilon R_3(z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);\ell_1 x(\cdot,\varepsilon)\,+$$
$$+\,\varepsilon\ell_3(z_0,0)+\varepsilon J_3(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s)+$$
$$+\,A_4(s)x+\frac{1}{\varepsilon}A_5(s,x(s,\varepsilon))x+\varepsilon A_6(s)+\varepsilon R_4(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}=0.$$

Возвращаясь к тождеству $B_0\equiv 0$, заметим, что для любого $\bar c_r\in R^r$ оно равносильно следующему: $B_0\bar c_r\equiv 0$. Дифференцируя последнее тождество, для любого вектора $\bar c_r\in R^r$ имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial\bar c_r}P_{Q_d^*}\Big\{\frac{\partial J(z_0(\cdot,c_r^*),0)}{\partial z}X_r(\cdot)\bar c_r-\ell K\Big[\frac{\partial Z(z_0(s,c_r^*),s,0)}{\partial z}X_r(s)\bar c_r\Big](\cdot)\Big\}\equiv 0,$$

которое в свою очередь приводит к тождеству

$$P_{Q_d^*}\Big\{\ell_5\big(\cdot,X_r(\cdot)\bar c_r\big)X_r(\cdot)-\ell K\big[A_5\big(s,X_r(s)\bar c_r\big)X_r(s)\big](\cdot)\Big\}\equiv 0. \tag{14}$$

Таким образом, условие разрешимости задачи (1), (2) приводит к уравнению

$$\Xi_0 c_r(\varepsilon)=-P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\Big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon)+\varepsilon A_3(s)+\varepsilon R_3(z,s,\varepsilon);$$

$$\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0,0) + \varepsilon J_3(z,\varepsilon)\Big](\cdot) +$$

$$+\ \ell_4 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon J_4(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\ -$$

$$-\ \ell K\Big[A_1(s)G\Big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_3(\tau) + \varepsilon R_3(z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);$$

$$\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0,0) + \varepsilon J_3(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s) +$$

$$+\ A_4(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_6(s) + \varepsilon R_4(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}, \tag{15}$$

где

$$\Xi_0 = P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\Big[A_1(s)X_r(s);\ \ell_1 X_r(\cdot)\Big](\cdot) + \ell_4 X_r(\cdot) +$$

$$+\ 2\ell_5\Big(\cdot, G\Big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big](\cdot)\Big)X_r(\cdot)\ -$$

$$-\ \ell K\Big[A_1(s)G\Big[A_1(\tau)X_r(\tau); \ell_1 X_r(\cdot)\Big](s) +$$

$$+\ A_4(s)X_r(s) + 2A_5\Big(s, G\Big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big](s)\Big)X_r(s)\Big](\cdot)\Big\}$$

— $(d\times r)$-матрица. Частное решение задачи (8) представимо в виде

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big\{Z(z_0(s,c_r^*),s,0) + A_1(s)\big[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s,\varepsilon)\big] + \varepsilon A_3(s) +$$

$$+\ \varepsilon A_4(s)\big[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s,\varepsilon)\big] + A_5\big(s, X_r(s)c_r\big)X_r(s)c_r +$$

$$+\ 2\varepsilon\cdot A_5\Big(s, G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](s)\Big)\cdot X_r(s)c_r +$$

$$+\ \varepsilon^2 A_6(s) + \varepsilon^2 R_4(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$

$$+\ \ell_1\big[X_r(\cdot)c_r + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big] + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) +$$

$$+\varepsilon\ell_4\big[X_r(\cdot)c_r + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big] + \ell_5\big(\cdot, X_r(\cdot)c_r\big)X_r(\cdot)c_r +$$

$$+2\varepsilon\cdot\ell_5\big(\cdot, G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](\cdot)\Big)\cdot X_r(\cdot)c_r +$$

$$+\ \varepsilon^2\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2 J_4(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}(t).$$

Неизвестная вектор-функция малого параметра $c_r = c_r(\varepsilon)$ непрерывна по ε в малой положительной окрестности нуля. Поскольку отклонение $x(t,\varepsilon)$ от порождающего решения $z_0(t,c_r^*)$ при $\varepsilon = 0$ является нулевым вектором, необходимо должны выполняться равенство $c_r(0) = 0$ и тождество $x^{(1)}(t,0) \equiv 0$ на всем отрезке $[a,b]$. Обозначим

$$\Psi(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\Big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(s) +$$

$$+\varepsilon R_3(z,s,\varepsilon); \ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0,0) + \varepsilon J_3(z,\varepsilon)\Big](\cdot) +$$

$$+\ \ell_4 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon J_4(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\Big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon A_3(\tau)+$$

$$+\varepsilon R_3(z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);\ell_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_0,0)+\varepsilon J_3(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s)+$$

$$+A_4(s)x^{(1)}(s,\varepsilon)+\varepsilon A_6(s)+\varepsilon R_4(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Вектор-функция $\Psi(\varepsilon)$ представима в виде суммы $\Psi(\varepsilon)=\Psi_1(\varepsilon)+\varepsilon\Psi_2(\varepsilon)$, где

$$\Psi_1(\varepsilon)=-\varepsilon\cdot P_{Q_d^*}\Big\{J_4(z_0(\cdot,c_r^*)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-\ell K\big[R_4(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\big](\cdot)\Big\},$$

$$\varepsilon\cdot\Psi_2(\varepsilon)=-\varepsilon\cdot P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1G\Big[\frac{1}{\varepsilon}A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon)+A_3(s)+R_3(z,s,\varepsilon);$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\ell_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\ell_3(z_0,0)+J_3(z,\varepsilon)\Big](\cdot)+\frac{1}{\varepsilon}\ell_4x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0)\ -$$

$$-\ \ell K\Big[A_1(s)G\Big[\frac{1}{\varepsilon}A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+A_3(\tau)+R_3(z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\ell_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\ell_3(z_0,0)+J_3(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s)\ +$$

$$+\ \frac{1}{\varepsilon}A_4(s)x^{(1)}(s,\varepsilon)+A_6(s)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Остатки $R_4(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и $J_4(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ разложения нелинейностей задачи (1), (2) при $\varepsilon\to 0$ равны нулю, поэтому $\Psi_1(0)=0$. Найдем предел

$$F_2(c_r^*)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Psi_2(\varepsilon)=$$

$$=-P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1G\Big[A_1(s)G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](s)+A_3(s);$$

$$\ell_1G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](\cdot)+\ell_3(z_0,0)\big](\cdot)+$$

$$+\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\ell_4G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](\cdot)-$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\Big[A_1(\tau)G\big[Z(z_0(\nu,c_r^*),\nu,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](\tau)+$$

$$+A_3(\tau);\ell_1G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](\cdot)+\ell_3(z_0,0)\Big](s)+$$

$$+A_4(s)G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](s)+A_6(s)\big](\cdot)\Big\}.$$

В силу ограниченности вектора-столбца $F_2(c_r^*)$ вектор-функция $\Psi(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0$ равна нулю. Уравнение (15) разрешимо при условии $P_{\Xi_0^*}=0$, где $P_{\Xi_0^*}$ — ортопроектор матрицы Ξ_0^*: $P_{\Xi_0^*}\colon R^d\to N(\Xi_0^*)$. Пусть $\operatorname{rank}P_{\Xi_0}=\rho_2$, $P_{\Xi_0}\colon R^r\to N(\Xi_0)$ — $(r\times r)$-матрица-ортопроектор. Обозначим через P_{ρ_2} $(r\times\rho_2)$-матрицу, составленную из ρ_2 линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора P_{Ξ_0}. При условии $P_{\Xi_0^*}=0$ уравнение (15) имеет по меньшей мере одно решение

$$c_r(\varepsilon)=-\Xi_0^+P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1G\Big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon A_3(s)+\varepsilon R_3(z,s,\varepsilon);\ell_1x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_0,0)+\varepsilon J_3(z,\varepsilon)\Big](\cdot)+$$

$$+\ell_4 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_4(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\Big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_3(\tau) + \varepsilon R_3(z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon); \ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\ell_3(z_0,0) + \varepsilon J_3(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s) +$$

$$+A_4(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_6(s) + \varepsilon R_4(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} + P_{\rho_2}c_{\rho_2}(\varepsilon),$$

зависящее от вектора $c_{\rho_2}(\varepsilon) \in C^1[0,\varepsilon_0]$, $c_{\rho_2}(0) = 0$. Таким образом, при условии $P_{\Xi_0^*} = 0$ решение краевой задачи (8) определяет операторная система

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r + x^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big\{Z(z_0(s,c_r^*),s,0) + A_1(s)\big[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s,\varepsilon)\big] + \varepsilon A_3(s) +$$

$$+\varepsilon A_4(s)\big[X_r(s)c_r + x^{(1)}(s,\varepsilon)\big] + A_5\big(s, X_r(s)c_r\big)X_r(s)c_r + \varepsilon^2 A_6(s) +$$

$$+2\varepsilon A_5\Big(s, G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](s)\Big)X_r(s)c_r +$$

$$+\varepsilon^2 R_4(z_0(s,c_r^*) + x(s,\varepsilon),s,\varepsilon); J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1\big[X_r(\cdot)c_r + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big] +$$

$$+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4\big[X_r(\cdot)c_r + x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big] + \ell_5\big(\cdot, X_r(\cdot)c_r\big)X_r(\cdot)c_r +$$

$$+2\varepsilon\cdot\ell_5\big(\cdot, G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](\cdot)\Big)\cdot X_r(\cdot)c_r +$$

$$+\varepsilon^2\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon^2 J_4(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}(t), \tag{16}$$

$$c_r(\varepsilon) = -\Xi_0^+ P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\Big[A_1(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(s) + \varepsilon R_3(z,s,\varepsilon);$$

$$\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0,0) + \varepsilon J_3(z,\varepsilon)\Big](\cdot) +$$

$$+\ell_4 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0) + J_4(z_0(\cdot,c_r^*) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\Big[A_1(\tau)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_3(\tau) + \varepsilon R_3(z(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon);$$

$$\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0,0) + \varepsilon J_3(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s) +$$

$$+A_4(s)x^{(1)}(s,\varepsilon) + \varepsilon A_6(s) + \varepsilon R_4(z(s,\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} + P_{\rho_2}c_{\rho_2}(\varepsilon).$$

Операторная система (16) принадлежит классу систем, для решения которых применим метод простых итераций [1, 2, 4]. Первое приближение к решению системы (16) ищем, как решение краевой задачи первого приближения к задаче (8)

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t)x_1 + \varepsilon Z(z_0(t,c_r^*),t,0), \qquad \ell x_1(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r^*),0).$$

Решение задачи первого приближения существует в силу условия (7) и представимо в виде $x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon G\big[Z(z_0(s,c_r^*),s,0); J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](t)$. Второе приближение к решению операторной системы (16) представляет решение краевой задачи второго приближения к задаче (8)

$$\frac{dx_2}{dt} = A(t)x_2 + \varepsilon\big\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)x_1 + \varepsilon A_3(t)\big\},$$

$$\ell x_2(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\big\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big\}.$$

Решение задачи второго приближения представимо в виде

$$x_2(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_1} + x_2^{(1)}(t,\varepsilon), \qquad x_2^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + x_2^{(2)}(t,\varepsilon),$$

где

$$x_2^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big[A_1(s)x_1(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(s);\, \ell_1 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big](t).$$

Выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи второго приближения с учетом тождества (7) обеспечивается выбором вектора c_r^*, удовлетворяющего уравнению (11). Таким образом, условие разрешимости задачи второго приближения равносильно равенству $F_1(c_r^*) = 0$.

Третье приближение к решению операторной системы (16) представляет решение краевой задачи третьего приближения к задаче (8)

$$\frac{dx_3}{dt} = A(t)x_3 + \varepsilon\Big\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0) + A_1(t)\big[X_r(t)c_{r_1} + x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\big] +$$

$$+\varepsilon A_3(t) + \varepsilon A_4(t)x_1(t,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_6(t)\Big\},$$

$$\ell x_3(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\Big\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \ell_1\big[X_r(\cdot)c_{r_1} + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big] +$$

$$+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^2\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big\}.$$

Решение задачи третьего приближения представимо в виде

$$x_3(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_2} + x_3^{(1)}(t,\varepsilon), x_3^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + x_3^{(2)}(t,\varepsilon),$$

где

$$x_3^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G\Big\{A_1(s)\big[X_r(s)c_{r_1} + x_2^{(1)}(s,\varepsilon)\big] + \varepsilon A_3(s) + \varepsilon A_4(s)x_1(s,\varepsilon) + \varepsilon^2 A_6(s);$$

$$\ell_1\big[X_r(\cdot)c_{r_1} + x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big] + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0) + \varepsilon\ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon^2\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0)\Big\}(t).$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи третьего приближения с учетом равенства (7), уравнения (11) и равенства $B_0 = 0$ принимает вид

$$P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\big[A_1(s)x_1(s,\varepsilon) + \varepsilon A_3(s); \ell_1 x_1(\cdot,\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](\cdot) + J_3(z_0(\cdot,c_r^*) + x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\big[A_1(\tau)x_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_3(\tau); \ell_1 x_1(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](s) +$$

$$+R_3(z_0(s,c_r^*) + x_1(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Здесь введены обозначения

$$\varepsilon R_3(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),\varepsilon)=\varepsilon A_4(s)x_1(s,\varepsilon)+\varepsilon^2 A_6(s),$$

$$\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)=\varepsilon \ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon^2 \ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0).$$

Условие разрешимости задачи третьего приближения равносильно требованию $F_2(c_r^*)=0$. Предположим, что это требование выполнено. Четвертое приближение к решению операторной системы (16) представляет решение краевой задачи четвертого приближения к задаче (8)

$$\frac{dx_4}{dt}=A(t)x_4+\varepsilon\Big\{Z(z_0(t,c_r^*),t,0)+A_1(t)\big[X_r(t)c_{r_2}+x_3^{(1)}(t,\varepsilon)\big]+$$

$$+\varepsilon A_3(t)+\varepsilon A_4(t)\big[X_r(t)c_{r_1}+x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\big]+$$

$$+A_5\big(t,X_r(t)c_{r_1}+x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\big)\big[X_r(t)c_{r_1}+x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\big]+$$

$$+\varepsilon^2 A_6(t)+\varepsilon^2 R_4(z_0(t,c_r^*)+x_1(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big\},$$

$$\ell x_4(\cdot,\varepsilon)=\varepsilon\Big\{J(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\ell_1\big[X_r(\cdot)c_{r_2}+x_3^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big]+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0)+$$

$$+\ell_5\big(\cdot,X_r(\cdot)c_{r_1}+x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big)\big[X_r(\cdot)c_{r_1}+x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big]+$$

$$+\,\varepsilon\ell_4\big[X_r(\cdot)c_{r_1}+x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big]+\varepsilon^2\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon^2 J_4(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}.$$

Решение задачи четвертого приближения представимо в виде

$$x_4(t,\varepsilon)=X_r(t)c_{r_3}+x_4^{(1)}(t,\varepsilon),\qquad x_4^{(1)}(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+x_4^{(2)}(t,\varepsilon),$$

где

$$x_4^{(2)}(t,\varepsilon)=\varepsilon G\Big\{A_1(s)\big[X_r(s)c_{r_2}+x_3^{(1)}(s,\varepsilon)\big]+$$

$$+\varepsilon A_3(s)+\varepsilon A_4(s)\big[X_r(s)c_{r_1}+x_2^{(1)}(s,\varepsilon)\big]+A_5\big(s,X_r(s)c_{r_1}\big)X_r(s)c_{r_1}+$$

$$+2\varepsilon\cdot A_5\Big(s,G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](s)\Big)\cdot X_r(s)c_{r_1}+\varepsilon^2 A_6(s)+$$

$$+\varepsilon^2 R_4(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),\varepsilon);\ell_1\big[X_r(\cdot)c_{r_2}+x_3^{(1)}(\cdot,\varepsilon)\big]+$$

$$+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\ell_5\big(\cdot,X_r(\cdot)c_{r_1}\big)X_r(\cdot)c_{r_1}+$$

$$+2\varepsilon\cdot\ell_5\big(\cdot,G\big[Z(z_0(\tau,c_r^*),\tau,0);J(z_0(\cdot,c_r^*),0)\big](\cdot)\Big)\cdot X_r(\cdot)c_{r_1}+$$

$$+\varepsilon\ell_4 x_1(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon^2\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon^2 J_4(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}(t).$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи четвертого приближения с учетом равенства (7), уравнения (11), равенства $B_0=0$ и тождества (14) приводит к уравнению

$$\Xi_0 c_{r_1}(\varepsilon)=-P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\big[A_1(s)x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+\varepsilon A_3(s)+\varepsilon R_3(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](\cdot)+$$

$$+\ell_4 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon J_4(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\big[A_1(\tau)x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon A_3(\tau)+\varepsilon R_3(z_0(\tau,c_r^*)+x_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](s)+$$

$$+A_4(s)x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+\varepsilon A_6(s)+\varepsilon R_4(z_0(\tau,c_r^*)+x_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Последнее уравнение при условии $P_{\Xi_0^*}=0$ имеет по меньшей мере одно решение

$$c_{r_1}(\varepsilon)=-\Xi_0^+P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\Big[A_1(s)x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+\varepsilon A_3(s)+\varepsilon R_3(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)+$$

$$+\ell_4 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_6(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon J_4(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\big[A_1(\tau)x_2^{(1)}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon A_3(\tau)+\varepsilon R_3(z_0(\tau,c_r^*)+x_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1 x_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c_r^*),0)+\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](s)+$$

$$+A_4(s)x_2^{(1)}(s,\varepsilon)+\varepsilon A_6(s)+\varepsilon R_4(z_0(\tau,c_r^*)+x_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}+P_{\rho_2}c_{\rho_2}(\varepsilon).$$

При условии $F_2(c_r^*)=0$ это решение значительно упрощается:

$$c_{r_1}(\varepsilon)=-\Xi_0^+P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 G\big[A_1(s)x_2^{(2)}(s,\varepsilon)+\varepsilon R_3(z_0(s,c_r^*)+x_1(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1 x_2^{(2)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](\cdot)+$$

$$+\ell_4 x_2^{(2)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon J_4(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\Big[A_1(\tau)x_2^{(2)}(\tau,\varepsilon)+\varepsilon R_3(z_0(\tau,c_r^*)+x_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1 x_2^{(2)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c_r^*)+x_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big](s)+$$

$$+A_4(s)x_2^{(2)}(s,\varepsilon)+\varepsilon R_4(z_0(\tau,c_r^*)+x_1(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}+P_{\rho_2}c_{\rho_2}(\varepsilon).$$

Таким образом, на четвертом шаге найдено второе приближение $x_2(t,\varepsilon)=X_r(t)c_{r_1}(\varepsilon)+$ $+\,x_2^{(1)}(t,\varepsilon)$. Продолжая рассуждения, приходим к следующему утверждению [10].

Теорема. *Пусть выполнено условие* (4) *разрешимости порождающей задачи* (3) *и краевая задача* (1), (2) *представляет особый критический случай* $P_{Q^*}\neq$ $\neq 0, F_0(c_r)\equiv 0$. *Тогда для каждого корня* $c_r^*\in R^r$ *уравнения* (11) *при условиях* $P_{\Xi_0^*}=0, F_2(c_r^*)=0$ *задача* (1), (2) *имеет по меньшей мере одно решение* $z(t,\varepsilon)\in$ $\in C^1[a,b], C[0,\varepsilon_0]$, $z(t,0)=z_0(t,c_r^*)$. *Решение* $z(t,\varepsilon)=z_0(t,c_r^*)+x(t,\varepsilon)$ *краевой задачи* (1), (2) *может быть найдено из операторной системы* (16) *с помощью итерационной процедуры*

$$x_{k+3}(t,\varepsilon)=X_r(t)c_{r_{k+2}}+x_{k+3}^{(1)}(t,\varepsilon),\qquad x_{k+3}^{(1)}(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+x_{k+3}^{(2)}(t,\varepsilon),$$

$$x^{(2)}_{k+3}(t,\varepsilon)=\varepsilon G\Big\{A_1(s)\big[X_r(s)c_{r_{k+1}}+x^{(1)}_{k+2}(s,\varepsilon)\big]+$$

$$+\varepsilon A_3(s)+\varepsilon A_4(s)\big[X_r(s)c_{r_k}+x^{(1)}_{k+1}(s,\varepsilon)\big]+A_5\big(s,X_r(s)c_{r_k}\big)X_r(s)c_{r_k}+$$

$$+2\varepsilon\cdot A_5\Big(s,G\big[Z(z_0(\tau,c^*_r),\tau,0);J(z_0(\cdot,c^*_r),0)\big](s)\Big)\cdot X_r(s)c_{r_k}+$$

$$+\varepsilon^2A_6(s)+\varepsilon^2R_4(z_0(s,c^*_r)+x_k(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1\big[X_r(\cdot)c_{r_{k+1}}+x^{(1)}_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\big]+\varepsilon\ell_3(z_0(\cdot,c^*_r),0)+$$

$$+\varepsilon\ell_4\big[X_r(\cdot)c_{r_k}+x^{(1)}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)\big]+\ell_5\big(\cdot,X_r(\cdot)c_{r_k}\big)X_r(\cdot)c_{r_k}+$$

$$+2\varepsilon\cdot\ell_5\big(\cdot,G\big[Z(z_0(\tau,c^*_r),\tau,0);J(z_0(\cdot,c^*_r),0)\big](\cdot)\Big)\cdot X_r(\cdot)c_{r_k}+$$

$$+\varepsilon^2\ell_6(z_0(\cdot,c^*_r),0)+\varepsilon^2J_4(z_0(\cdot,c^*_r)+x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}(t), \tag{17}$$

$$c_{r_{k+2}}(\varepsilon)=-\Xi_0^+P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1G\big[A_1(s)x^{(2)}_{k+3}(s,\varepsilon)+\varepsilon R_3(z_0(s,c^*_r)+x_{k+2}(s,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1x^{(2)}_{k+3}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c^*_r)+x_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](\cdot)+$$

$$+\ell_4x^{(2)}_{k+3}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon J_4(z_0(\cdot,c^*_r)+x_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\ell K\Big[A_1(s)G\big[A_1(\tau)x^{(2)}_{k+3}(\tau,\varepsilon)\varepsilon R_3(z_0(\tau,c^*_r)+x_{k+2}(\tau,\varepsilon),\varepsilon);$$

$$\ell_1x^{(2)}_{k+3}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon J_3(z_0(\cdot,c^*_r)+x_{k+2}(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\big](s)+$$

$$+A_4(s)x^{(2)}_{k+3}(s,\varepsilon)+\varepsilon R_4(z_0(s,c^*_r)+x_{k+2}(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}+P_{\rho_2}c_{\rho_2}(\varepsilon),$$

$$z_{k+3}(t,\varepsilon)=z_0(t,c^*_r)+x_{k+3}(t,\varepsilon),\quad k=1,2,\ldots.$$

Длина отрезка $[0,\varepsilon_*]$, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (17), может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [2], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора типа [12], определяющего итерационную процедуру (17). Ключевая в особом критическом случае матрица Ξ_0 получена в явном виде и в случае периодической задачи совпадает с производной уравнения для порождающих амплитуд (11), использованной И. Г. Малкиным [5] для доказательства аналогичной теоремы. В случае задач фредгольмова типа $m=n$, следовательно, $d=r$ и требование $P_{\Xi_0^*}=0$ становится равносильным условию невырожденности матрицы Ξ_0. В свою очередь, невырожденность матрицы Ξ_0 эквивалентна простоте [6] корня c^*_r уравнения (11).

Если в особом критическом случае выполнены все требования доказанной теоремы, за исключением условия $F_2(c^*_r)=0$, то краевая задача (1), (2) имеет искомое решение, но это решение не может быть найдено с помощью итерационной процедуры (17). В этом случае для нахождения решения операторной системы (16) можно воспользоваться методом простых итераций либо разложением искомого решения в ряд.

Пример. В качестве иллюстрации схемы анализа краевой задачи (1), (2) в особом критическом случае рассмотрим известное уравнение [5, 7], описывающее движение маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания высокой частоты. В частном случае это уравнение имеет вид

$$y'' = -\varepsilon^2 \sin y - 2\varepsilon \sin y \cos t.$$

Согласно принятым соглашениям, приходим к задаче о нахождении 2π-периодического решения

$$z(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\big(z_a(t,\varepsilon), z_b(t,\varepsilon)\big),$$

$$z_j(\cdot,\varepsilon) \in C^1[0,T], \quad z_j(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad j = 1,2,$$

дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dt} = Az + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{18}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z(z,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \sin z_a - 2\sin z_a \cos t \end{pmatrix}.$$

Нормальная фундаментальная матрица линейной однородной части системы (18)

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

определяет матрицу Q, псевдообратную матрицу и ее ортопроекторы

$$Q = 2\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q^+ = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{Q^*} \neq 0$, имеет место критический случай. Традиционное необходимое условие существования 2π-периодического решения системы (18) выполняется тождественно $F_0(c_r) \equiv 0$ при любом действительном c_r, следовательно, 2π-периодическая задача для системы (18) представляет особый критический случай. Вычисляя производные нелинейной вектор-функции $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$

$$A_1(t,c_r) = -2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cos c_r \cos t, \qquad A_3(t,c_r) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin c_r,$$

приходим к уравнению для порождающих амплитуд 2π-периодической задачи для системы (18): $F_1(c_r) = -2\pi(2\cos c_r + 1)\sin c_r = 0$. Серия корней $c_r^* = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, уравнения для порождающих амплитуд соответствует положениям равновесия системы (18), определяющих верхнее и нижнее положения равновесия маятника. Серия корней, определяемых равенством $\cos c_r^* = -\dfrac{1}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, определяет амплитуды порождающих решений $z_0(s, c_r^*)$, в которые могут обращаться искомые 2π-периодические решения системы (18). Положим для определенности $c_r^* = \dfrac{2\pi}{3}$. Таким образом, найдено порождающее решение $z_0(t, c_r^*) = \dfrac{2\pi}{3}\,\mathrm{col}(1, 0)$. Матрица $\Xi_0 = 3\pi$, соответствующая этому корню, невырождена, что свидетельствует о простоте корней уравнения $F_1(c_r) = 0$ для порождающих амплитуд 2π-периодической задачи для системы (18) и гарантирует разрешимость этой задачи. Таким образом, разрешимость периодической задачи для системы (18) доказана. Условие $F_2(c_r^*) = 0$, гарантирующее применимость итерационной процедуры (17) для приближенного решения 2π-периодической задачи, для системы (18) выполнено. Согласно итерационной процедуре (17), первое приближение к отклонению $x(t, \varepsilon)$ от порождающего решения периодической задачи для системы (18) имеет вид

$$x_1(t, \varepsilon) = 2\varepsilon \sin c_r^* \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

а второе — $x_2(t, \varepsilon) = X_r(t) c_{r_1}(\varepsilon) + x_2^{(1)}(t, \varepsilon)$, где

$$x_2^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon\sqrt{3} \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ -\sin t \end{pmatrix} + \varepsilon^2\sqrt{3} \begin{pmatrix} \cos t - \dfrac{7}{8} - \dfrac{1}{8}\cos 2t \\ -\sin t + \dfrac{1}{4}\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Нахождение вектора $c_{r_1}(\varepsilon)$ невозможно в элементарных функциях, поэтому используем разложение нелинейности дифференциального уравнения (18) в ряд Тейлора в окрестности точек $x = 0$ и $\varepsilon = 0$, пренебрегая членами, содержащими $\varepsilon^4, \varepsilon^5, \ldots$:

$$Z(z_1(t, \varepsilon), t, \varepsilon) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos t - 1) - \varepsilon^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}(\cos^2 t - 2\cos t + 1) + \ldots \right),$$

при этом вектор

$$c_{r_1}(\varepsilon) \approx \frac{127}{48} \cdot \sqrt{3}\varepsilon^2.$$

Итак, на втором шаге итерационной процедуры, пренебрегая членами, содержащими ε^3, $\varepsilon^4, \ldots$, находим второе приближение

$$z_2(t, \varepsilon) \approx \frac{2\pi}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{127}{48} \cdot \sqrt{3}\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{0} + x_2^{(1)}(t, \varepsilon)$$

к 2π-периодическому решению системы (18).

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 p.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1986. – 224 с.
4. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.

6. *Бойчук А. А., Чуйко С. М., Чуйко А. С.* Неавтономные периодические краевые задачи в особом критическом случае // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 1. – С. 53 – 66.
7. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1951.– **21**, № 5. – С. 499 – 597.
8. *Постников М. М.* Введение в теорию Морса. – М.: Наука, 1971. – 567 с.
9. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
10. *Чуйко С. М.* Нетерова краевая задача в особом критическом случае // Доп. НАН України. – 2007. – № 2. – С. 26 – 30.
11. *Деннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.
12. *Чуйко А. С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 2. – С. 278 – 288.

Получено 23.03.08