К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.5

А. В. Бондаренко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
Я. Я. Гілевич (Центр теор. фізики, Люміні, Марсель, Франція)

НЕГАТИВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ У ПОТОЧКОВОМУ 3-ОПУКЛОМУ НАБЛИЖЕННІ МНОГОЧЛЕНАМИ

Let Δ^3 be a set of functions three times continuously differentiable on $[-1, 1]$ and such that $f'''(x) \geq 0$, $x \in [-1, 1]$. We prove that, for arbitrary $n \in \mathbb{N}$ and $r \geq 5$, there exists a function $f \in C^r[-1, 1] \cap \Delta^3[-1, 1]$ such that $\| f^{(r)} \|_{C[-1, 1]} \leq 1$ and, for an arbitrary algebraic polynomial $P \in \Delta^3[-1, 1]$, there exists x such that

$$| f(x) - P(x) | \geq C\sqrt{n}\, \rho_n^r(x),$$

where $C > 0$ is a constant depending only on r, $\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}$.

Пусть Δ^3 является множеством трижды непрерывно дифференцируемых функций на $[-1, 1]$ таких, что $f'''(x) \geq 0$, $x \in [-1, 1]$. Доказано, что для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $r \geq 5$ существует функция $f \in C^r[-1, 1] \cap \Delta^3[-1, 1]$ такая, что $\| f^{(r)} \|_{C[-1, 1]} \leq 1$, и для произвольного алгебраического полинома $P \in \Delta^3[-1, 1]$ существует x такое, что

$$| f(x) - P(x) | \geq C\sqrt{n}\, \rho_n^r(x),$$

где $C > 0$ — постоянная, зависящая только от r, $\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}$.

1. Вступ. Нехай $C[a, b]$ — простір неперервних на $[a, b]$ функцій із рівномірною нормою $\|\cdot\|_{[a,b]} := \|\cdot\|_{C[a,b]}$. Нехай функція f належить простору Соболєва $W^r_\infty[-1, 1]$, тобто простору функцій, у яких похідна $f^{(r-1)}$ є абсолютно неперервною на $[-1, 1]$ та $f^{(r)} \in L_\infty[-1, 1]$. Сформулюємо тепер класичну теорему для поточкового наближення алгебраїчними поліномами [1].

Теорема. *Нехай $f \in W^r_\infty[-1, 1]$, тоді для довільного $n \geq r - 1$ існує многочлен $p_n \in \mathcal{P}_n$ із простору $\mathcal{P}_n$ многочленів степеня не вищого за n такий, що*

$$| f(x) - p_n(x) | < C(r)\, \rho_n^r(x) \| f^{(r)} \|_{L_\infty[-1,1]}, \quad x \in [-1, 1],$$

де $C(r)$ — константа, яка залежить від r, $\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1 - x^2}$.

Виникає питання: чи справджуються аналоги цієї нерівності у випадку формозберігаючого наближення?

Позначимо через $\Delta^q[a, b]$ клас q-опуклих функцій на відрізку $[a, b]$. Для $q = 1$ та $q = 2$ класами $\Delta^q[a, b]$ є класи монотонних та опуклих на відрізку $[a, b]$ функцій відповідно. Для $q \geq 3$ $\Delta^q[a, b]$ — клас неперервних на $[a, b]$

функцій, які мають опуклу похідну $f^{(q-2)}$ на інтервалі (a, b). У цій роботі буде розглянуто окремий випадок такої задачі: при яких $q, r \in \mathbb{N}$ для довільних $f \in W_\infty^r[-1,1] \cap \Delta^q[-1,1]$ та $n \geq r-1$ існує $p_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^q[-1,1]$ таке, що

$$|f(x) - p_n(x)| < C(r,q)\,\rho_n^r(x) \left\| f^{(r)} \right\|_{L_\infty[-1,1]}, \quad x \in [-1,1], \tag{1}$$

де $C(r, q)$ — константа, яка залежить тільки від r та q.

Для $q = 1$ та $q = 2$ нерівність (1) було доведено при всіх $r \in \mathbb{N}$ (див., наприклад, [1]). З іншого боку, для $q \geq 4$, $r \geq 3$ у роботі [2] доведено, що нерівність (1) не має місця, та побудовано відповідні контрприклади. Для $q \geq 3$ у роботі [3] встановлено нерівність (1) при $r = 1$ і $r = 2$.

Основним результатом даної роботи є побудова контрприкладів до нерівності (1) у випадку $q = 3$, $r \geq 5$. Для цього використано техніку, запроваджену в [4]. Ми доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Для довільного* $n \in \mathbb{N}$ *існує функція* $f \in C^5[-1,1] \cap \Delta^3[-1,1]$ *така, що* $\left\| f^{(5)} \right\|_{C[-1,1]} \leq 1$, *та для довільного* $P \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^3[-1,1]$ *існує* x *таке, що*

$$|f(x) - P(x)| \geq C\sqrt{n}\,\rho_n^5(x),$$

де $C > 0$ *— абсолютна стала.*

Теорема 2. *Для довільних* $n \in \mathbb{N}$ *та* $r \geq 5$ *існує функція* $f \in C^r[-1,1] \cap \Delta^3[-1,1]$ *така, що* $\left\| f^{(r)} \right\|_{C[-1,1]} \leq 1$, *та для довільного* $P \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^3[-1,1]$ *існує* x *таке, що*

$$|f(x) - P(x)| \geq C\sqrt{n}\,\rho_n^r(x),$$

де $C > 0$ *— стала, що залежить лише від* r.

2. Доведення теорем. У подальшому будемо писати Δ^3 замість $\Delta^3[-1,1]$.

Позначимо $I_n := \left[-1, -1 + \dfrac{1}{n}\right] \cup \left[1 - \dfrac{1}{n}, 1\right]$ та для функції $f \in C[-1,1]$ визначимо $\|f\|_{I_n} := \max_{x \in I_n} |f(x)|$. Для доведення теореми 1 нам знадобляться декілька лем.

Лема 1. *Нехай* f *— опукла на* $[a, b]$ *функція,* $x^* \in [a, b]$, $f(a) \leq 0$, $f(x^*) < 0$. *Тоді при всіх* $t \in [a, x^*]$ *виконується нерівність*

$$\int_a^t f(x)\,dx \leq \frac{1}{2} f(x^*) \frac{(t-a)^2}{b-a}.$$

Доведення. Розглянемо пряму

$$l(x) = f(x^*) \frac{x-a}{x^*-a}, \quad x \in [a, b].$$

Оскільки функція f є опуклою, то $l(x) \geq f(x)$ при всіх $x \in [a, x^*]$, тому

$$\int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t l(x)\,dx = \int_a^t f(x^*) \frac{x-a}{x^*-a}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} f(x^*) \frac{(t-a)^2}{x^*-a} \leq \frac{1}{2} f(x^*) \frac{(t-a)^2}{b-a}.$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай* f — *опукла на* $[a, b]$ *функція*, $a < a_1 < x^* < b$, $f(a) > 0$, $f(a_1) = 0$, $f(x^*) < 0$. *Тоді при всіх* $t \in [a, a_1]$ *виконується нерівність*

$$\int_a^t f(x)\,dx \ \geq\ -\frac{1}{2} f(x^*) \frac{(t-a)^2}{b-a}.$$

Доведення. Розглянемо пряму

$$l(x) \ = \ f(x^*) \frac{x - a_1}{x^* - a_1}, \quad x \in [a, b].$$

Оскільки функція f є опуклою, то $l(x) \leq f(x)$ при всіх $x \in [a, a_1]$. Звідси отримуємо

$$\int_a^t f(x)\,dx \ \geq \ \int_a^t l(x)\,dx \ \geq \int_{a_1-(t-a)}^{a_1} l(x)\,dx \ = \int_{a_1-(t-a)}^{a_1} f(x^*)\frac{x-a_1}{x^*-a_1}\,dx \ =$$

$$= \ -\frac{1}{2} f(x^*) \frac{(t-a)^2}{x^* - a_1} \ \geq \ -\frac{1}{2} f(x^*) \frac{(t-a)^2}{b-a}.$$

Лему 2 доведено.

Позначимо тепер $x_+ := (|x| + x)/2$. Наведемо твердження, необхідне нам у подальшому (доведення див. у [5]).

Твердження. *Для будь-якого* $p \in \mathcal{P}_n$ *маємо*

$$\| x_+ - p(x) \|_{[-1,1]} \ > \ \frac{1}{160 n} \ > \ \frac{1}{2^8 n}. \tag{2}$$

Доведемо тепер основну лему.

Лема 3. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, $P \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^3$, $g(x) := P(x) - \dfrac{x_+^2}{2}$, *тоді* $\| g \|_{I_n} \geq$ $\geq \dfrac{1}{2^{26} n^4}$.

Доведення. Нехай $\| P'' \|_{[-2/3, 2/3]} > 2$, тоді, оскільки P'' є монотонною, маємо $P''(x) > 2$ при всіх $x \in [1 - 1/n, 1]$ або $P''(x) < -2$ при всіх $x \in [-1, -1 + 1/n]$. Якщо $P''(x) > 2$ при всіх $x \in [1 - 1/n, 1]$, то $g''(x) > 1$ при всіх $x \in [1 - 1/n, 1]$. Далі з формули Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа випливає, що для деякого $\eta \in [1 - 1/n, 1]$

$$g(1) \ - \ 2g\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \ + \ g\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ = \ \frac{1}{4n^2} g''(\eta) \ > \ \frac{1}{4n^2},$$

а отже, $\| g \|_{[1-1/n, 1]} > \dfrac{1}{16 n^2}$. Аналогічно розглядається випадок $P''(x) < -2$ при всіх $x \in [-1, -1 + 1/n]$.

Нехай $\| P'' \|_{[-2/3, 2/3]} \leq 2$. Припустимо тепер, що лема не є правильною, та доведемо існування $x^* \in [-1 + 1/n, 1 - 1/n]$ такого, що $g'(x^*) < -\dfrac{1}{2^{22} n^2}$. Дійсно, згідно з (2) $\| g' \|_{[-1/2, 1/2]} \geq \dfrac{1}{2^9 n}$. Нехай $x_1 \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ таке, що $|g'(x_1)| = \| g' \|_{[-1/2, 1/2]}$. Якщо $g'(x_1) < 0$, то лему доведено. Якщо ж $g'(x_1) > 0$ та $g'(x^*) > -\dfrac{1}{2^{22} n^2}$ при всіх $x^* \in [-1 + 1/n, 1 - 1/n]$, то

$$g\left(1-\frac{1}{n}\right) - g\left(-1+\frac{1}{n}\right) = \int\limits_{-1+1/n}^{1-1/n} g'(x)dx > \int\limits_{x_1-1/2^{11}n}^{x_1+1/2^{11}n} g'(x)dx - 2\frac{1}{2^{22}n^2} \geq$$

$$\geq \int\limits_{x_1-1/2^{11}n}^{x_1+1/2^{11}n} g'(x_1) - \|g''\|_{[-2/3,2/3]}|x_1-x|dx - 2\frac{1}{2^{22}n^2} \geq \frac{1}{2^{21}n^2}.$$

Тому у цьому випадку $\|g\|_{I_n} \geq \frac{1}{2^{22}n^2}$. Отже, існує $x^* \in [-1 + 1/n, 1 - 1/n]$ таке, що $g'(x^*) < -\frac{1}{2^{22}n^2}$. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $x^* \in [-1 + 1/n, 0]$.

Нехай $g'(-1) \leq 0$. Тоді на підставі леми 1 для функції g' на проміжку $[-1, 0]$ отримуємо

$$g\left(-1+\frac{1}{n}\right) - g(-1) = \int\limits_{-1}^{-1+1/n} g'(x)dx \leq \frac{1}{2}g'(x^*)\frac{1}{n^2} \leq -\frac{1}{2^{23}n^4},$$

звідки $\|g\|_{I_n} \geq \frac{1}{2^{24}n^4}$.

Нехай $g'(-1) > 0$. Тоді існує $a_1 \in (-1, x^*)$ таке, що $g'(a_1) = 0$. Якщо $a_1 \leq \leq -1 + \frac{1}{2n}$, то згідно з лемою 1 маємо

$$g\left(-1+\frac{1}{n}\right) - g(a_1) = \int\limits_{a_1}^{-1+1/n} g'(x)dx \leq \frac{1}{2}g'(x^*)\frac{1}{4n^2} \leq -\frac{1}{2^{25}n^4}.$$

Звідси $\|g\|_{I_n} \geq \frac{1}{2^{26}n^4}$. Якщо ж $a_1 > -1 + \frac{1}{2n}$, то згідно з лемою 2

$$g\left(-1+\frac{1}{2n}\right) - g(-1) = \int\limits_{-1}^{-1+1/2n} g'(x)dx \geq -\frac{1}{2}g'(x^*)\frac{1}{4n^2} \geq \frac{1}{2^{25}n^4}.$$

Звідси $\|g\|_{I_n} \geq \frac{1}{2^{26}n^4}$. Таким чином, у довільному випадку $\|g\|_{I_n} \geq \frac{1}{2^{26}n^4}$.

Лему 3 доведено.

***Доведення теореми* 1.** Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $h := \frac{1}{2^{14}n}$,

$$s(x) := \begin{cases} 0, & x \leq -h, \\ \dfrac{\int_{-h}^{x}\left(h^2-u^2\right)^3 du}{\int_{-h}^{h}\left(h^2-u^2\right)^3 du}, & x \in [-h, h], \\ 1, & x \geq h, \end{cases}$$

$$S := \int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-1}^{x} s(t)dt - x_+\right)dx, \quad \lambda := \frac{1-\sqrt{1-8S}}{2}$$

і нарешті

$$g(x) := \frac{1}{1-\lambda}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{t} s(u-\lambda)\,du\,dt.$$

Враховуючи, що $2S = \lambda(1-\lambda)$, маємо

$$g(x) - \frac{x_+^2}{2} = \begin{cases} 0, & x \in \left[-1, -1+\frac{1}{n}\right], \\ \frac{S(1-x)^2}{(1-\lambda)^2}, & x \in \left[1-\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

З геометричних міркувань очевидно, що $S \le \frac{3}{2}h^2$, крім того, з означення λ випливає, що $\frac{1}{(1-\lambda)^2} \le 2$. Тепер згідно з лемою 3 для довільного $P \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^3$ отримуємо

$$\|g-P\|_{I_n} \ge \left\|\frac{x_+^2}{2} - P\right\|_{I_n} - \left\|g - \frac{x_+^2}{2}\right\|_{I_n} \ge \frac{1}{2^{26}n^4} - 3\frac{1}{2^{28}n^2}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2^{28}n^4}.$$

Легко показати, що існує абсолютна константа C така, що $\left\|g^{(5)}\right\|_{[-1,1]} \le Cn^3$. Покладемо $f := \frac{g}{Cn^3}$. Очевидно, $\left\|f^{(5)}\right\|_{[-1,1]} \le 1$. Крім того, для довільного $P \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^3$ маємо

$$\|f-P\|_{I_n} \ge \frac{1}{C2^{28}n^7}.$$

З іншого боку, при всіх $x \in I_n$ $\rho_n^5(x) < \frac{6}{n^{7,5}}$, звідки в свою чергу випливає теорема 1.

Доведення теореми **2** є аналогічним доведенню теореми 1, якщо замість $s(x)$ взяти

$$s_0(x) := \begin{cases} 0, & x \le -h, \\ \dfrac{\int_{-h}^{x}\left(h^2-u^2\right)^{r-2}du}{\int_{-h}^{h}\left(h^2-u^2\right)^{r-2}du}, & x \in [-h, h], \\ 1, & x \ge h. \end{cases}$$

1. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 225 с.
2. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Shape-preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions on a finite interval // Isr. J. Math. – 2003. – **133**. – P. 239 – 268.
3. *Cao J., Gonska H.* Pointwise estimates for higher order convexity preserving polynomial approximation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1994. – **36**. – P. 213 – 233.
4. *Бондаренко А. В., Примак А. В.* Отрицательные результаты в формосохраняющем приближении высших порядков // Мат. заметки. – 2004. – **76**, № 6. – С. 812 – 823.
5. *Dzyadyk V. K., Shevchuk I. A.* Theory of uniform approximation of functions by polynomials. – Walter De Gruyter, 2008. – 280 p.

Одержано 12.08.08