УДК 512.628 + 517.952

В. С. Гавран (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРОСТІ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ВИЩОГО СТЕПЕНЯ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ

A new class of simple differentiations of arbitrary degree of a ring of two-variable polynomials is presented.

Указан новый класс простых дифференцирований произвольной степени кольца многочленов от двух переменных.

Нехай k — поле характеристики 0, $R = k[x, y]$ — кільце многочленів над k. *Диференціюванням* δ кільця R називають таке k-лінійне відображення $\delta\colon R \to R$, що для всіх $f, g \in R$ виконується рівність $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$. Кожне диференціювання δ кільця R можна однозначно подати у вигляді

$$\delta = f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

для деяких $f_1, f_2 \in R$. Ідеал I кільця R називають *δ-інваріантним*, якщо $\delta(I) \subseteq \subseteq I$. Диференціювання δ кільця R називають *простим*, якщо R не має інших δ-інваріантних ідеалів, крім 0 і R. Такі диференціювання відіграють важливу роль у багатьох задачах. Наприклад, кільце скручених многочленів $R[t, \delta]$ є простим тоді й лише тоді, коли δ є простим диференціюванням [1] (теорема 8.4). Так само алгебра Лі, визначена на просторі R правилом $[a, b] = a\delta(b) - \delta(a)b$, є простою тоді й лише тоді, коли δ є простим [2]. Нагадаємо також, що коли диференціювання $\delta = \dfrac{\partial}{\partial x} + f\dfrac{\partial}{\partial y}$ є простим, то існують многочлени G такі, що фактор-модуль $A_2/A_2(\delta + G)$ є простим негололомним A_2-модулем, де A_2 — алгебра Вейля або алгебра диференціальних операторів на площині [3] (теорема 2.1). Нарешті, якщо f_1 та f_2 не мають спільних нулів, простота диференціювання δ рівносильна тому, що воно не має *многочленів Дарбу*, тобто таких многочленів $F \notin k$, що $\delta F = \Lambda F$ для деякого многочлена Λ, який називають *кофактором* [4] (твердження 2.1).

Задача пошуку необхідних і достатніх умов для f_1, f_2, за яких δ буде простим, є досить складною, і поки що її розв'язано лише в деяких окремих випадках. Так, у роботах [2, 4, 5] розглянуто диференціювання

$$\frac{\partial}{\partial x} + (a(x)y + b(x))\frac{\partial}{\partial y}, \quad a(x),\ b(x) \in k[x], \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - p(x))\frac{\partial}{\partial y}, \quad p(x) \in k[x], \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} + (y^m + ax)\frac{\partial}{\partial y}, \quad m \geqslant 2, \quad 0 \neq a \in k. \tag{3}$$

Для диференціювання (1) було встановлено необхідні та достатні умови його простоти, для (2) вказано лише деякі достатні умови. У роботі [5] доведено, що диференціювання (3) є простим. Ми доведемо наступну теорему, яка значно узагальнює останній результат.

Теорема. *Нехай k — поле характеристики* 0, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $a \in k \setminus \{0\}$. *Тоді диференціювання*

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + (y^m + ax^n)\frac{\partial}{\partial y}$$

кільця $k[x,y]$ буде простим.

Згідно з твердженням 10.1 [4] можемо вважати поле k алгебраїчно замкненим. Тоді в полі k існують такі елементи β і γ, що $\beta^{mn+m-n} = a^{1-m}$, $\gamma = a\beta^{n+1}$. Розглянемо k-автоморфізм $\tau\colon k[x,y] \to k[x,y]$ такий, що $\tau(x) = \beta x$, $\tau(y) = \gamma y$. Тоді $d = \beta^{-1}\tau D\tau^{-1}$, де

$$d = \frac{\partial}{\partial x} + (y^m + x^n)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Очевидно, d і D є простими одночасно. Отже, як зазначено вище, достатньо довести такий результат.

Твердження. *Диференціювання d не має многочленів Дарбу.*

Доведення. Припустимо, що диференціювання d має многочлен Дарбу $F \in k[x,y] \setminus k$ і $\Lambda \in k[x,y]$ — відповідний кофактор, тобто виконується рівність

$$d(F) = \Lambda F. \tag{4}$$

Нехай $\deg_y F = s$. З рівності (4) маємо $s > 0$. Нехай старший член многочлена F відносно y дорівнює vy^s, $v \in k[x]$, $v \neq 0$, тобто $F = vy^s + F_1$, де $\deg_y F_1 < s$, а у многочлена Λ він дорівнює uy^κ, $u \in k[x]$, $u \neq 0$. Прирівнюючи у лівій та правій частинах рівності (4) старші члени відносно y, отримуємо $svy^{s+m-1} = uvy^{\kappa+s}$, звідки $u = s$, $\kappa = m-1$. Таким чином, $\deg_y \Lambda = m-1$. З рівності (4) також маємо очевидну нерівність $\deg_x \Lambda \leqslant n$.

Нехай $\sigma\colon k[x,y] \to k[x,y]$ — такий k-автоморфізм, що

$$\sigma(x) = \varepsilon x, \qquad \sigma(y) = \varepsilon^{n+1} y,$$

де ε — примітивний корінь з одиниці степеня $\nu = mn+m-n$. Порядок автоморфізму σ дорівнює ν. Легко бачити, що ненульовий многочлен f буде σ-інваріантним тоді й лише тоді, коли кожен його моном буде σ-інваріантним, а моном $\alpha x^p y^q$, $\alpha \in k^*$, буде σ-інваріантним тоді й лише тоді, коли $p + (n+1)q$ ділиться на ν. Також легко перевірити, що для кожного i

$$\sigma^{-i} d \sigma^i = \varepsilon^i d. \tag{5}$$

Покладемо

$$\widetilde{F} = \prod_{i=0}^{\nu-1} \sigma^i(F), \qquad \widetilde{\Lambda} = \sum_{i=0}^{\nu-1} \varepsilon^i \sigma^i(\Lambda).$$

Зауважимо, що $\widetilde{F}$, $\widetilde{\Lambda} \in k[x,y]$ і $\widetilde{F} \notin k$, до того ж $\deg_y \widetilde{F} = \nu s$. Також очевидним є те, що $\widetilde{F}$ є σ-інваріантним. З рівностей (4) та (5) маємо $d(\widetilde{F}) = \widetilde{\Lambda}\widetilde{F}$.

Проаналізуємо тепер многочлен $\widetilde{\Lambda}$. Розглянемо довільний моном ax^py^q, $a \neq 0$, що входить у Λ. При $q \leqslant m-2$ маємо нерівність $1 + p + (n+1)q \leqslant 1 + n + (n+1)(m-2) < \nu$. Тому

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} \varepsilon^i \sigma^i(ax^py^q) = ax^py^q \sum_{i=0}^{\nu-1} \varepsilon^{(1+p+(n+1)q)i} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } q < m-1, \\ \nu s y^{m-1}, & \text{якщо } q = m-1 \end{cases}$$

(нагадаємо, що старший член Λ відносно y дорівнює sy^{m-1}). Отже, ми отримали $\widetilde{\Lambda} = \nu s y^{m-1}$.

Наступна лема завершує доведення твердження.

Лема. *Диференціювання d не має σ-інваріантного многочлена Дарбу F з кофактором $\Lambda = sy^{m-1}$, де $s = \deg_y F$.*

Доведення. Будемо вважати, що $n > 1$, оскільки для $n = 1$ теорему доведено в роботі [5]. Припустимо, що диференціювання d має σ-інваріантний многочлен Дарбу $F = v_0 + v_1 x + \ldots + v_l x^l$, де $v_0, \ldots, v_l \in k[y]$, $v_l \neq 0$. Очевидно, що $l > 0$. Прирівнюючи в лівій і правій частинах рівності $d(F) = sy^{m-1}F$ коефіцієнти при x^{i+n}, $-n \leqslant i \leqslant l$, отримуємо рівняння

$$(i+n+1)v_{i+n+1} + v_i' + y^m v_{i+n}' = sy^{m-1}v_{i+n}, \tag{6}$$

в якому вважаємо, що $v_j = 0$ при $j \notin \overline{0,l}$. З цього рівняння випливає, що $v_i' = 0$, тобто $v_i = c_i \in k$ при $i > l-n$. З огляду на те, що $v_l \neq 0$, можна вважати, що $v_l = 1$. Оскільки многочлен F є σ-інваріантним, то $\nu \,|\, l$; більш того, якщо $v_i \in k \setminus \{0\}$, то $\nu \,|\, i$, звідки випливає, що $v_i = 0$ при $l - n < i < l$, тому що $\nu > n$. Далі через $o(y^j)$ будемо позначати довільний многочлен степеня, меншого за j. Покладемо також $l = np + r$, $p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r < n$.

З рівності (6) при $i = l - n$ маємо $v_{l-n}' = sy^{m-1}$, тобто $v_{l-n} = \dfrac{s}{m}y^m + o(y^m)$. Крім того, $v_{l-n-1}' = c_{l-1}y^{m-1} - l = -l$, отже, $v_{l-n-1} = -ly + o(y)$. З рівності (6) та з того, що $\nu \,|\, i + (n+1)\deg v_i$ для кожного i, за індукцією виводимо, що $\deg v_{l-ni-j} \leqslant mi$ для $i \in \overline{0,p}$, $j \in \overline{0, n-1}$, більш того, $\deg v_{l-ni-1} \leqslant m(i-1)+1$, і якщо

$$v_{l-ni} = a_i y^{mi} + o(y^{mi}), \quad \text{а} \quad v_{l-ni-1} = b_i y^{m(i-1)+1} + o(y^{m(i-1)+1}),$$

то $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ для всіх i, причому a_i та b_i задовольняють рекурентні співвідношення

$$a_{i+1} = \frac{s - mi}{m(i+1)} a_i, \tag{7}$$

$$b_{i+1} = \frac{(s - m(i-1) - 1)b_i - (l - ni)a_i}{mi + 1}. \tag{8}$$

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай $r \neq 0$. З рівності (6) при $i = r - n$ та $i = r - n - 1$ отримуємо

$$(r+1)v_{r+1} + y^m v_r' = sy^{m-1}v_r, \tag{9}$$

$$rv_r + y^m v_{r-1}' = sy^{m-1}v_{r-1}. \tag{10}$$

Припустимо спочатку, що $s \neq mi$ для $i = \overline{1, p-1}$. Тоді $a_p > 0$, $\deg v_r = mp$ і $\deg v_{r+1} \leqslant m(p-1)$. Прирівнюючи коефіцієнти при $y^{m(p+1)-1}$ в обох частинах рівності (9), знаходимо $s = mp$. З іншого боку, прирівнюючи в обох частинах рівності (10) коефіцієнти при y^{mp}, одержуємо рівність

$$ra_p + (m(p-1)+1)b_p = sb_p, \tag{11}$$

звідки $b_p = \dfrac{r}{m-1}a_p > 0$. Тоді з рівності (8) випливає, що $b_i > 0$ для всіх i, що неможливо, оскільки $b_1 = -l < 0$.

Припустимо тепер, що $s = mj$ для деякого $j \in \overline{1, p-1}$. Тоді $a_p = \ldots = a_{j+1} = 0$ і з рівності (11) випливає $b_p = 0$. З рівності (8) одержуємо $b_p = \ldots = b_{j+1} = 0$, $b_j = \dfrac{l - nj}{s - m(j-1) - 1} a_j > 0$. Тоді, як і вище, $b_i > 0$ для всіх $i \leqslant j$, що знову приводить до суперечності з тим, що $b_1 < 0$.

Випадок 2. Нехай $r = 0$. Тоді рівність (9) перетворюється на рівність

$$v_1 + y^m v_0' = s y^{m-1} v_0, \tag{12}$$

а з рівності (6) при $i = -1$ маємо

$$n v_n + y^m v_{n-1}' = s y^{m-1} v_{n-1}. \tag{13}$$

Якщо $s \neq mi$ для $i = \overline{1, p-1}$, то аналогічно випадку 1 $a_{p-1} > 0$, з рівності (12) маємо $s = mp$, а з рівності (13) одержуємо рівність

$$n a_{p-1} + (m(p-2) + 1) b_{p-1} = s b_{p-1}, \tag{14}$$

звідки $b_{p-1} = \dfrac{n}{2m-1} a_{p-1} > 0$, і знову приходимо до суперечності з тим, що $b_1 < 0$.

Якщо $s = m(p-1)$, з рівності (14) випливає, що $b_{p-1} = \dfrac{n}{m-1} a_{p-1} > 0$, і знову отримуємо суперечність.

Нарешті, якщо $s = mj$ для деякого $j \in \overline{1, p-2}$, то повністю повторюємо міркування випадку 1.

Твердження доведено.

1. *McConnell J. C., Robson J. C.* Noncommutative Noetherian rings. – Providence: Amer. Math. Soc., 1987. – xx + 636 p.
2. *Nowicki A.* Polynomial derivations and their rings of constants. – Torun: M. Copernicus Univ. Press, 1994.
3. *Doering A. M., Lequain Y., Ripoll C. C.* Differential simplicity and cyclic maximal left ideals of the Weyl algebra $A_2(K)$ // Glasgow Math. J. – 2006. – **48**. – P. 269 – 274.
4. *Maciejewski A., Moulin Ollagnier J., Nowicki A.* Simple quadratic derivations in two variables // Communs Algebra. – 2001. – **29**, № 11. – P. 5095 – 5113.
5. *Nowicki A.* An example of a simple derivation in two variables // Colloq. math. – 2008. – **113**, № 1. – P. – 25 – 31.
6. *Moulin Ollagnier J.* Liouvillian first integrals of homogeneous polynomial 3-dimensional vector fields // Ibid. – 1996. – **70**. – P. 195 – 216.

Одержано 24.09.08