УДК 517.598

М. Я. Барняк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА В ОБЛАСТЯХ ОБЕРТАННЯ З РЕБРИСТОЮ МЕЖЕЮ

A method of the construction of high-precision approximate solutions of boundary-value problems for the Laplace equation in domains with corner points is proposed. Boundary-value problems are considered for the three-dimensional Laplace equation in domains that have the shape of a body of revolution and the meridian cross-section containing corner points. Solutions of the problems are found with the use of variational methods. For the numerical realization of these methods, special solutions of the Laplace equation are constructed that themselves or their partial derivatives have discontinuities on some ray which starts at a corner point and is directed outward a domain. To illustrate the proposed method, solutions of the Neyman problem and the problem of eigenoscillations of ideal liquid in a spherical vessel are constructed.

Предлагается метод построения высокоточных приближенных решений краевых задач для уравнения Лапласа в областях с угловыми точками. Рассматриваются краевые задачи для трехмерного уравнения Лапласа в областях, имеющих форму тела вращения, с меридиональным сечением, имеющим угловые точки. Решения задач строятся с помощью вариационных методов, для численной реализации которых построены специальные решения уравнения Лапласа, которые сами или их частные производные претерпевают разрыв на некотором луче с началом в угловой точке и направленном за пределы области. В качестве иллюстрации предложенного метода построены решения задачи Неймана и задачи о собственных колебаниях идеальной жидкости в сферической полости.

0. Вступ. У цій роботі пропонується методика побудови високоточних наближених аналітичних розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в однозв'язних областях, які мають форму тіла обертання відносно вертикальної осі. Нехай задано однозв'язну область Ω, межа якої S утворена обертанням кусково-гладкої кривої L відносно вертикальної осі z. У цій області будемо розглядати крайові задачі для рівняння Лапласа

$$\Delta\psi = 0. \tag{0.1}$$

В циліндричній системі координат (z, r, η) рівняння Лапласа допускає відокремлення кругової координати η і частинні розв'язки рівняння (0.1) мають вигляд

$$\psi(z, r, \eta) = \psi_m(z, r)\exp(im\eta), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{0.2}$$

де функція $\psi_m(z, r)$ задовольняє рівняння

$$L_m\psi_m(z, r) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_m(z, r)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi_m(z, r)}{\partial z^2} - \frac{m^2\psi_m(z, r)}{r^2} = 0. \tag{0.3}$$

Розв'язки крайових задач для рівняння (0.1) області Ω можна подати у вигляді ряду Фур'є за змінною η

$$\psi(z, r, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty}\psi_m^0(z, r)\cos(m\eta) + \sum_{m=1}^{\infty}\psi_m^1(z, r)\sin(m\eta) \tag{0.4}$$

з коефіцієнтами $\psi_m^0(z, r)$ і $\psi_m^1(z, r)$, які є розв'язками послідовності крайових задач для рівняння (0.3) в меридіональному перерізі G області Ω.

Саме побудова наближених аналітичних розв'язків крайових задач для рівняння (0.3) в областях з кутовими точками є основною метою даної роботи. Розв'язки цих задач мають особливий характер поведінки в околі кутових точок, а тому не можуть бути з достатньою точністю апроксимовані гладкими функціями. Для реалізації варіаційних методів розв'язування цих задач потрібно враховувати особливості розв'язків при виборі координатних функцій.

Зокрема, якщо розглядати крайові задачі для двовимірного рівняння Лапласа

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{0.5}$$

в області G з кутовими точками, то можна однозначно стверджувати, що для довільної гармонічної в G і обмеженої в кутовій точці функції $\varphi(x, y)$, яка має в цій точці неусувну особливість, ця точка не може бути ізольованою особливою точкою. Іншими словами, за межами області G ця функція сама, або її частинні похідні зазнають розриву. Звідси робимо висновок, що при апроксимації шуканих розв'язків крайових задач для рівнянь (0.3) чи (0.5) в областях з кутовими точками до числа координатних функцій поряд з гладкими розв'язками цих рівнянь доцільно включати розв'язки, які самі або їхні частинні похідні зазнають розриву за межею області G. Розв'язки рівняння (0.5) такого типу є відомими. Такими є, наприклад, дійсна та уявна частини функцій типу z^{ν}, $z^m(\ln z)^n$, де $z = x + iy$, ν — дробове число, а m і n — цілі або раціональні числа [1, 2]. Всі ці функції або їхні частинні похідні зазнають розриву на від'ємній частині дійсної осі комплексної площини. Завжди можна вибрати систему декартових координат (x, y) таким чином, щоб точка $z = 0$ була розміщена у кутовій точці області, а промінь $y = 0$, $x < 0$ знаходився за межами області.

Більш складною виявилася задача побудови аналогічних розв'язків рівняння (0.3).

1. Побудова розв'язків тривимірних рівнянь Лапласа та Гельмгольца в областях, які мають форму тіла обертання. Доведемо наступну теорему.

Теорема 1.1. *Нехай задано деяку однозв'язну, обмежену і симетричну відносно осі ординат u область*

$$G = \{(x, u) : a \le u \le b,\ -g(u) \le x \le g(u) > 0\}$$

таку, що перетин її з довільною паралельною осі абсцис x прямою є однозв'язним відрізком, і функція $\varphi(x, u)$ задовольняє рівняння

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \omega^2\varphi = 0 \tag{1.1}$$

в області G. Тоді функція

$$f_m(u, r) = \int_0^{\pi} \varphi(r\cos(t), u)\cos(mt)\,dt \tag{1.2}$$

задовольняє рівняння

$$L_m f_m \equiv \frac{\partial^2 f_m}{\partial u^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f_m}{\partial r}\right) + \frac{m^2}{r^2}f_m + \omega^2 f_m = 0 \tag{1.3}$$

у правій частині області $G_1 = \{(r, u) : a \le u \le b,\ 0 \le r \le g(u) > 0\}$.

Доведення. Покладемо $x = r\cos(t)$, тоді

$$L_m f_m = \int_0^{\pi}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos(t)^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(t) + \frac{m^2}{r^2}\varphi + \omega^2\varphi\right]\cos(mt)\,dt.$$

Розглянемо окремо інтеграл

$$\int_0^\pi \frac{m^2}{r^2}\varphi(r\cos(t),u)\cos(mt)dt = \frac{m}{r^2}\int_0^\pi \varphi(r\cos(t),u)\,d\sin(mt) =$$

$$= \frac{m}{r^2}\varphi(r\cos(t),u)\sin(mt)\Big|_0^\pi + \frac{m}{r}\int_0^\pi \frac{\partial\varphi(r\cos(t),u)}{\partial x}\sin(t)\sin(mt)dt =$$

$$= -\frac{1}{r}\int_0^\pi \frac{\partial\varphi(r\cos(t),u)}{\partial x}\sin(t)\,d\cos(mt) = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r\cos(t),u)}{\partial x}\sin(t)\cos(mt)\Big|_0^\pi +$$

$$+ \int_0^\pi \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r\cos(t),u)}{\partial x}\cos(t)\cos(mt)dt - \int_0^\pi \frac{\partial^2\varphi(r\cos(t),u)}{\partial x^2}\sin(t)^2\cos(mt)dt.$$

В результаті одержимо

$$L_m f_m \equiv \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \omega^2\varphi\right]\cos(mt)dt = 0,$$

що і потрібно було довести.

Якщо покласти $\omega = 0$ і перейти до нової змінної $u = iz + r_0$, то рівняння (1.1) стане рівнянням Лапласа (0.5), а рівняння (1.3) — рівнянням (0.3).

Якщо функція $f_m(u,r)$ задовольняє рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f_m}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2 f_m}{\partial u^2} - \frac{m^2}{r^2}f_m = 0, \tag{1.4}$$

то дійсна та уявна частини функції $\psi_m(z,r) = f_m(iz+r_0, r)$ задовольняють рівняння (0.3).

У подальшому обмежимося розглядом випадку $\omega = 0$, тобто випадку, коли рівняння (1.1) є хвильовим рівнянням і його розв'язок визначається у вигляді суми двох довільних двічі неперервно диференційовних функцій $f_1(u+x) + f_2(u-x)$. Отже, розв'язок рівняння (0.3) можна подати у вигляді

$$\psi_m(z,r) = \int_0^\pi f(iz + r_0 + r\cos(t))\cos(mt)dt, \tag{1.5}$$

де $f(w)$ — довільна аналітична функція комплексної змінної w.

Формула (1.5) є наслідком відомого зображення Уіттекера для гармонічних функцій трьох змінних [3].

Зокрема, якщо в якості функції $f(w)$ вибрати $f(w) = w^k$ і покласти $r_0 = 0$, то одержимо однорідні поліноміальні розв'язки рівняння (0.3) [3, 4]

$$w_k(z,r) = \frac{2^m m!(k-m)!}{i^{k-m}k!\pi}\int_0^\pi (iz + r\cos(t))^k\cos(mt)dt. \tag{1.6}$$

2. Побудова спеціальних розв'язків тривимірного рівняння Лапласа. Якщо ж в якості функції $f(w)$ вибрати функції з особливостями, то одержимо також і розв'язки рівняння (0.3) з особливостями.

Покладемо у формулі (1.5) функцію $f(u + r\cos(t))$ рівною $\ln(u + r\cos(t)) \times (u + r\cos(t))^k$ та позначимо через $v_k^m(u,r)$ функції

$$v_k^m(u,r) = \frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi \ln(u+r\cos(t))(u+r\cos(t))^k\cos(mt)\,dt, \tag{2.1}$$

а через $w_k^m(u,r)$ функції

$$w_k^m(u,r) = \frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi (u+r\cos(t))^k\cos(mt)\,dt. \tag{2.2}$$

При $0 \le k < m$ функції $w_k^m(u,r)$ дорівнюють нулю. Обчислимо частинні похідні від функцій $w_k^m(u,r)$ за змінними u та r:

$$\frac{\partial w_k^m}{\partial u} = \frac{2^m k}{\pi}\int_0^\pi (u+r\cos(t))^{k-1}\cos(mt)\,dt = k w_{k-1}^m, \tag{2.3}$$

$$r\frac{\partial w_k^m}{\partial r} = \frac{2^m k}{\pi}\int_0^\pi (u+r\cos(t))^{k-1}\cos(t)\cos(mt)\,dt =$$

$$= k\frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi (u+r\cos(t))^{k}\cos(mt)\,dt -$$

$$- uk\frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi (u+r\cos(t))^{k-1}\cos(mt)\,dt = k w_k^m - uk w_{k-1}^m. \tag{2.4}$$

Використовуючи інтегральне зображення для функцій $v_k^m(u,r)$, обчислюємо частинні похідні від цих функцій за змінними u та r:

$$\frac{\partial v_k^m}{\partial u} = \frac{2^m k}{\pi}\int_0^\pi \ln(u+r\cos(t))(u+r\cos(t))^{k-1}\cos(mt)\,dt +$$

$$+ \frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi (u+r\cos(t))^{k-1}\cos(mt)\,dt = k v_{k-1}^m + w_{k-1}^m, \tag{2.5}$$

$$r\frac{\partial v_k^m}{\partial r} = k\frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi r\cos(t)\ln(u+r\cos(t))(u+r\cos(t))^{k-1}\cos(mt)\,dt +$$

$$+ \frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi r\cos(t)\,(u+r\cos(t))^{k-1}\cos(mt)\,dt =$$

$$= k\frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi \ln(u+r\cos(t))(u+r\cos(t))^{k}\cos(mt)\,dt -$$

$$- u\frac{2^m k}{\pi}\int_0^\pi \ln(u+r\cos(t))(u+r\cos(t))^{k-1}\cos(mt)\,dt +$$

$$+ \frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi (u+r\cos(t))^{k}\cos(mt)\,dt - u\frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi (u+r\cos(t))^{k-1}\cos(mt)\,dt =$$

$$= k v_k^m - ku v_{k-1}^m + w_k^m - u w_{k-1}^m. \tag{2.6}$$

При $k = 0$ ці формули набирають вигляду

$$\frac{\partial v_0^m}{\partial u} = w_{-1}^m, \qquad r\frac{\partial v_0^m}{\partial r} = w_0^m - uw_{-1}^m.$$

Використовуючи одержані вище співвідношення для перших частинних похідних від функцій $w_k^m(u, r)$ і $v_k^m(u, r)$, одержуємо співвідношення для визначення других частинних похідних від цих функцій:

$$\frac{\partial^2 w_k^m}{\partial u^2} = k(k-1)w_{k-2}^m,$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_k^m}{\partial r}\right) = k^2 w_k^m - uk(2k-1)w_{k-1}^m + u^2 k(k-1)w_{k-2}^m,$$

$$\frac{\partial^2 v_k^m}{\partial u^2} = k(k-1)v_{k-2}^m + k(2k-1)w_{k-2}^m,$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_k^m}{\partial r}\right) = k^2 v_k^m + 2kw_k^m - uk(2k-1)v_{k-1}^m - u(4k-1)w_{k-1}^m +$$

$$+ u^2 k(k-1)v_{k-2}^m + u^2(2k-1)w_{k-2}^m.$$

При $k = 1$ і $m \geq 1$ ці формули набирають вигляду

$$\frac{\partial^2 v_1^m}{\partial u^2} = w_{-1}^m, \qquad r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_1^m}{\partial r}\right) = v_1^m + w_1^m - uv_0^m + u^2 w_{-1}^m.$$

Підставляючи одержані співвідношення у рівняння (1.3), отримуємо рекурентні формули для функцій $w_k^m(u, r)$ і $v_k^m(u, r)$:

$$\begin{aligned} &(k^2 - m^2)w_k^m - uk(2k-1)w_{k-1}^m + (u^2 - r^2)k(k-1)w_{k-2}^m = 0, \\ &(k^2 - m^2)v_k^m + 2kw_k^m - uk(2k-1)v_{k-1}^m - u(4k-1)w_{k-1}^m + \\ &+ (u^2 - r^2)k(k-1)v_{k-2}^m + (u^2 - r^2)(2k-1)w_{k-2}^m = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

При $k = 1$ і $m > 1$ остання формула набирає вигляду

$$(1 - m^2)v_1^m - uv_0^m + (u^2 - r^2)w_{-1}^m = 0.$$

Для обчислення послідовності функцій $w_k^m(u, r)$ і $v_k^m(u, r)$ при $m \geq 1$ спочатку необхідно знайти значення функцій $w_{-1}^m(u, r)$ і $v_0^m(u, r)$, а потім за допомогою формул (1.3) визначити функції $v_k^m(u, r)$ до $k = m - 1$ включно.

Функції $w_{-1}^m(u, r)$ і $v_0^m(u, r)$ мають вигляд

$$w_{-1}^m = \frac{1}{\sqrt{u^2 - r^2}}\left(2\frac{\sqrt{u^2 - r^2} - u}{r}\right)^m \quad \text{при} \quad m \geq 0, \tag{2.8}$$

$$v_0^m = -\frac{1}{m}\left(2\frac{\sqrt{u^2 - r^2} - u}{r}\right)^m \quad \text{при} \quad m \geq 1. \tag{2.9}$$

Для функції $v_0^0(u, r)$, згідно з формулою (2.1), отримуємо

$$v_0^0(u, r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln(u + r\cos(t))dt = \ln\left(\frac{\sqrt{u^2 - r^2} + u}{2}\right). \tag{2.10}$$

При $m = 0$ з огляду на формули (2.8), (2.9) і (2.1), використовуючи рекурентні формули (2.7), можна знайти послідовність значень функцій $v_k^0(u, r)$.

Більш складною є задача визначення значень функцій $v_k^m(u, r)$ при $m \geq 1$.

На основі рекурентних формул (2.7) можна знайти послідовність значень функцій $v_k^m(u, r)$ від $k = 1$ до $k = m - 1$ включно. Визначити значення функції $v_m^m(u, r)$ за допомогою рекурентної формули (2.7) не вдається, оскільки при $k = m$ коефіцієнт при $v_k^m(u, r)$ дорівнює нулю. Функцію $v_k^m(u, r)$ визначимо ще в такий спосіб:

$$v_k^m(u, r) = \frac{2^m}{\pi}\int_0^\pi \ln(u + r\cos(t))(u + r\cos(t))^k \cos(mt)\,dt =$$

$$= \frac{2^m u}{\pi}\int_0^\pi \ln(u + r\cos(t))(u + r\cos(t))^{k-1} \cos(mt)\,dt +$$

$$+ \frac{2^m r}{\pi}\int_0^\pi \ln(u + r\cos(t))(u + r\cos(t))^{k-1} \cos(t)\cos(mt)\,dt =$$

$$= \frac{2^{m-1} r}{\pi}\int_0^\pi \ln(u + r\cos(t))(u + r\cos(t))^{k-1} \cos((m-1)t)\,dt +$$

$$+ \frac{2^{m-1} r}{\pi}\int_0^\pi \ln(u + r\cos(t))(u + r\cos(t))^{k-1} \cos((m+1)t)\,dt +$$

$$+ u v_{k-1}^m(u, r) = u v_{k-1}^m(u, r) + r v_{k-1}^{m-1}(u, r) + \frac{r}{4} v_{k-1}^{m+1}(u, r). \tag{2.11}$$

Вважаємо, що $k = m$, тоді

$$v_m^m(u, r) = u v_{m-1}^m(u, r) + r v_{m-1}^{m-1}(u, r) + \frac{r}{4} v_{m-1}^{m+1}(u, r). \tag{2.12}$$

За допомогою одержаної рекурентної формули визначимо функцію $v_1^1(u, r)$. Для цього запишемо, згідно з (2.9), такі функції:

$$v_0^1(u, r) = -2\frac{\sqrt{u^2 - r^2} - u}{r}, \qquad v_0^2(u, r) = -2\left(\frac{\sqrt{u^2 - r^2} - u}{r}\right)^2. \tag{2.13}$$

Далі, у відповідності з формулою (2.8) отримуємо

$$v_1^1(u, r) = u v_0^1(u, r) + r v_0^0(u, r) + \frac{r}{4} v_0^2(u, r) =$$

$$= r\ln\left(\frac{\sqrt{u^2 - r^2} + u}{2}\right) + \frac{r}{2} - u\frac{\sqrt{u^2 - r^2} - u}{r}. \tag{2.14}$$

Тепер на основі функцій $v_0^1(u, r)$ і $v_1^1(u, r)$ та рекурентної формули (2.7) можна побудувати довільну функцію $v_k^1(u, r)$, а за допомогою формул (2.5) і (2.6) визначити частинні похідні від цих функцій. Аналогічно можна обчислювати значення функцій $v_k^m(u, r)$ для довільних значень m і k, використовуючи рекурентні співвідношення (2.7), (2.11) і (2.12).

Як було зазначено вище, після заміни змінної $u = iz + r_0$ дійсна та уявна частини функції $v_k^m(iz + r_0, r)$ задовольняють рівняння (0.3).

Вивчимо деякі характерні властивості функцій $v_k^m(iz + r_0, r)$ при $r_0 > 0$, як функцій змінних z та r. Підінтегральний вираз в (2.1) можна перетворити таким чином:

$$F(z,r) = \ln(iz + r_0 + r\cos(t))(iz + r_0 + r\cos(t))^k \cos(mt) =$$

$$= r_0^k \left(\ln(r_0) + \ln\left(i\frac{z}{r_0} + 1 + \frac{r}{r_0}\cos(t)\right)\right)\left(i\frac{z}{r_0} + 1 + \frac{r}{r_0}\cos(t)\right)^k \cos(mt).$$

Це означає, що функцію $v_k^m(iz + r_0, r)$ можна подати у вигляді

$$v_k^m(iz + r_0, r) = r_0^k v_k^m(iz_1 + 1, r_1) + \ln(r_0) r_0^k w_k^m(iz_1 + 1, r_1),$$

де $z_1 = z/r_0$, $r_1 = r/r_0$.

Отже, дослідження функцій $v_k^m(iz + r_0, r)$ при довільному додатному значенні r_0 зводиться до дослідження функцій $v_k^m(iz + 1, r)$.

При $r < 1$ для довільних дійсних t і цілих k значень функція

$$F(z,r) = \ln(iz + 1 + r\cos(t))(iz + 1 + r\cos(t))^k \cos(mt)$$

є комплекснозначною, довільне число разів неперервно диференційовною функцією змінних z і r. Тому такими будуть при $r < 1$ і функції $v_k^m(iz + 1, r)$.

Зокрема, при $r = 0$ функції $v_k^0(iz + 1, 0)$ набувають значень $v_k^0(iz + 1, r) = \ln(iz + 1)(iz + 1)^k$, а для $m > 0$ $v_k^m(iz + 1, 0) = 0$, тобто при $r = 0$ вони є обмеженими за модулем. Функція $\ln(iz + 1 + r\cos(t))$ зазнає скінченного розриву при $z = 0$ і $r > 1$ для значень параметра t, що задовольняють нерівність $-1 \le \cos(t) < -r_0/r$, а тому дійсна та уявна частини функції $v_k^m(iz + 1, r)$ та її частинні похідні також можуть зазнавати розриву на промені $\Lambda = \{(z,r)\colon z = 0,\ r > r_0 > 0\}$.

Розглянемо більш детально функцію $v_0^m(u, r)$:

$$v_0^m(iz + r_0, r) = -(m-1)!\left(2\frac{\sqrt{(iz + r_0)^2 - r^2} - (iz + r_0)}{r}\right)^m. \tag{2.15}$$

Дослідимо поведінку $v_0^m(iz + r_0)$, коли z прямує до нуля, а r — до r_0. Для цього покладемо $z = \rho\sin\theta$, $r = r_0 + \rho\cos\theta$. Зафіксуємо θ, а ρ спрямуємо до нуля, тоді

$$v_0^m = -(m-1)!\left(2\frac{\sqrt{\rho(2ir_0\sin\theta - 2rr_0\cos\theta - \rho)} - i\rho r_0\sin\theta - r_0}{r_0 + \rho\cos\theta}\right)^m.$$

Із одержаної формули видно, що при $r_0 > 0$ і прямуванні ρ до нуля уявна частина функції $v_0^m(\rho, \theta)$ також прямує до нуля і є еквівалентною нескінченно малій величині $\sqrt{\rho}$.

Тепер виникає питання: який зв'язок мають побудовані функції із відомими розв'язками рівняння Лапласа?

На основі функцій $v_k^m(u, r)$ визначимо такі розв'язки рівняння (1.1):

$$f_k^m(u,r) = \frac{v_k^m(u,r) - (-1)^{k-m} v_k^m(-u,r)}{2}, \tag{2.16}$$

$$g_k^m(u,r) = \frac{v_k^m(u,r) + (-1)^{k-m} v_k^m(-u,r)}{2}. \tag{2.17}$$

Функції $w_k^m(u,r)$ і $w_k^m(-u,r)$ при $k \geq m$ пов'язані співвідношенням

$$w_k^m(-u,r) = (-1)^{k-m} w_k^m(u,r). \tag{2.18}$$

Для функцій $v_k^m(-u,r)$, як випливає з (2.7), справджується співвідношення

$$(k^2 - m^2)\, v_k^m(-u,r) + uk(2k-1)\, v_{k-1}^m(-u,r) +$$
$$+ (u^2 - r^2)k(k-1)\, v_{k-2}^m(u,r) + (-1)^{k-m}\Big(2k w_k^m(u,r) -$$
$$- u(4k-1)\, w_{k-1}^m(u,r) + (u^2 - r^2)(2k-1)\, w_{k-2}^m(u,r)\Big) = 0. \tag{2.19}$$

Помножимо це рекурентне співвідношення на $(-1)^{k-m}$ і віднімемо його від рекурентного співвідношення (2.7) для функцій $v_k^m(u,r)$. В результаті одержимо рекурентне співвідношення для функцій $f_k^m(u,r)$:

$$(k^2 - m^2)\, f_k^m(u,r) - uk(2k-1)\, f_{k-1}^m(u,r) + (u^2 - r^2)k(k-1)\, f_{k-2}^m(u,r) = 0. \tag{2.20}$$

Якщо ж до другого із співвідношень (2.7) додати співвідношення (2.18), помножене на $(-1)^{k-m}$, то отримаємо рекурентне співвідношення для функцій $g_k^m(u,r)$:

$$(k^2 - m^2)\, g_k^m(u,r) + uk(2k-1)\, g_{k-1}^m(u,r) + (u^2 - r^2)k(k-1)\, g_{k-2}^m(u,r) +$$
$$+ 2k w_k^m(u,r) - u(4k-1)\, w_{k-1}^m(u,r) + (u^2 - r^2)(2k-1)\, w_{k-2}^m(u,r) = 0. \tag{2.21}$$

Розглянемо декілька перших функцій $f_k^m(u,r)$ та $g_k^m(u,r)$.

Згідно з (2.11)

$$v_0^0(u,r) = \ln\left(\frac{\sqrt{u^2 - r^2} + u}{2}\right), \qquad v_0^0(-u,r) = \ln\left(\frac{\sqrt{u^2 - r^2} - u}{2}\right),$$

а тому

$$f_0^0(u,r) = \frac{v_0^0(u,r) - v_0^0(-u,r)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{u^2 - r^2} + u}{\sqrt{u^2 - r^2} - u}\right),$$
$$g_0^0(u,r) = \frac{v_0^0(u,\ r) + v_0^0(-u,\ r)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{-r^2}{4}\right) = \ln\left(\frac{r}{2}\right) + i\frac{\pi}{2}, \tag{2.22}$$

$$f_1^0(u,r) = \frac{1}{2}u\ln\left(\frac{\sqrt{u^2 - r^2} + u}{\sqrt{u^2 - r^2} - u}\right) - \sqrt{u^2 - r^2},$$
$$g_1^0(u,r) = u\left(\ln\left(\frac{r}{2}\right) + i\frac{\pi}{2} + 1\right). \tag{2.23}$$

Дійсна та уявна частини функцій $f_k^m(iz + r_0, r)$ та $g_k^m(iz + r_0, r)$, так само як і $v_k^m(iz + r_0, r)$, задовольняють рівняння (0.3). Але між цими функціями та функціями $v_k^m(iz + r_0, r)$ є суттєва відмінність. Якщо функції $v_k^m(iz + r_0, r)$ обмежені при $r = 0$, то функції $f_k^m(iz + r_0, r)$ та $g_k^m(iz + r_0, r)$ є необмеженими при $r = 0$, а тому можуть бути використані тільки для апроксимації розв'язків рівняння Лапласа в областях, що мають форму тіла обертання відносно вертикальної осі і не перетинають її.

Можна показати, що функції $f_k^m(iz, r)$ збігаються з точністю до сталих множників з відомими [4] функціями $w_k^{*,m}(z, r) = R^k Q_k^m(\cos(\theta))$, де (R, η, θ) — сферичні координати, які пов'язані з циліндричними координатами (z, r, η) співвідношеннями $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, $\tan(\theta) = z/r$, $Q_k^m(\cos(\theta))$ — приєднані функції Лежандра другого роду.

3. Побудова розв'язків задачі Неймана. В якості прикладу задачі, для розв'язування якої доцільно використати побудовані вище розв'язки рівняння (0.3), розглянемо крайову задачу Неймана

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_m}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi_m}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2}\psi_m = 0 \quad \text{в} \quad G,$$
$$\frac{\partial\psi_m}{\partial z} = f(r) \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad \frac{\partial\psi_m}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad L, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

де

$$G = \{(z, r): z^2 + r^2 < 1,\ r \geq 0,\ z \leq h_k - 1\},$$
$$\Gamma = \{(z, r): z = h_k - 1,\ 0 \leq r \leq r_0\},$$
$$L = \{(z, r): z^2 + r^2 = 1,\ r \geq 0,\ z \leq h_k - 1\},$$

h_k — висота сегмента одиничного круга, $r_0 = \sqrt{1 - h_k^2}$. При $m = 0$ на функцію $f(r)$ потрібно накласти умову $\int_0^{r_0} r f(r)\,dr = 0$, яка випливає з умови розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа.

Наближений розв'язок цієї задачі побудуємо за допомогою варіаційного методу [5] шляхом мінімізації функціонала

$$F(\psi) = \int_G \left(r\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 + \frac{m^2}{r}\psi \right) dG - 2\int_\Gamma r\psi f(r)\,dr \tag{3.2}$$

на класі функцій $\psi \in W_{2,r}^1(G)$, де $W_{2,r}^1(G)$ — простір Соболєва функцій, інтегровних із квадратом, разом з першими частинними похідними, з ваговою функцією r по області G.

Покладаючи $u = iz + r_0$, на основі комплекснозначних функцій $v_k^m(u, r)$ одержуємо розв'язки рівняння (0.3):

$$\omega_{2k-1+N}(z, r) = \operatorname{Im}\left(v_k^m(iz_1 + r_0, r)\right), \qquad \omega_{2k+N}(z, r) = \operatorname{Re}\left(v_k^m(iz_1 + r_0, r)\right),$$

де $z_1 = z - h_0$.

Заміну $z_1 = z - h_0$ виконано для того, щоб особлива точка функцій $\omega_{k+N}(z, r)$ знаходилася точно у кутовій точці області G з координатами (h_0, r_0). Функції $\omega_{k+N}(z, r)$ у сукупності з гладкими розв'язками рівняння $\omega_k(u, r)$, визначені за допомогою формули (1.6), використовуємо як координатні функції при чисельній реалізації методу Рітца, подаючи наближений розв'язок задачі (3.1) у вигляді

$$\psi_m(z, r) = \sum_{k=1}^{N} a_k \omega_k(z, r) + \sum_{k=1}^{N_1} a_{k+N}\omega_{k+N}(z, r). \tag{3.3}$$

Із умов мінімуму функціонала $F(\psi_m)$ визначаємо коефіцієнти a_k, як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{N+N_1} a_k \alpha_{i,k} = \beta_i, \tag{3.4}$$

де

$$\alpha_{i,k} = \int_{L+\Gamma} r \frac{\partial \omega_k(z,r)}{\partial n} \omega_i(z,r) dl, \qquad \beta_i = \int_0^{r_0} r f(r) \omega_i(z,r) dr.$$

Для контролю точності виконання крайових умов обчислювалася величина похибки

$$\delta = \int_0^{r_0} r\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial z} - f\right)^2 dr + \int_L r\left(\frac{\partial \psi_m}{\partial n}\right)^2 dl. \tag{3.5}$$

У табл. 3.1 наведено значення точності δ виконання крайових умов задачі (3.1) при $m = 1$ в залежності від кількості врахованих функцій з особливостями у кутовій точці області G. Число N гладких функцій $\omega_k^1(u,r)$ в усіх випадках дорівнює 20. Обчислення проводилися для двох значень функції $f(r)$, а саме $f(r) = f_1(r) = r/r_0$ та $f(r) = f_2(r) = r^3/r_0^3$, для різних значень висоти h сегмента області G. У третьому і п'ятому стовпчиках табл. 3.1 наведено мінімальні значення функціонала $F(\psi_1)$, а в четвертому і шостому стовпчиках — відповідні значення δ_i, обчислені за допомогою формули (3.5).

Як видно з табл. 3.1, ці значення із збільшенням N_1 зменшуються, а мінімальні значення функціонала прямують до деякого стабільного сталого значення. При цьому, що найбільш суттєво, на два – три порядки збільшується точність виконання крайових умов задачі (3.1). Особливо це помітно при значеннях $h > 1$, коли величина кута розхилу кутової точки перевищує $\pi/2$, а розв'язок задачі (2.6), як відомо з роботи [1], має більш суттєву особливість в околі кутової точки і наближається лінійною комбінацією гладких функцій, як видно із табл. 3.1 (дані, що відповідають значенню $N_1 = 0$), з недостатньою точністю. Зауважимо, що оцінка точності розв'язку задачі в середньоквадратичному сенсі у даному випадку є не досить вдалою.

Найгірше виконуються крайові умови задачі у близькому околі кутової точки, а тому варто контролювати точність наближеного розв'язку задачі саме там. У табл. 3.2 наведено значення точності виконання крайових умов задачі в околі кутової точки на віддалі $0{,}005\,r_0$ на Γ та $0{,}005$ на L від кутової точки. Тут $\delta_{i,1}$ — точність виконання крайової умови i-ю функцією на Γ, $\delta_{i,2}$ — точність виконання крайової умови i-ю функцією на L. Як видно із таблиці, точність виконання крайових умов суттєво покращується при включенні до числа координатних функцій розв'язків рівняння (0.3), які мають особливість у кутовій точці області G.

Аналогічні числові результати одержано також у випадку, коли в якості координатних функцій з особливістю було вибрано на основі формули (1.5) інші розв'язки рівняння (0.3):

$$v_k^*(u,r) = \int_0^{\pi} (u + r\cos(t))^{k-0{,}5} \cos(mt) dt, \qquad m = 0, 1, \ldots. \tag{3.6}$$

Зауважимо, що ці функції можна подати через повні еліптичні інтеграли, але в цьому немає потреби, оскільки повні еліптичні інтеграли потрібно вираховувати чисельно, а тому є сенс обчислювати чисельно значення перших двох функцій $v_1^*(u,r)$ і $v_2^*(u,r)$, а потім вже за допомогою рекурентних формул обчислювати значення інших функцій та значення їхніх перших частинних похідних.

Таблиця 3.1

h	n	F_1	δ_1	F_2	δ_2
0,50	0	– 0,155026996413	0,552E–08	– 0,069067066057	0,753E–07
0,50	2	– 0,155026996440	0,162E–08	– 0,069067066423	0,221E–07
0,50	4	– 0,155026996443	0,143E–10	– 0,069067066465	0,198E–09
0,50	6	– 0,155026996443	0,673E–11	– 0,069067066465	0,926E–10
0,75	0	– 0,172119566185	0,244E–06	– 0,076039769453	0,161E–05
0,75	2	– 0,172119567483	0,325E–07	– 0,076039778046	0,216E–06
0,75	4	– 0,172119567545	0,848E–10	– 0,076039778463	0,529E–09
0,75	6	– 0,172119567546	0,198E–10	– 0,076039778463	0,157E–09
1,00	0	– 0,159165356972	0,712E–05	– 0,069673110318	0,286E–04
1,00	2	– 0,159165412757	0,385E–06	– 0,069673334795	0,157E–05
1,00	4	– 0,159165413784	0,109E–07	– 0,069673338995	0,423E–07
1,00	6	– 0,159165413801	0,887E–09	– 0,069673339061	0,353E–08
1,25	0	– 0,124603477713	0,683E–04	– 0,053981945445	0,187E–03
1,25	2	– 0,124604173447	0,863E–06	– 0,053983851404	0,243E–05
1,25	4	– 0,124604176327	0,666E–07	– 0,053983859526	0,176E–06
1,25	6	0,124604176438	0,113E–07	– 0,053983859817	0,310E–07
1,50	0	– 0,077858227395	0,405E–03	– 0,033316780889	0,810E–03
1,50	2	– 0,077863476779	0,775E–08	– 0,033327249572	0,701E–07
1,50	4	– 0,077863476834	0,182E–09	– 0,033327250649	0,189E–08
1,50	6	– 0,077863476835	0,281E–11	– 0,033327250664	0,359E–10
1,75	0	– 0,030247043584	0,178E–02	– 0,012712184323	0,273E–02
1,75	2	– 0,030277912566	0,267E–04	– 0,012759950982	0,390E–04
1,75	4	– 0,030278049653	0,525E–05	– 0,012760161809	0,770E–05
1,75	6	– 0,030278061897	0,159E–05	– 0,012760179341	0,239E–05

Рекурентні формули для функцій $v_k^*(u,r)$, як і раніше, одержимо на основі їх інтегрального зображення (3.6).

Здиференціюємо формулу (3.6) по u:

$$\frac{\partial v_k^*(u,r)}{\partial u} = (k-0,5)\int_0^{\pi}(u+r\cos(t))^{k-1,5}\cos(mt)\,dt = (k-0,5)\,v_{k-1}^*(u,r). \quad (3.7)$$

В результаті диференціювання формули (3.6) по r одержуємо

Таблиця 3.2

h	n	$\delta_{1,1}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{2,1}$	$\delta_{2,2}$
0,50	0	– 0,00037949	0,00043994	– 0,00140264	0,00162540
0,50	2	0,00014131	– 0,00007728	0,00052255	– 0,00028629
0,50	4	– 0,00000247	– 0,00000670	– 0,00000912	– 0,00002470
0,50	6	– 0,00000082	– 0,00000437	– 0,00000592	– 0,00001868
0,75	0	– 0,00282272	0,00293287	– 0,00726591	0,00753564
0,75	2	0,00061039	– 0,00049976	0,00157192	– 0,00129271
0,75	4	– 0,00000228	– 0,00000038	– 0,00000417	0,00000201
0,75	6	– 0,00000304	– 0,00000221	– 0,00000599	0,00000772
1,00	0	– 0,01403031	0,01578243	– 0,02818434	0,03156991
1,00	2	0,00268368	– 0,00256219	0,00541553	– 0,00519043
1,00	4	0,00014496	– 0,00011216	0,00029284	– 0,00020232
1,00	6	– 0,00011719	– 0,00000993	– 0,00023694	– 0,00001928
1,25	0	– 0,03855195	0,04699977	– 0,06427525	0,07738027
1,25	2	0,00440444	– 0,00448174	0,00747012	– 0,00753579
1,25	4	0,00070115	– 0,00052358	0,00116499	– 0,00080049
1,25	6	0,00006078	0,00007910	0,00010208	0,00013018
1,50	0	– 0,08375788	0,10082155	– 0,12065639	0,14050163
1,50	2	– 0,00042702	0,00052957	0,00031340	0,00080374
1,50	4	– 0,00001880	0,00006288	– 0,00002721	0,00018122
1,50	6	0,00000606	0,00000911	0,00001424	0,00003336
1,75	0	– 0,15253710	0,15498460	– 0,19564202	0,18296874
1,75	2	– 0,02750581	0,02407182	– 0,02925021	0,03061140
1,75	4	– 0,01196630	0,00750394	– 0,01448292	0,00904876
1,75	6	– 0,00467943	0,00180552	– 0,00574120	0,00223308

$$r\frac{\partial v_k^*(u,r)}{\partial u} = r(k-0,5)\int_0^{\pi}(u+r\cos(t))^{k-1,5}\cos(mt)\cos(t)\,dt =$$

$$= (k-0,5)\left(\int_0^{\pi}(u+r\cos(t))^{k-0,5}\cos(mt)\,dt - \right.$$

$$\left. - u\int_0^{\pi}(u+r\cos(t))^{k-1,5}\cos(mt)\,dt\right) = (k-0,5)\left(v_k^*(u,r) - uv_{k-1}^*(u,r)\right). \qquad (3.8)$$

На основі цих формул знаходимо формули для других похідних, і після підстановки їх у рівняння (1.3) одержуємо рекурентну формулу

$$\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - m^2\right)v_{k+1}^*(u,r) = (2k+1)kuv_k^*(u,r) + (r^2-u^2)\left(k^2-\frac{1}{4}\right)v_{k-1}^*(u,r). \quad (3.9)$$

Покладаючи $u = iz + r_0$, на основі комплекснозначних функцій $v_k^*(u,r)$ будуємо розв'язки рівняння (1.4):

$$\omega_{2k-1+N}^m(z,r) = \operatorname{Im}(v_k^*(iz+r_0,r)), \qquad \omega_{2k+N}^m(z,r) = \operatorname{Re}(v_k^*(iz+r_0,r)), \quad (3.10)$$

а вже ці функції в сукупності з гладкими розв'язками рівняння (1.4) $\omega_k(z,r)$ використовуємо в якості координатних функцій, подаючи наближений розв'язок задачі (3.1) у вигляді

$$\psi_m(z,r) = \sum_{k=1}^{N} a_k \omega_k(z,r) + \sum_{k=1}^{N_1} a_{k+N}\omega_{k+N}(z,r). \quad (3.11)$$

У табл. 3.3 наведено відповідні мінімальні значення функціонала (3.2) та середньоарифметичну точність δ виконання крайових умов задачі (3.1) при збереженні у сумі (3.11) N_1 доданків при сталому $N = 20$.

Порівняння даних табл. 3.1 і 3.3 показує, що точність виконання крайових умов в обох випадках вибору системи координатних функцій з особливостями суттєво покращується для всіх значень h та має приблизно один і той самий порядок.

4. Побудова розв'язків задачі про власні коливання рідини у сферичній порожнині. Використаємо побудовані вище розв'язки рівняння (0.3) для розв'язування задачі про власні коливання ідеальної рідини, яка частково заповнює сферичну порожнину. Ця задача має вигляд

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_m}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi_m}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2}\psi_m = 0 \quad \text{в} \quad G, \\ \frac{\partial\psi_m}{\partial z} = \lambda\psi_m \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad \frac{\partial\psi_m}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad L, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,\end{gathered} \quad (4.1)$$

де $G = \{(z,r): x^2+r^2 < 1,\ r \ge 0,\ z \le h_k - 1\}$ — меридіональний переріз області, заповненої рідиною, $\Gamma = \{(z,r): z = h_k - 1,\ 0 \le r \le r_0\}$ — меридіональний переріз вільної поверхні рідини, $L = \{(z,r): x^2+r^2 = 1,\ r \ge 0,\ z \le h_k - 1\}$ — меридіональний переріз поверхні сфери, змоченої рідиною, h_k — висота заповнення сфери рідиною, $r_0 = \sqrt{1-h_k^2}$ — радіус вільної поверхні рідини, λ — спектральний параметр. При $m = 0$ на функцію $\psi_0(r)$ необхідно накласти умову збереження об'єму нестисливої рідини

$$\int_0^{r_0} r\psi_0(0,r)\,dr = 0.$$

Наближений розв'язок цієї задачі знову побудуємо за допомогою варіаційного методу [4] шляхом мінімізації функціонала

$$F(u) = \int_G \left(r\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 + \frac{m^2}{r}\psi \right) dG$$

на класі функцій $\psi \in W_{2,r}^1(G)$, що задовольняють умову

Таблиця 3.3

h	n	F_1	δ_1	F_2	δ_2
0,50	0	– 0,155026996413	0,552E–08	– 0,069067066057	0,753E–07
0,50	2	– 0,155026996436	0,476E–08	– 0,069067066367	0,651E–07
0,50	4	– 0,155026996443	0,239E–09	– 0,069067066462	0,329E–08
0,50	6	– 0,155026996443	0,916E–11	– 0,069067066465	0,115E–09
0,75	0	– 0,172119566185	0,244E–06	– 0,076039769453	0,161E–05
0,75	2	– 0,172119567333	0,139E–06	– 0,076039777047	0,920E–06
0,75	4	– 0,172119567544	0,124E–08	– 0,076039778454	0,841E–08
0,75	6	– 0,172119567546	0,605E–10	– 0,076039778463	0,371E–09
1,00	0	– 0,159165356972	0,712E–05	– 0,069673110318	0,286E–04
1,00	2	– 0,159165407714	0,291E–05	– 0,069673314458	0,117E–04
1,00	4	– 0,159165413802	0,473E–09	– 0,069673339059	0,122E–08
1,00	6	– 0,159165413801	0,928E–11	– 0,069673339060	0,395E–10
1,25	0	– 0,124603477713	0,683E–04	– 0,053981945445	0,187E–03
1,25	2	– 0,124604127030	0,185E–04	– 0,053983724489	0,512E–04
1,25	4	– 0,124604175999	0,218E–06	– 0,053983858819	0,563E–06
1,25	6	– 0,124604176364	0,195E–07	– 0,053983859710	0,536E–07
1,50	0	– 0,077858227395	0,405E–03	– 0,033316780889	0,810E–03
1,50	2	– 0,077863261426	0,652E–04	– 0,033326821798	0,132E–03
1,50	4	– 0,077863469903	0,267E–05	– 0,033327238886	0,512E–05
1,50	6	– 0,077863474920	0,387E–06	– 0,033327248173	0,768E–06
1,75	0	– 0,030247043584	0,178E–02	– 0,012712184323	0,273E–02
1,75	2	– 0,030277516377	0,131E–03	– 0,012759229489	0,216E–03
1,75	4	– 0,030278033751	0,107E–04	– 0,012760142639	0,154E–04
1,75	6	– 0,030278053873	0,229E–05	– 0,012760172246	0,329E–05

$$\int_{\Gamma} r\psi^2 dr = 1,$$

а при $m = 0$ і умову

$$\int_0^{r_0} r\psi(0, r)\,dr = 0.$$

Покладаючи $u = iz + r_0$, на основі комплекснозначних функцій $v_k^m(u, r)$ одержуємо розв'язки рівняння (0.3)

Таблиця 4.1

h	n	λ_1	δ_1	λ_2	δ_2
0,50	0	1,2077172346	0,2375E–07	5,4968839295	0,8108E–06
0,50	2	1,2077172344	0,7461E–08	5,4968839241	0,1923E–06
0,50	4	1,2077172344	0,7311E–10	5,4968839235	0,3040E–08
0,75	0	1,3569647364	0,3042E–06	5,2571815991	0,5559E–07
0,75	2	1,3569647349	0,3672E–07	5,2571815987	0,9541E–08
0,75	4	1,3569647349	0,5464E–10	5,2571815987	0,1358E–08
1,00	0	1,5601572773	0,1286E–04	5,2755468627	0,1007E–03
1,00	2	1,5601571758	0,7163E–06	5,2755460631	0,5608E–05
1,00	4	1,5601571739	0,1956E–07	5,2755460471	0,2040E–06
1,00	6	1,5601571738	0,1298E–08	5,2755460464	0,9460E–07
1,25	0	1,8591337499	0,1998E–03	5,5831142898	0,2431E–02
1,25	2	1,8591316786	0,2807E–05	5,5830884072	0,3852E–04
1,25	4	1,8591316682	0,1947E–06	5,5830882219	0,3124E–05
1,25	6	1,8591316678	0,2758E–07	5,5830882151	0,2925E–06
1,50	0	2,3622785589	0,2527E–02	6,3734444450	0,2897E–01
1,50	2	2,3622449064	0,1060E–05	6,3730431563	0,9154E–04
1,50	4	2,3622448918	0,9161E–09	6,3730418522	0,1241E–05
1,50	6	2,3622448918	0,1613E–10	6,3730418445	0,2341E–08
1,75	0	3,5010428451	0,4105E–01	8,5369928590	0,3318E
1,75	2	3,5003215306	0,6297E–03	8,5310572143	0,7310E–02
1,75	4	3,5003179111	0,1192E–03	8,5309916837	0,9077E–03
1,75	6	3,5003176393	0,3685E–04	8,5309894501	0,2871E–03

$$\omega^m_{2k-1+N}(z,r) = \operatorname{Im}\left(v^m_k(iz+r_0,r)\right),$$

$$\omega^m_{2k+N}(z,\, r) = \operatorname{Re}\left(v^m_k(iz+r_0,r)\right),$$

а вже ці функції в сукупності з гладкими розв'язками $v^m_k(z,r)$ рівняння (0.4) використовуємо в якості координатних функцій, подаючи наближений розв'язок задачі (4.1) у вигляді

$$\psi_m(z,r) = \sum_{k=1}^{N} a_k\omega^m_k(z,r) + \sum_{k=1}^{N_1} a_{k+N}\omega^m_{k+N}(z,r).$$

У табл. 4.1 у третьому і п'ятому стовпчиках наведено величини першого та другого власного значення задачі (4.1) при $m = 1$, визначені за допомогою методу Рітца. В четвертому і шостому стовпчиках таблиці міститься величина

Таблиця 4.2

h	n	λ_1	δ_1	λ_2	δ_2
0,75	0	1,3569647472	0,1407E–05	5,2571816015	0,2542E–06
0,75	2	1,3569647369	0,8948E–06	5,2571815996	0,1427E–06
0,75	4	1,3569647349	0,8896E–08	5,2571815991	0,6503E–09
1,00	0	1,5601572773	0,1286E–04	5,2755468627	0,1007E–03
1,00	2	1,5601571851	0,5312E–05	5,2755461362	0,4138E–04
1,00	4	1,5601571738	0,8388E–09	5,2755460471	0,4805E–07
1,00	6	1,5601571738	0,9710E–11	5,2755460467	0,1988E–06
1,25	0	1,8591337499	0,1998E–03	5,5831142898	0,2431E–02
1,25	2	1,8591318196	0,5529E–04	5,5830902221	0,6761E–03
1,25	4	1,8591316688	0,6028E–06	5,5830882340	0,9611E–05
1,25	6	1,8591316679	0,5352E–07	5,5830882159	0,4398E–06
1,50	0	2,3622785589	0,2527E–02	6,3734444450	0,2897E–01
1,50	2	2,3622463738	0,4214E–03	6,3730621391	0,4947E–02
1,50	4	2,3622449212	0,1616E–04	6,3730423140	0,2321E–03
1,50	6	2,3622448961	0,2371E–05	6,3730418800	0,2242E–04
1,75	0	3,5010428451	0,4105E–01	8,5369928590	0,3318E
1,75	2	3,5003317787	0,3148E–02	8,5311899014	0,3007E–01
1,75	4	3,5003180929	0,2671E–03	8,5309946988	0,2729E–02
1,75	6	3,5003176445	0,5411E–04	8,5309897834	0,5069E–03

$$\delta_i = \int_0^{r_0} r\left(\frac{\partial\psi_{m,i}}{\partial z} - \lambda_i\psi_{m,i}\right)^2 dr + \int_L r\left(\frac{\partial\psi_{m,i}}{\partial n}\right)^2 dl,$$

що визначає середньоарифметичну точність виконання крайових умов задачі. Нагадаємо, що функції $\psi_{m,i}$ нормовані, тобто задовольняють умову

$$\int_0^{r_0} r\psi_{m,i}^2 dr = 1.$$

В табл. 4.2 наведено наближені власні значення спектральної задачі (4.1), обчислені за допомогою методу Рітца, коли в якості додаткових координатних функцій було вибрано функції (3.6).

Порівняння даних табл. 4.1 і 4.2 показує, що точність виконання крайових умов задачі, при включенні до числа координатних функцій особливих розв'язків рівняння (0.4), в обох випадках суттєво покращується, майже на один і той самий порядок, хоча функції $v_k^m(u,r)$ і $v_k^*(u,r)$ є різними. Величини власних значень λ_i також прямують практично до одних і тих самих значень, що свідчить про високу точність побудованих розв'язків задачі.

5. Висновки. Наведені вище приклади показують, що використання в якості координатних функцій поряд з гладкими функціями спеціально побудованих функцій, що мають особливості за межею області, істотно поліпшує точність наближеного розв'язку задачі, який будується за допомогою варіаційного методу. Цікавим при цьому є факт, що таке поліпшення маємо при різних системах функцій з особливістю. Спільною характеристикою поведінки цих функцій є те, що вони самі або їхні частинні похідні розривні за межею області. Саме такий характер поведінки мають шукані розв'язки задач в околі кутових точок.

1. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с каноническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – **16**. – С. 209 – 292.
2. *Комаренко А. Н.* Асимптотическое разложение собственных функций задачи с параметром в краевых условиях в окрестности угловых граничных точек // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 6. – С. 653 – 659.
3. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 832 с.
4. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. – Киев: Наук. думка, 1984. – 232 с.
5. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Одержано 01.07.08