УДК 517.54

О. К. Бахтін (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕРІВНОСТІ ДЛЯ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ ТА ВІДКРИТИХ МНОЖИН*

We obtain generalizations of classical results in the theory of extremal problems of nonoverlapping domains.

Получены обобщения классических результатов в теории экстремальных задач о неналегающих областях.

1. Екстремальні задачі для n-променевих систем точок. Роботу присвячено розв'язанню нових екстремальних задач про неперетинні області з вільними полюсами на променях та їх узагальненню на деякі класи відкритих множин. Виникнення даного напрямку геометричної теорії функцій комплексної змінної пов'язано з класичною роботою М. О. Лаврентьєва [1], в якій було розв'язано задачу про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних областей. Ця задача викликала великий інтерес багатьох математиків. Сьогодні результати і методи, пов'язані з задачами такого роду, належать до відомого напрямку геометричної теорії функцій комплексної змінної (див., наприклад, [2 – 14]).

Сформулюємо основні означення роботи. Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ — множини відповідно натуральних і дійсних чисел, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, $\mathbb{C}$ — комплексна площина, а $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація. Позначимо через $r(B, a)$ внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$, а через $\operatorname{cap} E$ — логарифмічну ємність множини E (див., наприклад, [2, 4]), $\chi(t) := \frac{1}{2}(t + t^{-1})$.

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точок $A_{n,m} := \{a_{k,p} \in \mathbb{C}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, будемо називати (n, m)-променевою, якщо при всіх $k = \overline{1,n}$ і $p = \overline{1,m}$ виконуються співвідношення $0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty$, $\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =:$ $=: \theta_k$, $0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi$. На множині (n, m)-променевих систем точок розглянемо величини $\alpha_k := \frac{1}{\pi}[\theta_{k+1} - \theta_k]$, $k = \overline{1,n}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $\alpha_0 :=$ $:= \alpha_n$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$. Позначимо $P(A_{n,m}) = \{P_k\}_{k=1}^n$, де $P_k := \{w \in \mathbb{C}\colon \theta_k <$ $< \arg w < \theta_{k+1}\}$, $k = \overline{1,n}$. Нехай $z_k(w)$ позначає однозначну гілку багатозначної аналітичної функції $z = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{1/\alpha_k}$, що однолисто відображає область P_k на праву півплощину.

У випадку $m = 1$ $(n, 1)$-променеву систему точок будемо називати n-променевою і розглядатимемо більш прості позначення: $a_{k,1} =: a_k$, $k = \overline{1,n}$, $A_{n,1} =:$ $=: A_n$.

Для множини всіх n-променевих систем введемо „керуючий” функціонал

$$\mathcal{L}\left(\{a_k\}_{k=1}^n\right) := \mathcal{L}(A_n) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_k|. \tag{1}$$

Нехай $\{B_k\}_{k=1}^n$ — система областей, які взаємно не перетинаються. При кожному $k = \overline{1,n}$ лише скінченна кількість компонент зв'язності множини

* Виконано за часткової фінансової підтримки Державної програми України № 0107U002027.

$\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k$ можуть містити всередині себе якусь із областей B_j, $j = \overline{1, n}$, $j \neq k$; такі компоненти ми називаємо суттєвими. Область, отриману вилученням із $\overline{\mathbb{C}}$ всіх суттєвих компонент зв'язності множини $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k$, будемо позначати $\tilde{B}_k$. Зрозуміло, що $B_k \subset \tilde{B}_k$ (при всіх $k = \overline{1, n}$) і $\{\tilde{B}_k\}_{k=1}^{n}$ — система скінченнозв'язних областей, які взаємно не перетинаються, без ізольованих граничних точок. Перехід від системи областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ до системи областей $\{\tilde{B}_k\}_{k=1}^{n}$ називається операцією заповнення несуттєвих граничних компонент.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. *Тоді для будь-якої n-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *і довільної системи взаємно неперетинних областей* $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справджується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 2^n \mathcal{L}(A_n) \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

знак рівності в якій досягається тоді і тільки тоді, коли a_k *і* $\tilde{B}_k$ *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R)} dw^2,$$

де $R^n = \mathcal{L}(A_n)$, $\operatorname{cap} \tilde{B}_k \setminus B_k = 0$, $k = \overline{1, n}$.

Доведення. Об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k\left(\overline{P}_k \cap B_k\right)$, що містить точку $g_k^{(1)} = z_k(a_k)$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі і позначимо через $G_k^{(1)}, k = \overline{1, n}$. У свою чергу, $G_k^{(2)}, k = \overline{1, n}$, буде позначати об'єднання зв'язної компоненти множини $z_k\left(\overline{P}_k \cap B_{k+1}\right)$, що містить точку $g_k^{(2)} = z_k(a_{k+1})$, з її симетричним відображенням відносно уявної осі, $B_{n+1} = B_1$, $g_n^{(2)} := z_n(a_{n+1}) := z_n(a_1)$. Як і в роботах [7, 12], запишемо

$$\begin{gathered} |z_k(w) - z_k(a_k)| = \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{1/\alpha_k - 1} |w - a_k| + o(1), \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P}_k, \\ \left|z_k(w) - z_k(a_{k+1})\right| = \frac{1}{\alpha_k} \left|a_{k+1}\right|^{1/\alpha_k - 1} \left|w - a_{k+1}\right| + o(1), \\ w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P}_k, \quad k = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{2}$$

Відповідно до теореми 1.9 [7] і формул (2) отримуємо нерівності

$$r(B_k, a_k) \leq \left[\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, g_{k-1}^{(2)}\right) r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}} |a_k|^{1/\alpha_{k-1} - 1} \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{1/\alpha_k - 1}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3}$$

З урахуванням (3) одержуємо оцінку

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} \left[\alpha_{k-1} \alpha_k |a_k|^2 \frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, g_{k-1}^{(2)}\right) r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right)}{|a_k|^{1/\alpha_{k-1} + 1/\alpha_k}} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|a_k|^{(1/\alpha_{k-1}+1/\alpha_k)/2}} \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right) \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Слід зауважити, що області $G_k^{(1)}$ і $G_k^{(2)}$ не перетинаються при всіх $k = \overline{1, n}$. Крім цього, як неважко помітити,

$$g_k^{(1)} = z_k(a_k) = -i\left(e^{-i\theta_k} a_k\right)^{1/\alpha_k} = -i|a_k|^{1/\alpha_k},$$
$$g_k^{(2)} = z_k(a_{k+1}) = -i\left(e^{-i\theta_k} a_{k+1}\right)^{1/\alpha_k} = i|a_{k+1}|^{1/\alpha_k}, \tag{5}$$
$$\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right| = |a_k|^{1/\alpha_k} + |a_{k+1}|^{1/\alpha_k}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Перетворюючи нерівність (4) з урахуванням (5), одержуємо вирази

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \le$$

$$\le \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{1/\alpha_k} + |a_{k+1}|^{1/\alpha_k}}{|a_k a_{k+1}|^{1/2\alpha_k}} |a_k| \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^2} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} |a_k| \left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{1/2\alpha_k} + \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|^{1/2\alpha_k} \right) \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^2} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{1/2\alpha_k} \right) |a_k| \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Звідси з урахуванням співвідношення (1) отримуємо

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \le 2^n \mathcal{L}(A_n) \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Із співвідношень (6) випливає, що

$$\left[2^n \mathcal{L}(A_n) \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right]^{-1} \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \le \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

На підставі відомої нерівності М. О. Лаврентьєва [1, 7] маємо

$$\frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^2} \le 1, \quad k = \overline{1, n}, \tag{8}$$

причому знак рівності у (8) досягається тоді і лише тоді, коли

$$\tilde{G}_k^{(2)} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \tilde{G}_k^{(1)}, \qquad \tilde{G}_k^{(1)} = G(\rho),$$
$$G(\rho) = \left\{ z\colon \left| \frac{z - g_k^{(1)}}{z - g_k^{(2)}} \right| < \rho \right\}, \quad \rho \in \mathbb{R}^+.$$

Співставляючи (7) і (8), приходимо до висновку, що

$$\left[2^n \mathcal{L}(A_n)\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{-1}\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq 1. \tag{9}$$

Знак рівності у (9) досягається тоді і лише тоді, коли у нерівностях (3) і (8) одночасно реалізується знак рівності при всіх $k=\overline{1,n}$. На підставі результатів роботи [11] отримуємо, що для реалізації знака рівності в (9) необхідно, щоб $B_k \subset \{w:\ \theta_{k-1} < \arg w < \theta_{k+1}\}$, $k=\overline{1,n}$. Звідси випливає, що точки $w=0$ і $w = \infty$ не є внутрішніми для областей B_k, $k=\overline{1,n}$. Таким чином, область $\tilde{G}_k^{(2)}$ є в точності верхньою півплощиною $\operatorname{Im} z > 0$, $\tilde{G}_k^{(1)}$ — нижньою при $k=\overline{1,n}$ і необхідно виконується умова $\left|g_k^{(1)}\right| = \left|g_k^{(2)}\right|$, $k=\overline{1,n}$. Крім того, з умов реалізації знака рівності в (3) (див., наприклад, [7]) отримуємо симетричність B_k відносно променя $\arg w = \theta_k$, $k=\overline{1,n}$. Звідси випливає, що $\alpha_k = \dfrac{2}{n}$, $k=\overline{1,n}$. Таким чином, знак рівності у нерівності (9) може бути тоді і лише тоді, коли $\tilde{B}_k$ і a_k, $k=\overline{1,n}$, є відповідно круговими областями і полюсами квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}dw^2.$$

Далі для такої системи областей виконуються рівності $r(B_k, a_k) = r\left(\tilde{B}_k, a_k\right)$, $k=\overline{1,n}$. У цьому випадку має місце нерівність $h_k(w) = g_{\tilde{B}_k}(w, a_k) - g_{B_k}(w, a_k) \geq 0$, $k=\overline{1,n}$, яка в усіх регулярних точках межі B_k перетворюється на рівність, що за принципом максимуму для гармонічних функцій забезпечує рівність $h_k(w) \equiv 0$, $w \in B_k$, $k=\overline{1,n}$. Останнє співвідношення приводить до висновку, що $\operatorname{cap}\left(\tilde{B}_k \setminus B_k\right) = 0$, $k=\overline{1,n}$, у випадку виконання рівності у (9).

Теорему 1 доведено.

2. Оцінки функціоналів для n-променевих систем точок і відкритих множин. Теорему 1 можна значно узагальнити. Для цього наведемо ще кілька означень.

Нехай D, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, — довільна відкрита множина і $w = a \in D$, тоді $D(a)$ позначає зв'язну компоненту D, що містить a. Для будь-якої (n, m)-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ і відкритої множини D, $A_{n,m} \subset D$, позначимо через $D_k(a_{p,s})$ зв'язну компоненту множини $D(a_{p,s}) \cap \overline{P_k(A_{n,m})}$, що містить точку $a_{p,s}$, $p = k, k+1$, $s=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$. На множині пар цілочислових індексів (k, p) визначимо рівність таким чином: $(k, p) = (q, s) \Leftrightarrow k = q$ і $p = s$. Будемо говорити, що відкрита множина D, $A_{n,m} \subset D$, задовольняє першу умову ненакладання відносно заданої (n, m)-променевої системи точок $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, якщо

$$D_k(a_{p,l}) \cap D_k(a_{q,s}) = \varnothing$$

при кожному фіксованому $k=\overline{1,n}$ і для всіх різних точок $a_{p,l}$ і $a_{q,s}$, які належать $\overline{P}_k(A_{n,m})$.

Покладемо $r(D, a) := r(D(a), a)$,

$$g_D(w,a) := \begin{cases} 0, & w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(a), \\ g_{D(a)}(w,a), & w \in D(a), \\ \overline{\lim\limits_{\zeta \to w}}\, g_{D(a)}(\zeta, a), & \zeta \in D(a), \quad w \in \partial D(a). \end{cases}$$

Теорема 2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *і довільної відкритої множини* D, $A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *яка задовольняє першу умову ненакладання відносно системи* A_n, *виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \prod_{p \neq l} \exp g_D(a_p, a_l) \;\leq\; 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \mathcal{L}(A_n).$$

Знак рівності у цій нерівності досягається, зокрема, коли $\{a_k\}$ *і множина* D *є відповідно полюсами і об'єднанням усіх кругових областей квадратичного диференціала*

$$Q(w)\,dw^2 \;=\; -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R^n)^2}\,dw^2,$$

де $R^n = \mathcal{L}(A_n)$.

Доведення. Насамперед зазначимо, що з умови ненакладання випливає, що множина D має узагальнену функцію Гріна $g_D(w, a)$. Розглянемо множини $\mathcal{E}_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$; $\mathcal{E}_t(a_k) = \{w : |w - a_k| < t\}$, $k = \overline{1,n}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Для достатньо малих $t \in \mathbb{R}^+$ розглянемо конденсатор $C(t, D, A_n) = \{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1(t)\}$, де $\mathcal{E}_1(t) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathcal{E}_t(a_k)$. Ємністю конденсатора називається величина (див., наприклад, [7, 8])

$$\operatorname{cap} C(t, D, A_n) \;=\; \inf \iint \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right] dx\,dy,$$

де точна нижня грань береться по класу всіх дійсних, неперервних і ліпшицевих на $\overline{\mathbb{C}}$ функцій $G = G(z)$, які дорівнюють нулю у деякому околі множини $\mathcal{E}_0$ і 1 на $\mathcal{E}_1(t)$. Для довільного конденсатора C покладаємо за означенням $|C| = [\operatorname{cap} C]^{-1}$. Величина $|C|$ називається модулем конденсатора C. Розглянемо відокремлююче перетворення конденсатора $C(t, D, A_n)$ відносно сім'ї функцій $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$ і системи областей $P(A_n)$, де $z = z_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{1/\alpha_k}$, $k = \overline{1,n}$, $P(A_n) = \{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$. Введемо до розгляду наступні конденсатори: $C_k(t, D) = \left\{\mathcal{E}_0^{(k)}, \mathcal{E}_1^{(k)}(t)\right\}$, $k = \overline{1,n}$, де $\mathcal{E}_0^{(k)}$ є об'єднанням образу множини $\mathcal{E}_0 \cap \overline{P}_k(A_n)$ при відображенні $z = z_k(w)$ з її симетричним відображенням відносно уявної осі, а $\mathcal{E}_1^{(k)}(t)$ — об'єднанням образу множини $\mathcal{E}_1(t) \cap \overline{P}_k(A_n)$ при відображенні тією ж функцією $z = z_k(w)$ з її симетричним відображенням відносно уявної осі. При відокремлюючому перетворенні відносно сім'ї $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$ і системи областей $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$ конденсатору $C(t, D, A_n)$ відповідає набір конденсаторів $\{C_k(t, D)\}_{k=1}^n$, симетричних відносно уявної осі. У відповідності з роботами [6 – 8] отримуємо нерівність

$$\operatorname{cap} C(t, D, A_n) \ \geq \ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_k(t, D).$$

Звідси безпосередньо випливає, що

$$|\, C(t, D, A_n) \,| \ \leq \ 2 \left(\sum_{k=1}^{n} |\, C_k(t, D) \,|^{-1} \right)^{-1}.$$

Із теореми 1 [8] отримуємо

$$|\, C(t, D, A_n) \,| \ = \ \frac{1}{2\pi n} \log \frac{1}{t} \ + \ M(D, A_n) \ + \ o(1), \quad t \to 0,$$

де

$$M(D, A_n) \ = \ \frac{1}{2\pi n^2} \left[\sum_{k=1}^{n} r(D, a_k) + \sum_{k \neq p} g_D(a_k, a_p) \right].$$

Для конденсаторів $C_k(t, D)$ має місце аналогічне асимптотичне зображення

$$|\, C_k(t, D) \,| \ = \ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \log \frac{1}{t} \ + \ M_k(D) \ + \ o(1), \quad t \to 0,$$

де

$$M_k(D) \ = \ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{4} \left[\log \frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left[\frac{1}{\alpha_k} |\, a_k \,|^{1/\alpha_k - 1} \right] \left[\frac{1}{\alpha_k} |\, a_{k+1} \,|^{1/\alpha_k - 1} \right]} \right],$$

області $G_k^{(s)}$ і точки $g_k^{(s)}$, $k = \overline{1, n}$, $s = 1, 2$, визначено при доведенні теореми 1. Звідси випливає співвідношення

$$|\, C_k(t, D) \,|^{-1} \ = \ \frac{4\pi}{\log(1/t)} - \left(\frac{4\pi}{\log(1/t)} \right)^2 M_k(D) \ + \ o\left(\left(\log \frac{1}{t} \right)^{-2} \right), \quad t \to 0.$$

Тоді неважко помітити, що

$$\sum_{k=1}^{n} |\, C_k(t, D) \,|^{-1} \ = \ \frac{4\pi n}{\log(1/t)} - \left(\frac{4\pi}{\log(1/t)} \right)^2 \sum_{k=1}^{n} M_k(D) \ + \ o\left(\left(\log \frac{1}{t} \right)^{-2} \right), \quad t \to 0.$$

Із викладеного вище випливає, що

$$\frac{1}{2\pi n} \log \frac{1}{t} \ + \ M(D, A_n) \ + \ o(1) \ \leq \ \frac{1}{2\pi n} \log \frac{1}{t} \ + \ \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D) \ + \ o(1), \quad t \to 0.$$

Після скорочення особливостей і граничного переходу при $t \to 0$ приходимо до нерівності

$$M(D, A_n) \ \leq \ \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D).$$

Звідси маємо

$$\frac{1}{2\pi n^2} \left[\sum_{k=1}^{n} \log r(D, a_k) + \sum_{k \neq p} g_D(a_k, a_p) \right] \ \leq$$

$$\leq \ \frac{2}{n^2} \frac{1}{8\pi} \log \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{|\, a_k \,|^{1/\alpha_k - 1} |\, a_{k+1} \,|^{1/\alpha_k - 1}}.$$

Перетворюючи останній вираз, отримуємо нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \prod_{k\neq p} \exp g_D(a_k, a_p) \le$$

$$\le \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{\left|a_k a_{k+1}\right|^{1/2\alpha_k}} \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{1/\alpha_k} + \left|a_{k+1}\right|^{1/\alpha_k}}{\left|a_k a_{k+1}\right|^{1/2\alpha_k}} |a_k| \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^2}\right]^{1/2}.$$

Тут використано рівності (5). Після нескладних перетворень одержуємо співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \prod_{k\neq p} \exp g_D(a_k, a_p) \le$$

$$\le 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_k| \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^2}\right]^{1/2}.$$

За побудовою області $G_k^{(1)}$ і $G_k^{(2)}$ не перетинаються при всіх $k = \overline{1, n}$, тому на підставі результату М. О. Лаврентьєва (8) виконується нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \prod_{k\neq p} \exp g_D(a_k, a_p) \le 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{L}(A_n).$$

Твердження про знак рівності перевіряється безпосередньо.

Теорему 2 доведено.

3. Деякі наслідки. Ряд наслідків із теорем 1 і 2 становлять значний інтерес. Із теореми 1 випливає наступне твердження.

Наслідок 1 [11]. *Нехай* $n \in \mathbb{N}, n \ge 3$. *Тоді для будь-якої n-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такої, що* $\mathcal{L}(A_n) = 1$, *і довільної системи попарно неперетинних областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справджується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \le 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

до того ж знак рівності у цій нерівності досягається тоді і лише тоді, коли a_k *і* $\tilde{B}_k$, $k = \overline{1, n}$, *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2}\,dw^2$$

і $\operatorname{cap} \tilde{B}_k \setminus B_k = 0$, $k = \overline{1, n}$.

Наслідок 2 [11]. *Нехай* $n \in \mathbb{N}, n \ge 3$. *Тоді для будь-якої n-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такої, що* $\mathcal{L}(A_n) = 1$, *і довільної системи попарно неперетинних областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справджується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \le \left(\frac{4}{n}\right)^n,$$

до того ж знак рівності у цій нерівності досягається тоді і лише тоді, коли a_k *і* $\tilde{B}_k$, $k = \overline{1,n}$, *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}\,dw^2$$

і $\operatorname{cap}\tilde{B}_k \setminus B_k = 0$, $k = \overline{1,n}$.

Наслідок 3. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такої, що* $\mathcal{L}(A_n) = 1$, *і довільної відкритої множини* D, $A_n \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *яка задовольняє першу умову ненакладання відносно системи* A_n, *справджується нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(D, a_k) \leq 2^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \prod_{k \neq p} \exp\{-g_D(a_k, a_p)\},$$

до того ж знак рівності у цій нерівності досягається, зокрема, тоді, коли a_k *і* D *є відповідно полюсами і об'єднанням кругових областей квадратичного диференціала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Наслідки 1 – 3 узагальнюють відповідні результати з робіт [5 – 7].

4. (n, 2)-Променеві системи точок. У праці [5] отримано результат, з якого, зокрема, випливає розв'язок екстремальної задачі про точну оцінку зверху функціонала $J = \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^2 r(B_{k,p}, a_{k,p})$, де $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, — $(n, 2)$-променева система точок така, що $|a_{k,1}| = \rho$, $a_{k,1}\overline{a}_{k,2} = R^2$, $\rho, R \in \mathbb{R}^+$, $\rho < R$, а система попарно неперетинних (багатозв'язних) областей, які задовольняють умови $B_{k,1} \subset U_R$, $B_{k,2}$ є симетричною $B_{k,1}$ відносно кола ∂U_R, $k = \overline{1,n}$. У статті [9] було розглянуто у випадку однозв'язних областей більш загальну екстремальну задачу для такого ж функціонала і $(n, 2)$-променевої системи точок, які розташовані на двох концентричних колах, причому умову $B_{k,1} \subset U_R$, $k = \overline{1,n}$, було вилучено. У цій роботі було запропоновано оригінальний метод дослідження і для випадку однозв'язних областей отримано вичерпний результат. У роботі [8] отримано нестандартне узагальнення цього результату на випадок спеціальних систем відкритих множин. У даній роботі пропонується метод дослідження, який базується на кусково-відокремлюючому перетворенні [6, 7], що дозволяє значно посилити результат роботи [9]. Отримано деякі наслідки цих результатів. Для будь-якої $(n, 2)$-променевої системи точок $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, розглянемо наступні „керуючі" функціонали:

$$\mathcal{L}(A_{n,2}) = \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^2 \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{1/2\alpha_k}\right)|a_{k,p}|,$$

$$\mathcal{L}_p(A_{n,2}) = \prod_{k=1}^n \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{1/2\alpha_k}\right)|a_{k,p}|, \quad p = 1, 2.$$

Для будь-якої $(n, 2)$-променевої системи точок покладемо

$$\omega_{k,p}^{(1)} = z_k(a_{k,p}), \quad \omega_{k,p}^{(2)} = z_k(a_{k+1,p}), \quad \omega_{n,p}^{(2)} = z_n(a_{1,p}), \quad k = \overline{1,n}, \quad p = 1, 2.$$

Таким чином, кожній області $P_k(A_{n,2})$ функція $z_k(w)$ співставляє четвірку точок $\Omega_k := \left\{\omega_{k,1}^{(1)}, \omega_{k,1}^{(2)}, \omega_{k,2}^{(1)}, \omega_{k,2}^{(2)}\right\}$, $k = \overline{1,n}$, і, в свою чергу, будь-якій заданій системі $A_{n,2}$ однозначно співставляється набір $\{\Omega_k\}_{k=1}^n$. Побудуємо конформний автоморфізм $\lambda_k(z)$ площини $\overline{\mathbb{C}}_z$, при якому точки набору Ω_k перетворюються у набір точок $\Omega_k^0 = \left\{-i\rho_k^{1/\alpha_k}, i\rho_k^{1/\alpha_k}, -i\rho_k^{-1/\alpha_k}, i\rho_k^{-1/\alpha_k}\right\}$, $0 < \rho_k < 1$, $k = \overline{1,n}$. Відобразимо спершу площину $\overline{\mathbb{C}}_z$ за допомогою функції $t_1 = T_1(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$; при цьому відображенні Ω_k, $k = \overline{1,n}$, перетворюється у набір точок одиничного кола U, причому $\operatorname{Im} T_1\left(\omega_{k,p}^{(1)}\right) < 0$, $\operatorname{Im} T_1\left(\omega_{k,p}^{(2)}\right) > 0$, $p = 1, 2$, $k = \overline{1,n}$. Далі застосуємо перетворення $t_2 = T_2(w) = e^{i\theta}\dfrac{(w - b_k)}{(1 - \bar{b}_k w)}$, $0 \le \omega < 2\pi$, де b_k — точка перетину неевклідових геодезичних, які з'єднують $T_1\left(\omega_{k,1}^{(1)}\right)$ з $T_1\left(\omega_{k,2}^{(2)}\right)$ і $T_1\left(\omega_{k,2}^{(1)}\right)$ з $T_1\left(\omega_{k,1}^{(2)}\right)$. В результаті цього перетворення точки вихідного набору Ω_k перетворюються у вершини прямокутника, сторони якого паралельні координатним осям, до того ж $\operatorname{Im} T_2\left(T_1\left(\omega_{k,p}^{(1)}\right)\right) < 0$, $\operatorname{Im} T_2\left(T_1\left(\omega_{k,p}^{(2)}\right)\right) > 0$, $p = 1, 2$, $k = \overline{1,n}$. Тепер, покладаючи $\zeta = T^{-1} \circ T_2 \circ T_1$, отримуємо шуканий автоморфізм $\zeta = \lambda_k(z)$. Таким чином, кожній $A_{n,2}$ співставляється єдиний набір $\left\{\Omega_k^0\right\}_{k=1}^n$. Далі позначимо

$$R^0 := R^0(A_{n,2}) := \left[\frac{1-t_0}{1+t_0}\right]^{\frac{1}{n}}, \qquad t_0 := t_0(A_{n,2}) := \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1-\rho_k^{2/\alpha_k}}{1+\rho_k^{2/\alpha_k}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Теорема 3. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. *Тоді для будь-якої* $(n, 2)$*-променевої системи точок* $A_{n,2} = \left\{a_{k,p}\right\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *такої, що* $\mathcal{L}(A_{n,2}) = 1$, *і довільної системи попарно неперетинних областей* $\left\{B_{k,p}\right\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *справджується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \le 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \left(\frac{1-(R^0)^n}{1+(R^0)^n}\right)^{2n},$$

до того ж знак рівності у цій нерівності досягається тоді і лише тоді, коли $\left\{a_{k,p}\right\}$ *і* $\tilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+1)^2}{\left(w^n - (R^0)^n\right)^2\left(1-(R^0)^n w^n\right)^2}\,dw^2$$

і $\operatorname{cap}\left(\tilde{B}_{k,p} \setminus B_{k,p}\right) = 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$.

Доведення ґрунтується на методі кусково-відокремлюючого перетворення [6, 7]. Як і при доведенні теореми 1, розглянемо $\left\{P_k(A_{n,2})\right\}_{k=1}^n$, $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, $\alpha_k(A_{n,2})$, $\theta_k(A_{n,2})$, $k = \overline{1,n}$. Точно так само побудуємо області $G_{k-1,p}^{(2)}$ і $G_{k,p}^{(1)}$, які співставляються області $B_{k,p}$ при відокремлюючому перетворенні відносно сімей $\{P_k\}_{k=1}^{n}$ і $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$. Зазначимо, що за побудовою $\omega_{k,p}^{(s)} \in G_{k,p}^{(s)}$, $k = \overline{1,n}$, $p, s = 1, 2$. Аналогічно (3) з урахуванням (2) отримуємо нерівність

$$r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq \left[\frac{r\left(G_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) r\left(G_{k-1,p}^{(2)}, \omega_{k-1,p}^{(2)}\right)}{(1/\alpha_k)\left|a_{k,p}\right|^{1/\alpha_k - 1}(1/\alpha_{k-1})\left|a_{k,p}\right|^{1/\alpha_{k-1}-1}}\right]^{1/2}, \tag{10}$$

$$k = \overline{1,n}, \quad p = 1, 2.$$

Звідси, аналогічно (4), приходимо до співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\left[\alpha_{k-1}\alpha_k\left|a_{k,p}\right|^2 \frac{r\left(G_{k-1,p}^{(2)}, \omega_{k-1,p}^{(2)}\right) r\left(G_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right)}{\left|a_{k,p}\right|^{1/\alpha_k + 1/\alpha_{k-1}}}\right]^{1/2} =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\frac{\left|a_{k,p}\right|}{\left|a_{k,p}\right|^{(1/\alpha_k + 1/\alpha_{k-1})/2}} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\left[r\left(G_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) r\left(G_{k,p}^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)}\right)\right]^{1/2}.$$

Неважко помітити, що $\left|\omega_{k,p}^{(1)} - \omega_{k,p}^{(2)}\right| = \left|a_k\right|^{1/\alpha_k} + \left|a_{k+1}\right|^{1/\alpha_k}$, $k = \overline{1,n}$. Продовжуючи міркування, одержуємо оцінку

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq$$

$$\leq 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{1/2\alpha_k}\right)\left|a_{k,p}\right| \times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\frac{r\left(G_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) r\left(G_{k,p}^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)}\right)}{\left|\omega_{k,p}^{(1)} - \omega_{k,p}^{(2)}\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Зазначимо, що області $G_{k,1}^{(1)}$, $G_{k,1}^{(2)}$, $G_{k,2}^{(1)}$, $G_{k,2}^{(2)}$ взаємно не перетинаються. Крім того, позначимо $E_{k,p}^{(s)} = \lambda_k\left(G_{k,p}^{(s)}\right)$, де $\lambda_k(z)$ — вищевказаний автоморфізм площини комплексних чисел $\overline{\mathbb{C}}_z$, $k = \overline{1,n}$, $p, s = 1, 2$. Враховуючи умову $\mathcal{L}(A_{n,2}) = 1$ і конформну інваріантність функціонала

$$J_k = \frac{r\left(G_{k,1}^{(1)}, \omega_{k,1}^{(1)}\right) r\left(G_{k,1}^{(2)}, \omega_{k,1}^{(2)}\right) r\left(G_{k,2}^{(1)}, \omega_{k,2}^{(1)}\right) r\left(G_{k,2}^{(2)}, \omega_{k,2}^{(2)}\right)}{\left|\omega_{k,1}^{(1)} - \omega_{k,1}^{(2)}\right|\left|\omega_{k,2}^{(1)} - \omega_{k,2}^{(2)}\right|^2},$$

отримуємо нерівність

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{r\left(E_{k,1}^{(1)}, -i\rho_k^{1/\alpha_k}\right) r\left(E_{k,1}^{(2)}, i\rho_k^{1/\alpha_k}\right)}{4\rho_k^{2/\alpha_k}}\frac{r\left(E_{k,2}^{(1)}, -i\rho_k^{-1/\alpha_k}\right) r\left(E_{k,2}^{(2)}, i\rho_k^{-1/\alpha_k}\right)}{4\rho_k^{-2/\alpha_k}}\right\}. \tag{11}$$

Для того щоб отримати оцінку зверху функціонала, який міститься у фігурних дужках правої частини (11), сформулюємо наступний допоміжний результат.

Лема 1. *При* $k = \overline{1, n}$ *виконується нерівність*

$$\frac{r\left(E_{k,1}^{(1)}, -i\rho_k^{1/\alpha_k}\right) r\left(E_{k,1}^{(2)}, i\rho_k^{1/\alpha_k}\right)}{4\rho_k^{2/\alpha_k}} \frac{r\left(E_{k,2}^{(1)}, -i\rho_k^{-1/\alpha_k}\right) r\left(E_{k,2}^{(2)}, i\rho_k^{-1/\alpha_k}\right)}{4\rho_k^{-2/\alpha_k}} \le \left(\frac{1-\rho_k^{2/\alpha_k}}{1+\rho_k^{2/\alpha_k}}\right)^4.$$

Знак рівності у цій нерівності досягається тоді і лише тоді, коли $\tilde{E}_{k,p}^{(s)}$, $s, p = 1, 2$, *при кожному* $k = \overline{1, n}$ *є круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q_k(w)\, dw^2 = -\frac{(1-w^2)^2}{(w^2+\rho_k^2)^2 (w^2+\rho_k^2 w^2)^2}\, dw^2$$

і, крім того, $\operatorname{cap} \tilde{E}_{k,p}^{(s)} \setminus E_{k,p}^{(s)} = 0$, $s, p = 1, 2$, $k = \overline{1, n}$.

В однозв'язному випадку цю лему отримано в роботі [9]. Для довільних багатозв'язних областей цей результат доведено у [8]. На основі леми 1 і нерівності (11) приходимо до співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \le 2^{2n} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2 \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1-\rho_k^{2/\alpha_k}}{1+\rho_k^{2/\alpha_k}}\right)^2 =$$

$$= 2^{2n} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2 \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1-(R^0)^n}{1+(R^0)^n}\right]^{2n}, \tag{12}$$

з якого випливає рівність теореми 3. У випадку реалізації знака рівності в (12) необхідно, щоб рівність у (10) досягалася при всіх $k = \overline{1, n}$, $p = 1, 2$ і мав місце знак рівності у нерівності леми 1 для всіх $k = \overline{1, n}$.

Теорему 3 доведено.

5. Деякі наслідки теореми 3. Із теореми 3 безпосередньо випливають деякі наслідки. Зокрема, можна отримати суттєве узагальнення відомого результату Є. Г. Ємельянова [9]. Дійсно, покладемо $\left[\mathcal{L}_1(A_{n,2})\right]^{1/n} =: \lambda$, $\left[\mathcal{L}_2(A_{n,2})\right]^{1/n} =: \frac{R^2}{\lambda}$, $\left[\mathcal{L}(A_{n,2})\right]^{1/n} = R^2$, $\lambda, R \in \mathbb{R}^+$. Нехай для будь-якої $(n, 2)$-променевої системи $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$ і відповідних значень $\lambda_p = \left(\mathcal{L}_p(A_{n,2})\right)^{1/n}$ $A_{n,2}(\lambda) = \{a_{k,p}(\lambda)\}$ позначає $(n, 2)$-променеву систему точок таку, що $a_{k,p}(\lambda) = \lambda_p \frac{a_{k,p}}{|a_{k,p}|}$, $k = \overline{1, n}$, $p = 1, 2$, де $\lambda_1 := \lambda$, $\lambda_2 := \frac{R^2}{\lambda}$. Враховуючи введені раніше означення, отримуємо

$$t_0\left(\frac{1}{R} A_{n,2}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1-\rho_k^{2/\alpha_k}}{1+\rho_k^{2/\alpha_k}}\right]^{\frac{1}{n}}, \qquad t_0\left(\frac{1}{R} A_{n,2}(\lambda)\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1-\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{2/\alpha_k}}{1+\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{2/\alpha_k}}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Наслідок 4. *Нехай* $n \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$, λ, $R \in \mathbb{R}^+$, $\lambda < R$. *Тоді для будь-якої* $(n, 2)$-*променевої системи точок* $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$ *такої, що* $\mathcal{L}(A_{n,2}) = R^{2n}$, $\mathcal{L}_1(A_{n,2}) = \lambda^n$, $t_0\left(\frac{1}{R} A_{n,2}\right) = t_0\left(\frac{1}{R} A_{n,2}(\lambda)\right)$, *і довільної системи попарно непере-*

тинних областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq \left(\frac{4R}{n}\right)^{2n} \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right]^{2n}.$$

Знак рівності у цій нерівності досягається тоді і лише тоді, коли $a_{k,p}$ *і* $\tilde{B}_{k,p}$ *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)^2}{(w^n - \lambda^n)^2(R^{2n} - \lambda^n w^n)^2}\,dw^2$$

і $\operatorname{cap} \tilde{B}_{k,p} \setminus B_{k,p} = 0$.

Доведення. Із теореми 3 випливає нерівність

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq (2R)^{2n} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2 \left[t_0\left(\frac{1}{R} A_{n,2}(\lambda)\right)\right]^{2n} =$$

$$= (2R)^{2n} \left[\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{1 - \left(\dfrac{\lambda}{R}\right)^{2/\alpha_k}}{1 + \left(\dfrac{\lambda}{R}\right)^{2/\alpha_k}}\right]^2.$$

Лема 2 [9]. *Функція* $y = \ln x \dfrac{1 - \rho^{1/x}}{1 + \rho^{1/x}}$ *є опуклою доверху по* $x \in (0, 1)$ *при кожному фіксованому* $\rho \in (0, 1)$.

Враховуючи викладене вище, отримуємо

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq (2R)^{2n} \left[\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{1 - \left(\dfrac{\lambda}{R}\right)^{2/\alpha_k}}{1 + \left(\dfrac{\lambda}{R}\right)^{2/\alpha_k}}\right]^2 \leq$$

$$\leq (2R)^{2n} \left(\frac{2}{n}\right)^{2n} \left[\frac{1 - \left(\dfrac{\lambda}{R}\right)^n}{1 + \left(\dfrac{\lambda}{R}\right)^n}\right]^{2n} = \left(\frac{4R}{n}\right)^{2n} \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right]^{2n}.$$

Наслідок 4 доведено.

Функціонал $t_0(A_{n,2})$, визначений на множині $(n, 2)$-променевих систем точок, можна поширити на n-променеві системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \subset U$, що належать одиничному кругу, за правилом $t_0(A_n) := t_0\left(\hat{A}_{n,2}\right)$, де $\hat{A}_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $a_{k,1} := a_k$, $a_{k,2} := (\overline{a}_k)^{-1}$, $k = \overline{1,n}$. Зрозуміло, що якщо $A_n \subset U_R$, $R \in \mathbb{R}^+$, то $t_0(A_n) := t_0\left(\dfrac{1}{R} A_n\right)$. Аналогічно до попереднього, для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\} \subset U_R$ і $0 < \lambda < R$ покладемо $A_n(\lambda) := \left\{\dfrac{a_k}{|a_k|}\lambda\right\}_{k=1}^n$. Із означення видно, що $A_n(\lambda) \subset U_R$ при всіх $\lambda \in (0, R)$. Тепер можна сформулювати результат, який випливає із теореми 1 і леми 2.

***Наслідок* 5.** *Нехай* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, λ, $R \in \mathbb{R}^+$, $\lambda < R$. *Тоді для будь-якої* n-*променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *яка задовольняє умови* $A_n \subset U_R$, $\mathcal{L}(A_n) = \lambda^n$, $t_0\left(\frac{1}{R}A_n\right) = t_0\left(\frac{1}{R}A_n(\lambda)\right)$, *і довільної системи попарно неперетинних областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset U_R$, $k = \overline{1, n}$, *справджується нерівність*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq \left(\frac{4\lambda}{n}\right)^n \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right]^n.$$

Знак рівності у цій нерівності досягається тоді і лише тоді, коли a_k *і* $\tilde{B}_k$, *що належать* U_R, *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)}{(w^n - \lambda^n)^2(R^{2n} - \lambda^n w^n)^2}\,dw^2$$

і $\operatorname{cap} \tilde{B}_k \setminus B_k = 0$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $R = 1$, тобто $a_k \in B_k \subset U_1$, $k = \overline{1, n}$. Із рівності (6) отримуємо нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (2\lambda)^n \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^n \frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Зрозуміло, що $g_k^{(s)} \in G_k^{(s)} \subset U_1$, $G_k^{(1)} \cap G_k^{(2)} = \varnothing$, $k = \overline{1, n}$, $s = 1, 2$. При кожному $k = \overline{1, n}$ розглянемо конформний автоморфізм $w = T_k(z)$ площини комплексних чисел, при якому уявна вісь і одиничний круг перетворюються в себе, до того ж

$$T_k\left(g_k^{(s)}\right) = (-1)^s\, i\, (\lambda_k)^{1/\alpha_k}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}^+,$$

$$T_k\left(G_k^{(s)}\right) =: \Omega_k^{(s)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad s = 1, 2.$$

Існування таких автоморфізмів є очевидним. Тоді за умовами наслідку 5, інваріантністю функціонала $\left|a_1 - a_2\right|^{-2} r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)$ і класичною теоремою П. П. Куфарєва (див., наприклад, [10]) отримуємо нерівність

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leq (2\lambda)^n \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right)\left[\prod_{k=1}^n \frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, -i\lambda_k^{1/\alpha_k}\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, i\lambda_k^{1/\alpha_k}\right)}{4\lambda_k^2}\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq (2\lambda)^n \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right)\frac{1 - \lambda^{2/\alpha_k}}{1 + \lambda^{2/\alpha_k}} = (2\lambda)^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \left(t_0(A_n)\right)^n =$$

$$= (2\lambda)^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \left(t_0(A_n(\lambda))\right)^n = (2\lambda)^n \prod_{k=1}^n \alpha_k \frac{1 - \lambda^{2/\alpha_k}}{1 + \lambda^{2/\alpha_k}} \leq$$

$$\leq (2\lambda)^n \left(\frac{2}{n}\right)^{2n} \left(\frac{1 - \lambda^n}{1 + \lambda^n}\right)^n = \left(\frac{4\lambda}{n}\,\frac{1 - \lambda^n}{1 + \lambda^n}\right)^n.$$

Якщо $R \neq 1$, то розглянемо $A_n' = \frac{1}{R} A_n$ і $\{B_k'\}_{k=1}^n$, $B_k' = T_R(B_k)$, $T_R(z) :=$ $:= \frac{1}{R} z$. Звідси одержимо співвідношення

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k', a_k') \leq \left(\frac{4}{n} \frac{\lambda}{R} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n}{1 + \left(\frac{\lambda}{R}\right)^n} \right)^n,$$

яке є рівносильним шуканій нерівності. Випадок рівності досліджується аналогічно попередньому.

Наслідок 5 доведено.

Наслідок 6. *Нехай* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, R, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\frac{\lambda}{R} \in \left(0, \frac{1}{7}\right]$. *Тоді для будь-якої* $(n, 2)$*-променевої системи точок* $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$ *такої, що* $\mathcal{L}(A_{n,2}) = R^{2n}$, $\mathcal{L}_1(A_{n,2}) = \lambda^n$, $t_0\left(\frac{1}{R} A_{n,2}\right) = t_0\left(\frac{1}{R} A_{n,2}(\lambda)\right)$, *і довільної системи взаємно неперетинних областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leq (2R)^{2n} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n} \right]^{2n}.$$

Знак рівності у цій нерівності досягається тоді і лише тоді, коли $a_{k,p}$ *і* $\tilde{B}_{k,p}$ *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)^2}{(w^n - \lambda^n)^2 (R^{2n} - \lambda^n w^n)^2}\,dw^2$$

і $\operatorname{cap} \tilde{B}_{k,p} \setminus B_{k,p} = 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$.

Аналогічний результат має місце для неперетинних областей у крузі U_R.

Наслідок 7. *Нехай* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, R, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\frac{\lambda}{R} \in \left(0, \frac{1}{7}\right]$. *Тоді для будь-якої* n*-променевої системи точок* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $A_n \subset U_R$, $\mathcal{L}(A_n) = \lambda^n$, $t_0\left(\frac{1}{R} A_n\right) =$ $= t_0\left(\frac{1}{R} A_n(\lambda)\right)$, *і довільної системи взаємно неперетинних областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset U_R$, $k = \overline{1,n}$, *виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq (2\lambda)^n \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n} \right]^n.$$

Знак рівності у цій нерівності досягається тоді і лише тоді, коли a_k *і* $\tilde{B}_k$, *що належать* U_R, *є відповідно полюсами і круговими областями квадратичного диференціала*

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)}{(w^n - \lambda^n)^2 (R^{2n} - \lambda^n w^n)^2}\,dw^2$$

і $\operatorname{cap} \tilde{B}_k \setminus B_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159 – 245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.
4. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
5. *Дубинин В. Н.* О произведении внутренних радиусов „частично неналегающих" областей // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 24 – 31.
6. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об зкстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48 – 66.
7. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1(295). – С. 3 – 76.
8. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1997. – **237**. – С. 56 – 73.
9. *Емельянов Е. Г.* О связи двух задач об зкстремальном разбиении // Там же. – 1987. – **160**. – С. 91 – 98.
10. *Куфарев П. П., Фалес А. Э.* Об одной зкстремальной задаче для дополнительных областей // Докл. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **81**, № 6. – С. 995 – 998.
11. *Бахтин А. К.* Оценки функционалов для открытых множеств // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 2. – С. 147 – 153.
12. *Бахтин А. К.* О некоторых зкстремальных задачах геометрической теории функций комплексного переменного // Доп. НАН України. – 2006. – № 9. – С. 7 – 11.
13. *Бахтин А. К.* Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Там же. – № 10. – С. 7 – 13.
14. *Бахтин А. К., Вьюн В. Е.* Применение разделяющего преобразования к оценкам внутренних радиусов открытых множеств // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1314 – 1322.

Одержано 03.10.07,
після доопрацювання — 03.02.09