УДК 531.36

В. С. Денисенко, А. А. Мартынюк, В. И. Слынько
(Ин-т механики НАН Украины, Киев)

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, СОХРАНЯЮЩИХ УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ТАКАГИ – СУГЕНО

The general comparison principle for stability preserving mappings is presented. Sufficient conditions of the stability of the fuzzy continuous Takagi – Sugeno systems are established.

Наведено загальний принцип порівняння для відображень, що зберігають стійкість, та встановлено достатні умови стійкості нечітких неперервних систем Такагі – Сугено.

1. Введение. Одним из подходов при исследовании нечетких систем дифференциальных уравнений является подход, основанный на модели Такаги – Сугено [1]. Эта модель позволяет аппроксимировать непрерывную вещественную функцию g, определенную на замкнутом и ограниченном подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$ [2]. Применительно к динамике нелинейных систем упомянутый подход позволяет аппроксимировать исходную нелинейную систему с помощью локально линейных моделей в терминах предикатных правил „если-то”.

Обзор результатов по этому направлению можно найти в статьях [3, 4], где имеется обширная библиография.

Актуальной задачей теории разрывных динамических систем является разработка общих подходов к исследованию устойчивости (см. [5, 6]). Концепция матричнозначных отображений, сохраняющих устойчивость для разрывных систем, позволяет сформулировать унифицированный подход и исследовать устойчивость систем Такаги – Сугено.

В данной работе приводится общий принцип сравнения для отображений, сохраняющих устойчивость, и рассматриваются нечеткие непрерывные системы Такаги – Сугено. В качестве примера исследуется нечеткая непрерывная система Такаги – Сугено второго порядка.

2. Матричнозначные отображения, сохраняющие устойчивость. Динамическую систему будем определять как семейство движений, описываемых соответствующей системой эволюционных уравнений. Эволюция процесса во времени T различается в зависимости от смысла $T = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ (непрерывный случай) или $T = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (дискретный случай). В метрическом пространстве (X, ρ) любые движения системы определяются начальными условиями $(t_0, a) \in T \times A$, $A \subset X$ — открытое множество X. Далее приведем некоторые необходимые понятия и определения.

Определение 1 [7]. *Пусть* (X, ρ) — *метрическое пространство с подмножеством* $A \subset X$. *Отображение* $p(\cdot\,; a,\, t_0)\colon T_{t_0,a} \to X$ *называется движением* (*при условии его существования*), *если оно определяется начальными условиями* (t_0, a) *при* $t \in [t_0, \tau_1) \bigcap T = T_{t_0,a}$ *и* $p(t_0;\, a,\, t_0) = a$, *где* τ_1 — *конечное или символ бесконечности.*

Пусть $\Lambda = \bigcup_{(a,t_0)\in A\times T} \left(T_{a,t_0} \times \{a\} \times \{t_0\} \to X\right)$ и множество $S \subseteq \{p(\cdot\,; a,\, t_0) \in \Lambda \mid p(t_0;\, a,\, t_0) = a\}$ представляет семейство движений, тогда кортеж множеств и пространств (T, X, A, S) будем называть динамической системой.

Если $T = \mathbb{R}_+$ и все движения $p \in S$ непрерывны по t, то динамическая система $(\mathbb{R}_+, X, A, S)$ непрерывна. В случае, когда элементы множества S не являются непрерывными, динамическая система является разрывной.

Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — некоторые метрические пространства с метриками ρ_1, ρ_2 и (T, X_1, A_1, S_1) — разрывная динамическая система. Предположим, что каким-либо способом построено матричнозначное отображение [8]

$$U(t, p): \ T \times X_1 \to X_2, \tag{1}$$

где U — $(m \times m)$-матричнозначная функция с элементами $u_{ij}(t, p)$, $i, j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$, и для любого движения $p(\cdot\,; a, t_0) \in S_1$ функция $q(\cdot\,; b, t_0) = U(\cdot\,;$ $p(\cdot\,, a, t_0))$ с начальным значением $b = U(t_0, a)$ является движением, для которого $T_{a,t_0} = T_{b,t_0}$, $b \in A_2 \subset X_2$ и $E_q \subset E_p$, где E_q и E_p — множества точек разрыва для движений q и p соответственно.

Пусть S_2 обозначает множество движений q, которое определяется вариацией начальных значений $(t_0, a) \in T \times A_1$. В этом случае (T, X_2, A_2, S_2) является разрывной динамической системой, порождаемой движениями q. При этом множество S_2 определяется так:

$$S_2 = \big\{q(\cdot\,; b, t_0)\,|\,q(t; b, t_0) = U\big(t, p(t; a, t_0)\big), p(\cdot\,; a, t_0) \in S_1, b = U(t_0; a),$$
$$T_{b,t_0} = T_{a,t_0}, \, a \in A_1, \, t_0 \in T\,\big\}. \tag{2}$$

Кроме того, обозначим через $M_1 \subset A_1$ и $M_2 \subset A_2$ некоторые множества, инвариантные относительно множеств S_1 и S_2 соответственно. При этом множество M_2 определим формулой

$$M_2 = \left\{q \in X_2 \,\middle|\, q = U(t^*, p) \quad \text{для некоторых} \quad p \in M_1 \text{ и } t^* \in T\right\}. \tag{3}$$

Таким образом, функция (1) индуцирует отображение множества S_1 в множество S_2, которое обозначим через $\mathfrak{M}$, т. е. $S_2 = \mathfrak{M}(S_1)$. Следуя [9], приведем некоторые вспомогательные определения.

Определение 2. *Множество* $M \subset A$ *называется инвариантным относительно множества* S *или, что то же самое, пара* (S, M) *инвариантна, если* $a \in M$ *влечет* $p(t;\, a,\, t_0) \in M$ *для всех* $t \in T_{a,t_0}$, $t_0 \in T$, *и всех* $p(\cdot\,; a,$ $t_0) \in S$.

Определение 3. *Пара* (S, M) *называется устойчивой, если она инвариатна и для любого* $\varepsilon > 0$ *и* $t_0 \in T$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что* $\rho\big(p(t;\, a,\, t_0), M\big) < \varepsilon$ *для всех* $t \in T_{a,t_0}$ *и всех* $p(\cdot\,; a,\, t_0) \in S$, *как только* $\rho(a, M) < \delta$. *Если* $\delta = \delta(\varepsilon)$, *то пара* (S, M) *называется равномерно устойчивой.*

Определение 4. *Пара* (S, M) *называется асимптотически устойчивой, если она устойчива и для любого* $t_0 \in T$ *существует* $\eta = \eta(t_0) > 0$ *такое, что*

$$\lim_{t \to \infty} \rho\big(p(t; a, t_0), M\big) = 0$$

для всех $p(\cdot\,; a,\, t_0) \in S$, *как только* $\rho(a, M) < \eta$.

Определение 5. *Пара* (S, M) *называется равномерно асимптотически устойчивой, если она равномерно устойчива, существует* $\delta > 0$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\tau = \tau(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $\rho\big(p(t;\, a,\, t_0), M\big) < \varepsilon$ *для всех* $t \in$ $\in \big\{t \in T_{a,t_0} : |\,t - t_0\,| \geq \tau\big\}$ *и всех* $p(\cdot\,; a,\, t_0) \in S$, *как только* $\rho(a, M) < \delta$.

Определение 6. *Пара* (S, M) *называется экспоненциально устойчивой, если существует* $\alpha > 0$ *и для всех* $\varepsilon > 0$, $t_0 \in T$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $\rho\big(p(t;\, a,\, t_0), M\big) < \varepsilon\, e^{-\alpha(t - t_0)}$ *для всех* $t \in T_{a,t_0}$ *и всех* $p(\cdot\,; a,$ $t_0) \in S$, *как только* $\rho(a, M) < \delta$.

Определение 7 [9]. *Отображение* (1) *сохраняет устойчивость от разрывной динамической системы* (T, X_1, A_1, S_1) *к разрывной динамической системе*

(T, X_2, A_2, S_2) *с инвариантными множествами* $M_1 \subset A_1$ *и* $M_2 \subset A_2$ *соответственно, если* $U(t, p)$ *удовлетворяет условиям*:

1) *инвариантность пары* (S_2, M_2) *влечет за собой инвариантность пары* (S_1, M_1);

2) *устойчивость определенного типа пары* (S_2, M_2) *влечет за собой устойчивость того же типа пары* (S_1, M_1);

3) *имеет место включение* $E_q \subset E_p$ *для любых разрывных движений* q *и* p, *допустимых для заданных разрывных динамических систем.*

Сформулируем теперь основную теорему обобщенного принципа сравнения для отображений, сохраняющих устойчивость.

Теорема 1 [8]. *Предположим, что разрывной динамической системе* $(\mathbb{R}_+, X_1, A_1, S_1)$ *поставлена в соответствие разрывная динамическая система сравнения* $(\mathbb{R}_+, X_2, A_2, S_2)$ *с помощью матричнозначного отображения* $U(t, p)$: $\mathbb{R}_+ \times X_1 \to X_2$. *Пусть существуют замкнутые множества* $M_i \subset A_i$, $i = 1, 2$, *которые вместе с функцией* $U(t, p)$ *удовлетворяют следующим условиям*:

1) *для множеств* $\mathfrak{M}(S_1)$ *и* S_2 *имеет место включение* $\mathfrak{M}(S_1) \subset S_2$;

2) *существуют функции сравнения* $\underline{\psi}$, $\overline{\psi}$, *принадлежащие классу Хана* K, *такие, что*

$$\underline{\psi}(\rho_1(p, M_1)) \le \rho_2(U(t, p), M_2) \le \overline{\psi}(\rho_1(p, M_1)) \qquad (4)$$

при всех $t \in T$ *и* $p \in X_1$, *где* ρ_1, ρ_2 — *некоторые метрики, определенные на пространствах* X_1 *и* X_2 *соответственно.*

Тогда:

1) *из инвариантности пары* (S_2, M_2) *следует инвариантность пары* (S_1, M_1);

2) *из устойчивости, равномерной устойчивости, асимптотической устойчивости, равномерной асимптотической устойчивости пары* (S_2, M_2) *следуют те же типы устойчивости пары* (S_1, M_1);

3) *если в оценке* (4) $\underline{\psi}(\rho_1(p, M_1)) = a(\rho_1(p, M_1))^b$, *где* $a > 0, b > 0$, *то из экспоненциальной устойчивости пары* (S_2, M_2) *следует экспоненциальная устойчивость пары* (S_1, M_1).

Доказательство. *Доказательство утверждения* 1. Пусть пара (S_2, M_2) инвариантна. В этом случае для любого $a \in M_1$ и любого движения $p(\cdot\,; a, t_0) \in S_1$ движения $q(\cdot\,; b, t_0) = U(t, p(\cdot\,; a, t_0)) \in S_2$, где $b = U(t_0, a)$. Это следует из условия 1 теоремы и определения отображения $\mathfrak{M}(S_1)$. Далее, разрывность движения $p(\cdot\,; a, t_0) \in S_1$ в точках E_p следует из разрывности движений $q \in S_2$ в точках E_q, и при этом $E_q \subset E_p$. Кроме того, из инвариантности пары (S_2, M_2) следует, что $q(\cdot\,; b, t_0) = U(t, p) \in M_2$ при всех $t \in T_{b,t_0} = T_{a,t_0}$. Поскольку множества M_1, M_2 замкнуты и выполняется неравенство (4), движение $p(\cdot\,; a, t_0)$ принадлежит M_1 при всех $t \in T_{a,t_0}$. Отсюда следует инвариантность пары (S_1, M_1).

Доказательство утверждения 2. Предположим, что пара (S_2, M_2) устойчива. В этом случае, согласно определению устойчивости, для любого $\varepsilon_2 > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\delta_2 = \delta_2(t_0, \varepsilon_2) > 0$ такое, что $\rho_2(q(t; b, t_0), M_2) < \varepsilon_2$ при всех $q(\cdot\,; b, t_0) \in S_2$ и всех $t \in T_{b,t_0}$, как только $\rho_2(b, M_2) < \delta_2(t_0, \varepsilon_2)$.

Поскольку пара (S_2, M_2) устойчива, для любого $\varepsilon_1 > 0$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$

выберем $\varepsilon_2 = \underline{\psi}(\varepsilon_1)$ и $\delta_1 = \overline{\psi}^{-1}(\delta_2)$. Если теперь предположить, что $\rho_1(a, M_1) < \delta_1$, то согласно (4) получим

$$\rho_2(b, M_2) \leq \overline{\psi}(\rho_1(a, M_1)) < \overline{\psi}(\delta_1) = \overline{\psi}\big(\overline{\psi}^{-1}(\delta_2)\big) = \delta_2,$$

т. е. $\rho_2(b, M_2) < \delta_2$. Отсюда следует, что для всех движений $q(\cdot\,; b, t_0) \in S_2$ верна оценка $\rho_2(q, M_2) < \varepsilon_2$ при всех $t \in T_{b,t_0}$. Возвращаясь вновь к оценкам (4), находим, что при всех $p(\cdot\,; a, t_0) \in S_1$ и при всех $t \in T_{a,t_0} = T_{b,t_0}$, где $b = U(t_0, a)$, выполняются неравенства

$$\rho_1(p, M_1) \leq \underline{\psi}^{-1}(\rho_2(U(t, p), M_2)) < \underline{\psi}^{-1}(\varepsilon_2) = \underline{\psi}^{-1}\big(\underline{\psi}(\varepsilon_1)\big) = \varepsilon_1,$$

т. е. $\rho_1(p, M_1) < \varepsilon_1$, как только $\rho_1(a, M_1) < \delta_1$. Отсюда следует, что пара (S_1, M_1) устойчива.

Известно, что движение системы асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и притягивающее. Предположим, что пара (S_2, M_2) притягивающая. В этом случае для любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ существует $\Delta_2 = \Delta_2(t_0)$ такое, что при всех $q(\cdot\,; b, t_0) \in S_2$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \rho_2\big(q(t; b, t_0), M_2\big) = 0,$$

как только $\rho_2(b, M_2) < \Delta_2$. Иными словами, для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\tau = \tau(\varepsilon_2, t_0, q) > 0$, $q = q(\cdot\,; b, t_0) \in S_2$, такое, что $\rho_2(q, M_2) < \varepsilon_2$ при всех $t \in T_{b,t_0+\tau}$, как только $\rho_2(b, M_2) < \Delta_2$. Согласно условию 1 теоремы 1, для любого движения $p(\cdot\,; a, t_0) \in S_1$ положим $b = U(t_0, a)$. Тогда $q(\cdot\,; b, t_0) = U(t, p) \in S_2$. Далее, для любого $\varepsilon_1 > 0$ выберем $\varepsilon_2 = \underline{\psi}(\varepsilon_1)$ и положим $\Delta_1 = \overline{\psi}^{-1}(\Delta_2)$. При этом для любого движения $p \in S_1$ получим

$$\rho_2(b, M_2) \leq \overline{\psi}(\rho_1(a, M_1)) < \overline{\psi}(\Delta_1) = \overline{\psi}\big(\overline{\psi}^{-1}(\Delta_2)\big) = \Delta_2,$$

т. е. $\rho_2(b, M_2) < \Delta_2$, как только $\rho_1(a, M_1) < \Delta_1$ и $t \in T_{a,t_0+\tau} = T_{b,t_0+\tau}$. Следовательно, $\rho_2\big(q(t; b, t_0), M_2\big) < \varepsilon_2$ при всех $t \in T_{b,t_0+\tau}$. Возвращаясь к оценке (4), находим

$$\rho_1(p, M_1) \leq \underline{\psi}^{-1}(\rho_2(q, M_2)) < \underline{\psi}^{-1}(\varepsilon_2) = \underline{\psi}^{-1}\big(\underline{\psi}(\varepsilon_1)\big) = \varepsilon_1,$$

т. е. $\rho_1(p, M_1) < \varepsilon_1$. Поэтому пара (S_1, M_1) притягивающая. Таким образом, если пара (S_2, M_2) асимптотически устойчива, то пара (S_1, M_1) также асимптотически устойчива.

Доказательство утверждений о равномерной устойчивости и равномерной асимптотической устойчивости проводится по той же схеме, но с тем отличием, что величины δ_2, Δ_2 выбираются независимыми от $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство утверждения 3. Предположим, что пара (S_2, M_2) экспоненциально устойчива. В этом случае существует $\alpha_2 > 0$ и для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_2) > 0$ такое, что для любых движений $q(\cdot\,; b, t_0) \in S_2$ при всех $t \in T_{b,t_0}$ имеет место оценка

$$\rho_2\big(q(t; b, t_0), M_2\big) < \varepsilon_2 e^{-\alpha_2(t - t_0)},$$

как только $\rho_2(b, M_2) < \delta_2$. Согласно условию 1 теоремы, длю любого $p \in S_1$ существует движение $q(\cdot\,; b, t_0) = U(t, p) \in S_2$, где $b = U(t_0, a)$. Далее, для любого $\varepsilon_1 > 0$ выберем $\varepsilon_2 = a\varepsilon_1^b$. Пусть $\alpha_1 = \alpha_2/b$ и $\delta_1 = \overline{\psi}^{-1}(\delta_2)$. Для движений $p(t; a, t_0) \in M_1$, для которых $\rho_1(a, M_1) < \delta_1$, согласно оценке (4) получим

$$\rho_2(b, M_2) \le \overline{\psi}(\rho_1(a, M_1)) < \overline{\psi}(\delta_1) = \overline{\psi}\left(\overline{\psi}^{-1}(\delta_2)\right) = \delta_2,$$

т. е. $\rho_2(b, M_2) < \delta_2$. Следовательно,

$$\rho_2(q(t; b, t_0), M_2) < \varepsilon_2 e^{-\alpha_2(t-t_0)}$$

при всех $t \in T_{b,t_0}$. Согласно предположению теоремы, в оценке (4) следует положить $\underline{\psi}(\rho_1(p, M_1)) = a(p(p, M_1))^b$, где $a > 0$, $b > 0$. Поэтому

$$\rho_1(p, M_1) \le \left(\frac{\varepsilon_2}{a}\right)^{1/b} e^{-\frac{\alpha_2}{b}(t-t_0)} = \varepsilon_1 e^{-\alpha_1(t-t_0)}$$

при всех $t \in T_{a,t_0}$. Таким образом, пара (S_1, M_1) экспоненциально устойчива.

3. Устойчивость нечеткой системы Такаги – Сугено. Пусть в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы нечеткие множества M_i с функциями принадлежности $\mu_i : \mathbb{R}^n \to [0, 1], i = 1, 2, \ldots, r$. Относительно функций принадлежности дополнительно предположим, что $\mu_i(x) \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\sum_{i=1}^n \mu_i(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Нечеткая система Такаги – Сугено, описываемая предикатными правилами „если-то", формализуется следующим образом:

$$\text{если} \quad x \in M_i, \quad \text{то} \quad S_i, \; i = 1, 2, \ldots, r,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, — некоторая динамическая (возможно, разрывная) система. Заметим, что каждому правилу ставится в соответствие динамика локально линейной подсистемы в общей модели системы таким образом, что подсистемы являются независимыми.

В этой статье рассматривается случай, когда S_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, — линейные непрерывные динамические системы.

Пусть система Такаги – Сугено описывается набором нечетких предикатных правил R_i, $i = 1, 2, \ldots, r$:

$$\text{если} \quad x \in M_i, \quad \text{то} \quad \frac{dx}{dt} = A_i x, \tag{5}$$
$$x(t_0) = x_0, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, A_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, — постоянные $(n \times n)$-матрицы.

В этом случае полная динамика нечеткой системы Такаги – Сугено описывается нелинейной системой

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sum_{i=1}^r \mu_i(x)} \sum_{i=1}^r \mu_i(x) A_i x. \tag{6}$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытая связная окрестность состояния равновесия $x = 0$ системы (6). Устойчивость состояния равновесия $x = 0$ нелинейной системы (6) понимается в классическом смысле.

Пусть $\mathcal{E}$ — пространство симметричных $(n \times n)$-матриц, $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ — конус положительно полуопределенных симметричных матриц, $\mathcal{B}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\mathcal{B}X =$

$= (\mathrm{tr}\, X)I$, где $\mathrm{tr}\, X$ — след матрицы X, I — единичная матрица. Пусть $\mathcal{F}: \mathcal{E} \to \to \mathcal{E}$ — линейный оператор.

Определение 8. *Постоянная* $\gamma \geq 0$ *называется константой позитивности оператора* $\mathcal{F}: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *относительно конуса* $\mathcal{K}$, *если оператор* $\mathcal{F} + \gamma\mathcal{B}$ *является положительным относительно конуса* $\mathcal{K}$.

Покажем, что для оператора $\mathcal{F}X = AX + XA^T$ существует константа позитивности γ. Обозначим через Γ пересечение конуса $\mathcal{K}$ и единичной сферы $S^{n(n-1)/2} \subset \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Множество Γ есть компакт и функция $g(X, Y) = = -\dfrac{\mathrm{tr}\,(AXY) + \mathrm{tr}\,(XA^TY)}{\mathrm{tr}\, X\, \mathrm{tr}\, Y}$ непрерывна на $\Gamma \times \Gamma^*$, поэтому достигает на этом компакте супремума $\gamma \geq 0$, т. е. $-\dfrac{\mathrm{tr}\,(AXY) + \mathrm{tr}\,(XA^TY)}{\mathrm{tr}\, X\, \mathrm{tr}\, Y} \leq \gamma$. Отсюда $\mathrm{tr}\,(AXY) + + \mathrm{tr}\,(XA^TY) + \gamma\, \mathrm{tr}\, X\, \mathrm{tr}\, Y \geq 0$ при всех $X \in \mathcal{K}$, $Y \in \mathcal{K}^*$. Таким образом, $\mathcal{F} + \gamma\mathcal{B} \overset{\mathcal{K}}{\geq} \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$.

Теперь выясним, из каких условий можно найти константу позитивности γ оператора $\mathcal{F}$. Из определения ясно, что если произвольная матрица X принадлежит конусу $\mathcal{K}$ положительно полуопределенных симметричных матриц, то и матрица

$$G = (\mathcal{F} + \gamma\mathcal{B})X = AX + XA^T + \gamma(\mathrm{tr}\, X)I$$

должна принадлежать конусу $\mathcal{K}$. Следует отметить, что, благодаря структуре конуса $\mathcal{K}$ [10], достаточно делать проверку лишь для матриц вида $X = xx^T$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тогда для матриц $X = xx^T$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, получим

$$G = (\mathcal{F} + \gamma\mathcal{B})xx^T = Axx^T + xx^TA^T + \gamma\big(\mathrm{tr}(xx^T)\big)I.$$

Пусть

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

тогда для того, чтобы матрица G была положительно полуопределенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры этой матрицы были неотрицательны, т. е.

$$\Delta_1(x) = g_{11} \geq 0, \qquad \Delta_2(x) = g_{11}g_{12} - g_{12}^2 \geq 0, \ldots, \Delta_n(x) = \det G \geq 0.$$

Из этих неравенств и нужно искать константу позитивности γ. Отметим, что миноры $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ являются формами соответственно второго, четвертого, …, $2n$-го порядка от x.

Пусть операторы $\mathcal{F}_i : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\mathcal{F}_i X = A_i X + X A_i^T$, $i = 1, 2, \ldots, r$, а γ_i — соответствующие константы позитивности операторов $\mathcal{F}_i$ относительно $\mathcal{K}$. Обозначим

$$w_i = \sup_{x \in \Omega} \frac{\mu_i(x)}{\sum_{i=1}^r \mu_i(x)}, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \qquad \bar{\bar{\mu}} = \inf_{x \in \Omega} \frac{\sum_{i=1}^r \gamma_i \mu_i(x)}{\sum_{i=1}^r \mu_i(x)}.$$

Для того чтобы применить теорему 1 с целью анализа устойчивости состояния $x = 0$ системы (6), формализуем некоторые понятия из п. 2 для системы (6).

Пространство $(X_1, \rho_1) \triangleq (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, $T = \mathbb{R}_+$ и $A_1 = \mathbb{R}^n$. Семейство движений S_1 системы (6), описывающее динамическую систему, получается вариацией начального значения x_0 на A_1 и t на $\mathbb{R}_+$. Следовательно, $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n, A_1, S_1)$ является конечномерной динамической системой.

Составляющие динамической системы сравнения определяются так: $T = \mathbb{R}_+$, $(X_2, \rho_2) \triangleq (\mathbb{R}^{n \times n}, \|\cdot\|_E)$, где $\|A\|_E = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$, $A_2 = \mathbb{R}^{n \times n}$. Следовательно, $(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n \times n}, A_2, S_2)$ — динамическая система сравнения.

В качестве матричнозначного отображения $U(t, p)$ будем применять простейшее $U(x) = x x^T$, отображающее $\mathbb{R}^n$ на границу конуса $\mathcal{K}$. В этом случае матричное уравнение сравнения

$$\frac{dV}{dt} = \left(\sum_{i=1}^r w_i \mathcal{F}_i + \left(\sum_{i=1}^r w_i \gamma_i - \bar{\bar{\mu}} \right) \mathcal{B} \right) V, \quad V(t_0) = U_0, \tag{7}$$

генерирует семейство движений S_2, определяемое соотношением (2).

Поскольку для системы (7) состоянием равновесия является $U = 0$, парам (S_2, M_2) и (S_1, M_1) соответствуют пары $(S_2, 0)$ и $(S_1, 0)$. Наконец заметим, что для системы (6) и системы сравнения (7) $E_q \subset E_p$, так как $E_q = \varnothing$, $E_p \neq \varnothing$.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть нечеткая система Такаги – Сугено* (6) *такова, что выполняется неравенство*

$$\max_{j=1,\ldots,n^2} \operatorname{Re} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^r w_i (A_i \otimes I + I \otimes A_i) + \left(\sum_{i=1}^r \gamma_i w_i - \bar{\bar{\mu}} \right) E \right) < 0,$$

где $\lambda_j(\cdot)$, $j = 1, 2, \ldots, n^2$, — *собственные значения соответствующей матрицы*, $E = \{e_{ij}\}_{i,j=1}^{n^2}$,

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) = (1,1) \bmod (n+1), \\ 0, & (i, j) \neq (1,1) \bmod (n+1), \end{cases}$$

$\otimes$ — *кронекерово произведение. Тогда состояние равновесия* $x = 0$ *системы* (6) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Для отображения $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{E}$, $U(x) = xx^T$, имеют место неравенства

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\sum_{i=1}^r \mu_i(x)} \sum_{i=1}^r \mu_i(x)\mathcal{F}_i U = \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i(x)(\mathcal{F}_i + \gamma_i \mathcal{B})U - \sum_{i=1}^r \gamma_i \mu_i(x)\mathcal{B}U}{\sum_{i=1}^r \mu_i(x)} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^r w_i \mathcal{F}_i + \left(\sum_{i=1}^r w_i\gamma_i - \overline{\overline{\mu}}\right)\mathcal{B}\right)U.$$

Необходимо отметить, что множество решений дифференциального неравенства $\frac{dU}{dt} \le \mathcal{F}U$, $U(t_0) = U_0$, где $\mathcal{F}$ — линейный оператор, образует динамическую систему. Для этого достаточно показать, что существует верхнее решение этого неравенства. Действительно, вследствие матричного принципа сравнения существует некоторое решение $V^+(t,\ t_0,\ U_0)$ уравнения $\frac{dV}{dt} = \mathcal{F}V$ такое, что $U(t,\ t_0,\ U_0) \le V^+(t,\ t_0,\ U_0)$ $\forall\, t > t_0$, где $U(t,\ t_0,\ U_0)$ — решение дифференциального неравенства $\frac{dU}{dt} \le \mathcal{F}U$. Поэтому в качестве верхнего решения можно взять $V^+(t,\ t_0,\ U_0)$.

Нетрудно проверить, что при отображении $U(x) = xx^T$ теорема 1 имеет место. Так, очевидно, что $\mathfrak{M}(S_1) \subset S_2$, а выбирая

$$\underline{\psi}(\rho_1(p, M_1)) = \underline{\psi}(\|x\|) = \|x\|^2, \qquad \overline{\psi}(\rho_1(p, M_1)) = \overline{\psi}(\|x\|) = \|x\|^2,$$

убеждаемся, что $\underline{\psi}(\rho_1(p, M_1)) \le \rho_2(U(t,p),\ 0) \le \overline{\psi}(\rho_1(p, M_1))$, так как $\rho_2(U(t,$ $p),\ 0) = \left\|xx^T\right\|_E = \|x\|^2$. Теперь, согласно теореме 1, можно утверждать, что отображение $U(x) = xx^T$ сохраняет устойчивость.

Вследствие свойств кронекеровых произведений условие теоремы 2 гарантирует выполнение неравенства

$$\max_{j=1,\ldots,n^2} \operatorname{Re}\lambda_j\left(\sum_{i=1}^r w_i\mathcal{F}_i + \left(\sum_{i=1}^r w_i\gamma_i - \overline{\overline{\mu}}\right)\mathcal{B}\right) < 0.$$

Поэтому состояние равновесия $V = 0$ матричного уравнения сравнения (7) асимптотически устойчиво.

Поскольку состояние равновесия $V = 0$ матричного уравнения сравнения (7) асимптотически устойчиво и конус $\mathcal{K}$ нормальный, динамическая система, определяемая дифференциальным неравенством $\frac{dU}{dt} \le \mathcal{F}U$, асимптотически устойчива. Вследствие теоремы 1 состояние равновесия $x = 0$ системы (6) также асимптотически устойчиво.

Теорема 2 доказана.

4. Пример. На плоскости $\mathbb{R}^2$ введем следующие множества: G_1 — открытая правая полуплоскость и G_2 — замкнутая левая полуплоскость. Определим нечеткие множества M_1 и M_2 функциями принадлежности $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in G_1, \\ 0,9 & \text{при } x \in G_2, \end{cases} \qquad \mu_2(x) = \begin{cases} 0,9 & \text{при } x \in G_1, \\ 1 & \text{при } x \in G_2. \end{cases}$$

Рассмотрим непрерывную нечеткую систему Такаги – Сугено (6) со структурными матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0,1 \\ 0,1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -0,1 \\ -0,1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Нетрудно убедиться, что $\gamma_1 = \gamma_2 = 4{,}01$, $w_1 = w_2 = 0{,}526$, $\bar{\bar{\mu}} = 4{,}01$ и

$$\max_{j=1,\ldots,4} \operatorname{Re}\lambda_j \left(\sum_{i=1}^{2} w_i (A_i \otimes I + I \otimes A_i) + \left(\sum_{i=1}^{2} \gamma_i w_i - \bar{\bar{\mu}} \right) E \right) = -0{,}63496 < 0.$$

Следовательно, состояние равновесия $x = 0$ нечеткой системы Такаги – Сугено (6) со структурными матрицами (8) асимптотически устойчиво.

Отметим, что для исследования нечетких систем (6) известен критерий асимптотической устойчивости, в основе которого лежит нахождение общей положительно определенной матрицы, удовлетворяющей матричным уравнениям Ляпунова, но для существования такой общей матрицы необходимо, чтобы все подсистемы были асимптотически устойчивы. В рассматриваемом примере матрицы A_1 и A_2 являются неустойчивыми, и поэтому применить этот критерий невозможно, но с помощью теоремы 2 можно исследовать систему (6) на устойчивость, что и было сделано выше. Таким образом, стабилизация в нечетких системах Такаги – Сугено возможна даже тогда, когда локальные подсистемы неустойчивые.

1. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern. – 1985. – **15**. – P. 116 – 132.
2. *Zeng X. J., Singh M. G.* Approximation theory of fuzzy systems – MIMO case // IEEE Trans. Fuzzy Syst. – 1995. – **3**, № 2. – P. 219 – 235.
3. *Benrejeb M., Gasmi M., Borne P.* New stability conditions for TS fuzzy continuous nonlinear models // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2005. – **5**, № 4. – P. 369 – 379.
4. *Dieulot J.-Y.* Design of stable controllers for Takagi – Sugeno systems with concentric characteristic regions // Ibid. – 2003. – **3**, № 1. – P. 65 – 74.
5. *Hui Ye, Michel A. N., Ling Hou.* Stability theory for hybrid dynamical systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1998. – **43**, № 4. – P. 461 – 474.
6. *Li Z., Soh C. B.* Lyapunov stability of discontinuons dynamic sysmems // IMA J. Math. Contr. and Inform. – 1999. – **16**. – P. 261 – 274.
7. *Michel A. N., Wang K., Hu B.* Qualitative theory of dynamical systems. – New York: Marcel Dekker, 2001. – 707 p.
8. *Мартынюк А. А.* Об устойчивости движения разрывных динамических систем // Докл. АН России. – 2004. – **397**, № 3. – С. 308 – 312.
9. *Guisheng Zhai, Bo Hu, Yesun, Michel A. N.* Analysis of time-controlled switched systems by stability // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2002. – **2**, № 2. – P. 203 – 213.
10. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

Получено 15.10.07,
после доработки — 26.11.08