УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ),
Г. П. Івасюк (Чернів. нац. ун-т)

КОРЕКТНА РОЗВ’ЯЗНІСТЬ ПАРАБОЛІЧНИХ ПОЧАТКОВИХ ЗАДАЧ СОЛОННИКОВА – ЕЙДЕЛЬМАНА

Initial problems for a new class of systems of equations are considered, which unite the structures of Solonnikov-parabolic and Eidelman-parabolic systems. The theorem on the correct solvability of these problems in the Hölder spaces of rapidly growing functions is proved, and an estimate of the norms of solutions via corresponding norms of right-hand sides of a problem is obtained. For the correctness of such an estimate, the requirement of parabolicity of the system is not only sufficient, but also necessary.

Рассматриваются начальные задачи для нового класса систем уравнений, объединяющие в себе структуры систем, параболических по Солонникову и Эйдельману. Доказана теорема о корректной разрешимости этих задач в пространствах Гельдера быстрорастущих функций и получена оценка норм решений через соответствующие нормы правых частей задачи. Для правильности такой оценки условие параболичности системы является не только достаточным, но и необходимым.

Класичне означення І. Г. Петровського [1] параболічних систем рівнянь із частинними похідними узагальнено С. Д. Ейдельманом [2] на випадок систем, в яких диференціювання за різними просторовими змінними мають, взагалі кажучи, різну вагу відносно диференціювання за часовою змінною, тобто системи мають векторну параболічну вагу $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$ (такі системи називають $\overrightarrow{2b}$-параболічними або параболічними за Ейдельманом), та В. О. Солонниковим [3] на випадок, коли порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати як від j, так і від k (такі системи названо параболічними за Солонниковим). Дослідженню задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем присвячено праці [2, 4 – 6], а дослідженню початкових і крайових задач для параболічних за Солонниковим систем — [3, 7, 8].

У даній статті розглядаються системи, які природно узагальнюють параболічні за Солонниковим системи і системи, параболічні у розумінні Ейдельмана (такі системи ми називаємо параболічними за Солонниковим системами квазіоднорідної структури або параболічними системами Солонникова – Ейдельмана). Вивчення таких систем, переважно для модельного випадку, розпочато в [9, 10]. У статті [11] анонсовано результати їх подальшого дослідження. Тут ці результати дещо уточнюються і наводяться повні (наскільки дозволяє обсяг статті) доведення теорем про коректну розв’язність початкових задач для розглядуваного класу систем у просторах Гельдера швидкозростаючих функцій та точні оцінки їх розв’язків. Зауважимо, що ці результати є новими для загальних $\overrightarrow{2b}$-параболічних і параболічних за Солонниковим систем. Вони доповнюють відповідні результати з [3 – 8].

1. Означення параболічної початкової задачі Солонникова – Ейдельмана. Нехай, як і в [10, 11], n, N, $b_1, \ldots, b_n$ — задані натуральні числа, b — найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m := (m_1, \ldots, m_n)$, $m_0 := 2b$, $m_j := 2b/(2b_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $\|\overline{\alpha}\| := \sum_{j=0}^{n} m_j \alpha_j$, якщо $\overline{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$; $\|\alpha\| := := \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j$, якщо $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; i — уявна одиниця; $A(t, x, \partial_t, \partial_x) := := \big(A_{kj}(t, x, \partial_t, \partial_x)\big)_{k,j=1}^N$; $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_N)$ і $f := \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_N)$ — невідома та задана вектор-функції; $\Pi_H := \big\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, t \in H,\, x \in \mathbb{R}^n\big\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; T — задане додатне число.

Припустимо, що існують такі числа s_k і t_j із $\mathbb{Z}$, що $\max\limits_{k\in\{1,\ldots,N\}} s_k = 0$, степінь відносно λ многочлена $A_{kj}(t,x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m)$, $\sigma\lambda^m := (\sigma_1\lambda^{m_1},\ldots,\sigma_n\lambda^{m_n})$, не перевищує s_k+t_j (якщо $s_k+t_j<0$, то $A_{kj}:=0$) і $\sum_{k=1}^{N}(s_k+t_k)=2br$, де r — степінь $\det A(t,x,p,i\sigma)$ як многочлена від p.

Нехай $A^0 := (A^0_{kj})_{k,j=1}^N$ — головна частина A, тобто $A^0_{kj}(t,x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m) = \lambda^{s_k+t_j}A^0_{kj}(t,x,p,i\sigma)$.

Будемо розглядати систему рівнянь

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]}, \tag{1}$$

для якої виконується умова

A) система (1) є рівномірно параболічною системою Солонникова – Ейдельмана в $\Pi_{[0,T]}$ [10, 11], тобто існує така стала $\delta>0$, що для будь-яких $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$ і $\sigma\in\mathbb{R}^n$ p-корені рівняння $\det A^0(t,x,p,i\sigma)=0$ задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} p(t,x,\sigma)\le -\delta\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^{2b_j}.$$

Частинними випадками таких систем є системи, рівномірно параболічні за Петровським ($m_k=1$, $k\in\{1,\ldots,n\}$, $s_j=0$ і $t_j=2bn_j$, $n_j\in\mathbb{N}$, $j\in\{1,\ldots,N\}$), рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом ($m_k>1$ принаймні для одного $k\in\{1,\ldots,n\}$, $s_j=0$ і $t_j=2bn_j$, $j\in\{1,\ldots,N\}$) і рівномірно параболічні за Солонниковим однорідної структури ($m_k=1$, $k\in\{1,\ldots,n\}$).

Для системи (1), для якої виконується умова **A**, задавати початкові умови так, як для систем Петровського, взагалі кажучи, не можна. Задаватимемо їх так само, як для систем Солонникова з однорідною структурою [7].

Нехай $B(x,\partial_t,\partial_x) := \big(B_{kj}(x,\partial_t,\partial_x)\big)_{k=1,j=1}^{r,\quad N}$ — матричний диференціальний вираз, $\varphi := \operatorname{col}(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ — задана вектор-функція. Припустимо, що існують такі цілі числа p_k, що степінь відносно λ многочлена $B_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m)$ не перевищує p_k+t_j, а якщо $p_k+t_j<0$, то $B_{kl}:=0$. Тут t_j — ті самі, що й в системі (1). Головною частиною виразу B назвемо вираз $B^0 := (B^0_{kj})_{k=1,j=1}^{r,\quad N}$, де $B^0_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m) = \lambda^{p_k+t_j}B^0_{kj}(x,p,i\sigma)$.

Початкові умови для системи (1) задамо у вигляді

$$B(x,\partial_t,\partial_x)u(t,x)|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Для забезпечення коректності задачі з умовою (2) матричний вираз B повинен задовольняти відповідну умову доповняльності, рівномірним варіантом якої є умова

B) існує така стала $\delta_1>0$, що для всіх матриць $H^{(\rho)}$ (їх означення див. у [7, 10]) і точок $x\in\mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$\big|\det H^{(\rho)}(x)\big|\ge\delta_1.$$

Зауважимо (див. [7]), що з умови **B** випливає від'ємність чисел p_k, $k\in\{1,\ldots,r\}$.

Задачу (1), (2), для якої виконуються умови **A** і **B**, називатимемо *параболічною початковою задачею Солонникова – Ейдельмана*.

2. Простори функцій. Наведемо означення потрібних просторів Гельдера обмежених і зростаючих функцій. Як і в [10, 11], функції з цих просторів можуть зростати при $|x| \to \infty$ не швидше, ніж функція

$$\Psi(t,x) := \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} k_j(t,a_j)|x_j|^{q_j}\right\}, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]},$$

в якій $q_j := 2b_j/(2b_j-1)$, $k_j(t,a_j) := c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} - a_j^{2b_j-1}t)^{1-q_j}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, де c_0, $a_1,\ldots,a_n$ — задані числа такі, що $0 < c_0 < c$ (c — стала з оцінок (12) із [10] для фундаментального розв'язку рівняння $\det A^0(\beta, y, \partial_t, \partial_x)u = 0$), $a_j \geq 0$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $T < \min\limits_j (c_0/a_j)^{2b_j-1}$.

Крім вищевведених позначень, будемо використовувати ще такі:
$\overrightarrow{a} := (a_1,\ldots,a_n)$, $\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a}) := \big(k_1(t,a_1),\ldots,k_n(t,a_n)\big)$;
$\Delta_t^\tau f(t,\cdot) := f(t,\cdot) - f(\tau,\cdot)$, $\Delta_{x_j}^{y_j} f(\cdot,x) := f\big(\cdot,x) - f(\cdot,x(y_j)\big)$,
$x(y_j) := (x_1,\ldots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\ldots,x_n)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$;
$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} := \partial_t^{\alpha_0}\partial_x^\alpha$, $\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $\overline{\alpha} := (\alpha_0,\alpha) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$, $\alpha := (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Нехай l і λ — задані числа відповідно з множин $\mathbb{Z}_+$ і $(0,1)$. Будемо користуватися такими просторами:

$H_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$ — простір функцій $u\colon \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, які мають неперервні похідні $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u$, $\|\overline{\alpha}\| \leq l$, і скінченну норму

$$\|u\|_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \langle\langle u\rangle\rangle_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} + \sum_{j=0}^{l} \langle u\rangle_{j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

де

$$\langle\langle u\rangle\rangle_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \sum_{j=1}^{n} \langle u\rangle_{(l+\lambda)/m_j,x_j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} + \langle u\rangle_{(l+\lambda)/(2b),t,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

$$\langle u\rangle_{(l+\lambda)/m_j,x_j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \sum_{0 \leq l - \|\overline{\alpha}\| < m_j} \left\langle \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u\right\rangle_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_j,\,x_j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

$$\langle u\rangle_{(l+\lambda)/(2b),t,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \sum_{0 \leq l - \|\overline{\alpha}\| < 2b} \left\langle \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u\right\rangle_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b),t,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

$$\langle u\rangle_{\lambda,x_j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \sup_{\substack{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}\\ y_j\in\mathbb{R},\, x_j\neq y_j}} \Big(\big|\Delta_{x_j}^{y_j} u(t,x)\big| |x_j - y_j|^{-\lambda} \big(\Psi(t,x) + \Psi(t,x(y_j))\big)^{-1}\Big),$$

$$\langle u\rangle_{\lambda,t,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \sup_{\substack{\{t,\beta\}\subset[0,T],\, t\neq\beta\\ x\in\mathbb{R}^n}} \Big(\big|\Delta_t^\beta u(t,x)\big|\, |t-\beta|^{-\lambda} \big(\Psi(t,x) + \Psi(\beta,x)\big)^{-1}\Big),$$

$$\langle u\rangle_{j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \sum_{\|\overline{\alpha}\|=j} \sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} \Big(\big|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u(t,x)\big| \big(\Psi(t,x)\big)^{-1}\Big);$$

$C_{l+\lambda}^{\overrightarrow{a}}$ — простір функцій $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких існують неперервні похідні $\partial_x^\alpha v$, $\|\alpha\| \leq l$, і є скінченною норма

$$|v|_{l+\lambda}^{\overrightarrow{a}} := [v]_{l+\lambda}^{\overrightarrow{a}} + \sum_{j=0}^{l} \langle v \rangle_j^{\overrightarrow{a}},$$

де

$$[v]_{l+\lambda}^{\overrightarrow{a}} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{0 \le l - \|\alpha\| < m_j} \langle \partial_x^\alpha v \rangle_{(l-\|\alpha\|+\lambda)/m_j,\, x_j}^{\overrightarrow{a}},$$

$$\langle v \rangle_{\lambda, x_j}^{\overrightarrow{a}} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ y_j \in \mathbb{R},\, x_j \ne y_j}} \Big(\big|\Delta_{x_j}^{y_j} v(x)\big| |x_j - y_j|^{-\lambda} \big(\Psi(0,x) + \Psi(0, x(y_j))\big)^{-1} \Big),$$

$$\langle v \rangle_j^{\overrightarrow{a}} := \sum_{\|\alpha\| = j} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big(\big|\partial_x^\alpha v(x)\big| (\Psi(0,x))^{-1} \Big);$$

$H_{l+\lambda,[0,T]} := H_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{0})}$, $C_{l+\lambda} := C_{l+\lambda}^{\overrightarrow{0}}$, де $\overrightarrow{0} := (0,\ldots,0)$;

$\overset{\circ}{H}{}_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$ — підпростір простору $H_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$, елементи якого разом з усіма своїми похідними дорівнюють нулеві при $t = 0$;

$\prod_{j=1}^{N} H_{r_j+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$, $\prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}_{r_j+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$ і $\prod_{j=1}^{r} C_{r_j+\lambda}^{\overrightarrow{a}}$ — декартові добутки відповідних просторів з індексами $r_j \in \mathbb{Z}_+$.

Зауважимо, що всі вищезначені простори є банаховими. Вони, взагалі кажучи, є вужчими за відповідні простори, які означено в [10]. Для цих просторів мають місце всі наведені в [10] результати, на які далі будемо посилатись без жодних застережень.

3. Основні результати. Сформулюємо основні результати цієї статті, що стосуються параболічної початкової задачі Солонникова – Ейдельмана (1), (2). Крім умов $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ припускатимемо виконання умови

C) коефіцієнти диференціальних виразів A_{kj} і B_{sj} належать відповідно до просторів $H_{l-s_k+\lambda,[0,T]}$ і $C_{l-p_s+\lambda}$, $\{k,j\} \subset \{1,\ldots,N\}$, $s \in \{1,\ldots,r\}$.

Теорема 1. *Нехай l і λ — задані числа із множин $\mathbb{Z}_+$ і $(0,1)$. Якщо виконуються умови* **A**, **B** *та* **C**, *то для будь-яких $f \in \prod_{j=1}^{N} H_{l-s_j+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$ і $\varphi \in \in \prod_{s=1}^{r} C_{l-p_s+\lambda}^{\overrightarrow{a}}$ існує єдиний розв'язок $u \in \prod_{j=1}^{N} H_{l+t_j+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$ задачі* (1), (2), *для якого справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|_{l+t_j+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \le C \left(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{l-s_j+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} + \sum_{s=1}^{r} |\varphi_s|_{l-p_s+\lambda}^{\overrightarrow{a}} \right), \tag{3}$$

в якій стала C залежить тільки від відповідних норм коефіцієнтів задачі, сталих δ і δ_1 з умов **A** *і* **B** *та чисел n, N, b_j, t_k, s_k, p_s, l, λ і T.*

З теореми 1 випливає, що умова параболічності системи (1) є достатньою, щоб справджувалась оцінка (3) для будь-якого розв'язку $u \in \prod_{j=1}^{N} H_{l+t_j+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$ задачі (1), (2). Виявляється, що ця умова є і необхідною, так що правильною є така теорема.

Теорема 2. *Нехай система* (1) *має структуру параболічної системи Солонникова – Ейдельмана з параметрами b_j, t_k, s_k, p_s і r, число початкових умов* (2) *дорівнює* r *і диференціальний вираз* $B(x, \partial_t, \partial_x)$ *задовольняє умову* **B**, *коефіцієнти диференціальних виразів* A *і* B *задовольняють умову* **C** *з деякими числами* $l \in \mathbb{Z}_+$ *і* $\lambda \in (0,1)$. *Для того щоб система* (1) *задовольняла умову* **A**, *необхідно і достатньо, щоб існувала така стала* $C > 0$, *що для всіх вектор-функцій* $u \in \prod_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ *справджується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]} \leq$$

$$\leq C\left(\sum_{k,j=1}^{N} \|A_{kj}u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_k+\lambda,[0,T]} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{N} |B_{kj}u_j|_{t=0}|^{\overrightarrow{a}}_{l-p_k+\lambda}\right). \tag{4}$$

Зауважимо, що для модельної параболічної початкової задачі Солонникова – Ейдельмана теорему 1 доведено в [10], а теорему 2 — в [11].

Доведення теореми 1 у загальному випадку проводиться за схемою доведення в [7] відповідної теореми для крайових задач для параболічних за Солонниковим систем. Центральним пунктом доведення є вивчення такої задачі з нульовими початковими даними в шарі $\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}$, $0 \leq t_0 < t_0 + \tau \leq T$:

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)w(t,x) = g(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[t_0,t_0+\tau]}, \quad w \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}, \tag{5}$$

де $g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$. Для цієї задачі є правильною наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **A**, **B** *і* **C**. *Тоді існує таке число* τ_0, *що для будь-якого числа* $\tau \leq \tau_0$ *задача* (5) *однозначно розв'язна і для її розв'язку справджується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|w_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]} \leq C\sum_{j=1}^{N} \|g_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}, \tag{6}$$

в якій стала C *залишається обмеженою при* $\tau \to 0$.

За допомогою цієї теореми та теореми 1 із [10] про зведення задачі (1), (2) до задачі з нульовими початковими даними легко доводиться теорема 1.

Доведення теореми 3 ґрунтується на побудові та детальному дослідженні властивостей регуляризатора задачі (5). Цьому присвячено наступні пункти.

4. Деякі допоміжні твердження. Нехай ρ — довільне мале додатне число. Побудуємо у просторі $\mathbb{R}^n$ дві системи розбиттів $\{\omega^{(j)}, j \in \mathbb{N}\}^{(\rho)}$ і $\{\Omega^{(j)}, j \in \mathbb{N}\}^{(\rho)}$. Візьмемо

$$\omega^{(j)} := \left\{x := (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |x_s - \xi_s^{(j)}| \leq \rho^{m_s}/2,\ s \in \{1,\ldots,n\}\right\},$$

$$\Omega^{(j)} := \left\{x := (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |x_s - \xi_s^{(j)}| \leq \rho^{m_s},\ s \in \{1,\ldots,n\}\right\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

точка $\xi^{(j)} := (\xi_1^{(j)},\ldots,\xi_n^{(j)}) \in \mathbb{R}^n$ є спільним центром n-вимірних паралелепіпедів $\omega^{(j)}$ і $\Omega^{(j)}$, ребра яких паралельні координатним осям. Системи множин $\omega^{(j)}$ і $\Omega^{(j)}$ повинні мати такі властивості:

1°) $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\omega^{(j)}=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\Omega^{(j)}=\mathbb{R}^n$;

2°) кожна множина $\Omega^{(j)}$ може мати спільні точки не більше ніж з $K-1$ множинами з $\{\Omega^{(j)},\ j\in\mathbb{N}\}^{(\rho)}$ при будь-якому $\rho>0$ (тобто кратність покриття $\mathbb{R}^n$ множинами $\Omega^{(j)}$ не перевищує K); число K від ρ не залежить;

3°) для будь-якої точки $x\in\mathbb{R}^n$ існує таке j_0, що $x\in\omega^{(j_0)}$ і

$$|x_s-x_s^{(j_0s)}|>(a\rho)^{m_s},\quad s\in\{1,\ldots,n\},$$

де $x^{(jk)}$ — проекція точки x на k-ту грань паралелепіпеда $\omega^{(j)}$, a — деяка фіксована додатна стала.

***Зауваження* 1.** З означення множин $\omega^{(j)}$ та властивості 3° випливає, що якщо для точок x та y із $\mathbb{R}^n$ справджуються нерівності

$$|x_s-y_s|<(a\rho)^{m_s},\quad s\in\{1,\ldots,n\},$$

то існує таке j_0, що $\{x,y\}\subset\omega^{(j_0)}$.

Нехай $\zeta^{(j)}(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $j\in\mathbb{N}$, — нескінченно диференційовні функції, які мають такі властивості:

$$0\le\zeta^{(j)}\le1,\quad \zeta^{(j)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\omega^{(j)},\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega^{(j)},\end{cases}\qquad \left|\partial_x^\alpha\zeta^{(j)}\right|\le C\rho^{-\|\alpha\|}.$$

Тоді, враховуючи властивості 1° – 3°, маємо

$$1\le\sum_{j\in\mathbb{N}}(\zeta^{(j)}(x))^2\le K,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Покладемо $\eta^{(j)}(x):=\zeta^{(j)}(x)\Big/\sum_{s\in\mathbb{N}}(\zeta^{(s)}(x))^2$, $x\in\mathbb{R}^n$, $j\in\mathbb{N}$, тоді $\eta^{(j)}=0$ в $\mathbb{R}^n\setminus\Omega^{(j)}$, $\sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}(x)\zeta^{(j)}(x)=1$ і $\left|\partial_x^\alpha\eta^{(j)}(x)\right|\le C\rho^{-\|\alpha\|}$ для будь-якої точки $x\in\mathbb{R}^n$.

Нехай $\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}:=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}\,\middle|\,t\in[0,\tau],\ x\in\Omega^{(j)}\right\}$, $j\in\mathbb{N}$, τ — мале додатне число; $\left\langle\left\langle u;\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\right\rangle\right\rangle_{l+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$, $\left\langle u;\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\right\rangle_{(l+\lambda)/m_s,x_s}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$, $\left\langle u;\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\right\rangle_{(l+\lambda)/(2b),t}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ і $\left\langle u;\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\right\rangle_{r}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ — напівнорми, означення яких одержуються, якщо у відповідних означеннях напівнорм $\langle\langle u\rangle\rangle_{l+\lambda,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$, $\langle u\rangle_{(l+\lambda)/m_s,x_s,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$, $\langle u\rangle_{(l+\lambda)/(2b),t,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ і $\langle u\rangle_{r,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ з п. 2 замість області $\Pi_{[0,\tau]}$ взяти $\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}$. Очевидно, що для будь-якої функції $u\in\overset{\circ}{H}{}_{l+\lambda,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ напівнорма $\left\langle\left\langle u;\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\right\rangle\right\rangle_{l+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ обмежена однією і тією ж сталою для будь-якого $j\in\mathbb{N}$, тому скінченною є напівнорма

$$\{u\}_{l+\lambda,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}:=\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\langle\left\langle u;\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\right\rangle\right\rangle_{l+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}.$$

Лема 1. *Для будь-якої функції $u\in\overset{\circ}{H}{}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ справджується нерівність*

$$\langle u\rangle_{j,[t_0,t_0+\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}\le C\tau^{(l-j+\lambda)/(2b)}\langle u\rangle_{(l+\lambda)/(2b),t,[t_0,t_0+\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})},$$

де $j\in\mathbb{Z}_+$, $j\le l$, C — стала, що не залежить від τ.

Доведення. Оскільки $u \in \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$, то $\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u(0,x) = 0$, $\|\overline{\alpha}\| \le l$. Тому: якщо $l - 2b < j \le l$, то

$$\langle u \rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{j,[t_0,t_0+\tau]} =$$

$$= \sum_{\|\overline{\alpha}\|=j} \sup_{(t,x)\in\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}} \left(\frac{|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u(t,x) - \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u(0,x)| t^{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)}}{|t|^{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)}(\Psi(t,x)+\Psi(0,x))} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(\Psi(t,x)+\Psi(0,x))}{\Psi(t,x)} \right) \le$$

$$\le C\tau^{(l-j+\lambda)/(2b)} \sum_{0 \le l-\|\overline{\alpha}\| < 2b} \left\langle \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u \right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b),t,[t_0,t_0+\tau]} \frac{2\Psi(t,x)}{\Psi(t,x)} =$$

$$= C\tau^{(l-j+\lambda)/(2b)} \langle u \rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t,[t_0,t_0+\tau]};$$

якщо $j \le l - 2b$, то, використавши формулу Лагранжа j_0 разів, одержимо

$$\left|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u(t,x)\right| \le |\widetilde{t}|^{j_0} \left|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} \partial^{j_0}_{\widetilde{t}} u(\widetilde{t},x)\right|,$$

де $\widetilde{t} \in [t_0, t_0+\tau]$, $\|\overline{\alpha}\| + 2bj_0 > l - 2b$, далі так само, як і у попередньому випадку, будемо мати

$$\langle u \rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{j,[t_0,t_0+\tau]} \le \sum_{\|\overline{\alpha}\|=j} \sup_{(\widetilde{t},x)\in\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}} \frac{\widetilde{t}^{j_0} |\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} \partial^{j_0}_{\widetilde{t}} u(\widetilde{t},x)|}{\Psi(\widetilde{t},x)} =$$

$$= \sum_{\|\overline{\alpha}\|=j} \sup_{(\widetilde{t},x)\in\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}} \left(\frac{|\Delta^0_{\widetilde{t}} \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} \partial^{j_0}_{\widetilde{t}} u(\widetilde{t},x)| \ \widetilde{t}^{j_0+(l-(2bj_0+\|\overline{\alpha}\|)+\lambda)/(2b)}}{\widetilde{t}^{(l-(2bj_0+\|\overline{\alpha}\|)+\lambda)/(2b)}(\Psi(\widetilde{t},x)+\Psi(0,x))} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(\Psi(\widetilde{t},x)+\Psi(0,x))}{\Psi(\widetilde{t},x)} \right) \le$$

$$\le C\tau^{(l-j+\lambda)/(2b)} \langle u \rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t,[t_0,t_0+\tau]}.$$

Лема 2. *Нехай $\tau = \chi\rho^{2b}$, де $\chi < 1$, $\chi\rho^{2b} \le T$. Тоді у просторі $\overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$, $0 \le t_0 < t_0+\tau \le T$, напівнорми $\langle\langle u \rangle\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$ і $\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$ еквівалентні, тобто*

$$\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]} \le \langle\langle u \rangle\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]} \le C\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]},$$

де стала C не залежить від χ і ρ.

Доведення. Оскільки $\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]} := \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\langle\left\langle u; \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]} \right\rangle\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda}$, то нерівність

$$\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]} \le \langle\langle u \rangle\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$$

є очевидною, бо

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\left(\sup_{\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}}|u|\right)\leq\sup_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}}|u|.$$

Доведемо нерівність

$$\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}\leq C\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}.$$

Для цього покажемо, що

$$\langle u\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/m_s,x_s,[t_0,t_0+\tau]}\leq C\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]},\quad s\in\{1,\ldots,n\},$$

і

$$\langle u\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t,[t_0,t_0+\tau]}\leq C\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}.$$

Нехай $0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<m_s$, розглянемо функцію

$$\left|\Delta^{y_s}_{x_s}\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}u(t,x)\right||x_s-y_s|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_s}\big(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_s))\big)^{-1},\quad s\in\{1,\ldots,n\}.$$

Виберемо x', y'_s, t' так, щоб

$$\left|\Delta^{y'_s}_{x'_s}\partial^{\overline{\alpha}}_{t',x'}u(t',x')\right||x'_s-y'_s|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_s}\big(\Psi(t',x')+\Psi(t',x'(y'_s))\big)^{-1}\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\sup_{\substack{(t,x)\in\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}\\ y_s\in\mathbb{R},\,x_s\neq y_s}}\left|\Delta^{y_s}_{x_s}\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}u(t,x)\right||x_s-y_s|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_s}\big(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_s))\big)^{-1}.$$

Тоді якщо $|x'_s-y'_s|\geq(a\rho)^{m_s}$, то

$$\left|\Delta^{y'_s}_{x'_s}\partial^{\overline{\alpha}}_{t',x'}u(t',x')\right||x'_s-y'_s|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_s}\big(\Psi(t',x')+\Psi(t',x(y_s)')\big)^{-1}\leq$$

$$\leq(a\rho)^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)}\left(\left|\partial^{\overline{\alpha}}_{t',x'}u(t',x')\right|+\left|\partial^{\overline{\alpha}}_{t',x'(y'_s)}u(t',x'(y'_s))\right|\right)\times$$

$$\times\big(\Psi(t',x')+\Psi(t',x'(y'_s))\big)^{-1}\leq$$

$$\leq 2(a\rho)^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)}\sup_{(t,x)\in\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}}\left(\left|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}u(t,x)\right|(\Psi(t,x))^{-1}\right)=$$

$$=2(a\rho)^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left(\sup_{(t,x)\in\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}}\left(\left|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}u(t,x)\right|(\Psi(t,x))^{-1}\right)\right),$$

а на підставі леми 1

$$\sup_{(t,x)\in\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}}\left(\left|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}u(t,x)\right|\big(\Psi(t,x)\big)^{-1}\right)\leq$$

$$\leq C\tau^{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)}\langle u\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t,[t_0,t_0+\tau]}=$$

$$=C(\chi\rho^{2b})^{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)}\langle u\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t,[t_0,t_0+\tau]},$$

тобто

$$\langle u\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/m_s,x_s,[t_0,t_0+\tau]}\leq C\sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<m_s}(\chi^{1/(2b)}a^{-1})^{l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda}\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]};$$

якщо $|x'_s-y'_s|<(a\rho)^{m_s}$, то, враховуючи зауваження 1, бачимо, що точки x', $x'(y'_s)$ належать до деякої множини $\Omega^{(j_0)}$, тому

$$\langle u\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/m_s,x_s,[t_0,t_0+\tau]}\leq 2\Big\langle u;\Pi^{(j_0)}_{[t_0,t_0+\tau]}\Big\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/m_s,x_s}\leq$$

$$\leq 2\sup_{j\in\mathbb{N}}\Big\langle u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\Big\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/m_s,x_s}\leq 2\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}.$$

Нерівність

$$\langle u\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t,[t_0,t_0+\tau]}\leq 2\sup_{j\in\mathbb{N}}\Big\langle u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\Big\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t}\leq 2\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$$

є очевидною.

Як наслідок, з леми 1 випливає, що для функцій $u\in\overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$ напівнорма $\langle\!\langle u\rangle\!\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$ еквівалентна нормі $\|u\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$, а згідно з лемою 2 вона еквівалентна напівнормі $\{u\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$. Отже, у просторі $\overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$ напівнорми $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$ і $\{\cdot\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$ є нормами, які еквівалентні нормі $\|\cdot\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$ простору $H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$.

Лема 3. *Нехай $\xi^{(j)}(x)$, $x\in\Omega^{(j)}$, — нескінченно диференційовна функція, яка задовольняє нерівності $\left|\partial^{\alpha}_x\xi^{(j)}(x)\right|\leq C\rho^{-\|\alpha\|}$, $x\in\Omega^{(j)}$. Тоді якщо $\tau=\chi\rho^{2b}$, то для будь-якої функції $u\in\overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}$ є правильною оцінка*

$$\Big\langle\!\Big\langle\xi^{(j)}u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\Big\rangle\!\Big\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda}\leq C\Big\langle\!\Big\langle u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\Big\rangle\!\Big\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda}.$$

Доведення. Розглянемо напівнорму

$$\Big\langle\!\Big\langle\xi^{(j)}u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\Big\rangle\!\Big\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda}=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\Big\langle\xi^{(j)}u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\Big\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/m_s,x_s}+\Big\langle\xi^{(j)}u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\Big\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t}.$$

Оцінимо s-й доданок суми у правій частині, використавши формулу Лагранжа:

$$\Big\langle\xi^{(j)}u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\Big\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/m_s,x_s}=$$

$$=\sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<m_s}\ \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_s))\}\subset\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\\ x_s\neq y_s}}\Big(\left|\Delta^{y_s}_{x_s}(\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}(\xi^{(j)}u))\right|\times$$

$$\times|x_s-y_s|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_s}(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_s)))^{-1}\Big)\leq$$

$$\leq C \sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<m_s} \sum_{r=0}^{\|\overline{\alpha}\|} \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_s))\}\subset \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\\ x_s\neq y_s}} \left(\left| \Delta^{y_s}_{x_s} \sum_{\|\overline{\beta}\|=r} \partial^{\beta}_{x}\xi^{(j)} \partial^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}_{t,x} u \right| \times \right.$$

$$\left. \times |x_s-y_s|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_s} \big(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_s))\big)^{-1} \right) \leq$$

$$\leq C \sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<m_s} \sum_{r=0}^{\|\overline{\alpha}\|} \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_s))\}\subset \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\\ x_s\neq y_s}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\|\overline{\beta}\|=r} \Big(|\partial^{\beta}_{x}\xi^{(j)}| |\Delta^{y_s}_{x_s} \partial^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}_{t,x} u| + \right.$$

$$\left. + |\Delta^{y_s}_{x_s}\partial^{\beta}_{x}\xi^{(j)}| \big|\partial^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}_{t,x} u\big| \Big) |x_s-y_s|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_s} \big(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_s))\big)^{-1} \right) \leq$$

$$\leq C \sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<m_s} \sum_{r=0}^{\|\overline{\alpha}\|-l+m_s-1} \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_s))\}\subset \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\\ x_s\neq y_s}} \sum_{\|\overline{\beta}\|=r} \Big(\big|\partial^{\beta}_{x}\xi^{(j)}\big| \, \big|\Delta^{y_s}_{x_s}\partial^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}_{t,x} u\big| \times$$

$$\times |x_s-y_s|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+r+\lambda)/m_s} \big(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_s))\big)^{-1} |x_s-y_s|^{r/m_s} \Big) +$$

$$+ C \sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<m_s} \sum_{r=\|\overline{\alpha}\|-l+m_s}^{\|\overline{\alpha}\|} \sum_{\|\overline{\beta}\|=r} \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_s))\}\subset \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\\ x_s\neq y_s}} \times$$

$$\times \Big(\big|\partial^{\beta}_{x}\xi^{(j)}\big| \, \big|\partial_{\tilde{x}_s}\partial^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}_{t,\tilde{x}} u\big| |x_s-y_s|^{1-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_s} \big(\Psi(t,\tilde{x})\big)^{-1} \Big) +$$

$$+ C \sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<m_s} \sum_{r=0}^{\|\overline{\alpha}\|} \sum_{\|\overline{\beta}\|=r} \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_s))\}\subset \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\\ x_s\neq y_s}} \times$$

$$\times \Big(\big|\partial_{\tilde{x}_s}\partial^{\beta}_{\tilde{x}}\xi^{(j)}\big| |\partial^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}_{t,x} u| |x_s-y_s|^{1-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_s} \big(\Psi(t,x)\big)^{-1} \Big) \leq$$

$$\leq C \sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<m_s} \left(\sum_{r=0}^{\|\overline{\alpha}\|-l+m_s-1} \sum_{\|\overline{\beta}\|=r} \rho^{-\|\beta\|+r} \left\langle \partial^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}_{t,x} u; \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]} \right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\|\overline{\beta}\|+\lambda)/m_s, x_s} + \right.$$

$$+ \sum_{r=\|\overline{\alpha}\|-l+m_s}^{\|\overline{\alpha}\|} \sum_{\|\overline{\beta}\|=r} \rho^{-\|\beta\|+\|\overline{\alpha}\|-l+m_s-\lambda} \left\langle u; \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]} \right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\|\overline{\alpha}\|-\|\overline{\beta}\|+m_s} +$$

$$+\sum_{r=0}^{\|\overline{\alpha}\|}\sum_{\|\overline{\beta}\|=r}\rho^{-\|\beta\|+\|\overline{\alpha}\|-l+m_s-\lambda}\left\langle u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\|\overline{\alpha}\|-\|\overline{\beta}\|}\Bigg),$$

де враховано, що $|x_s-y_s|\leq 2\rho^{m_s}$, $\{x,y\}\subset\Omega^{(j)}$.

Згідно з лемою 1

$$\left\langle u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\|\overline{\alpha}\|-r+m_s}\leq C\tau^{(l-\|\overline{\alpha}\|+r-m_s+\lambda)/(2b)}\left\langle\!\left\langle u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda},$$

$$\|\overline{\alpha}\|-l+m_s\leq r\leq\|\overline{\alpha}\|;$$

$$\left\langle u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\|\overline{\alpha}\|-r}\leq C\tau^{(l-\|\overline{\alpha}\|+r+\lambda)/(2b)}\left\langle\!\left\langle u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda},\quad 0\leq r\leq\|\overline{\alpha}\|.$$

З огляду на те, що $\tau=\chi\rho^{2b}$, одержимо

$$\left\langle\xi^{(j)}u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/m_s,x_s}\leq C\left\langle\!\left\langle u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda}.$$

За допомогою аналогічних міркувань будемо мати

$$\left\langle\xi^{(j)}u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t}=$$

$$=\sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<2b}\ \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x)\}\subset\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\\ t\neq t'}}\times$$

$$\times\Big(\Big|\Delta_t^{t'}\big(\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}(\xi^{(j)}u)\big)\Big|\,|t-t'|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)}\big(\Psi(t,x)+\Psi(t',x)\big)^{-1}\Big)\leq$$

$$\leq C\sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<2b}\ \sum_{r=0}^{\|\overline{\alpha}\|-l+2b-1}\ \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x)\}\subset\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\\ t\neq t'}}\left(\left|\sum_{\|\overline{\beta}\|=r}\partial_x^{\beta}\xi^{(j)}\big(\Delta_t^{t'}\partial^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}_{t,x}u\big)\right|\times\right.$$

$$\left.\times\,|t-t'|^{-(l-\|\overline{\alpha}\|+r+\lambda)/(2b)}|t-t'|^{r/(2b)}\big(\Psi(t,x)+\Psi(t',x)\big)^{-1}\right)+$$

$$+\,C\sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<2b}\ \sum_{r=\|\overline{\alpha}\|-l+2b}^{\|\overline{\alpha}\|}\ \sup_{\substack{\{(t,x),(t',x)\}\subset\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\\ t\neq t'}}\left(\left|\sum_{\|\overline{\beta}\|=r}\partial_x^{\beta}\xi^{(j)}\partial_{\widetilde{t}}\partial^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}_{\widetilde{t},x}u\right|\times\right.$$

$$\left.\times\,|t-t'|^{1-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)}\big(\Psi(\widetilde{t},x)\big)^{-1}\right)\leq$$

$$\leq C\sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<2b}\left(\sum_{r=0}^{\|\overline{\alpha}\|-l+2b-1}\rho^{-r}\tau^{r/(2b)}\times\right.$$

$$\times\sum_{\|\overline{\beta}\|=r}\left\langle\partial^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}_{t,x}u;\Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]}\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l-\|\overline{\alpha}\|+r+\lambda)/(2b),t}+$$

$$+ \sum_{r=\|\overline{\alpha}\|-l+2b}^{\|\overline{\alpha}\|} \rho^{-r} \sum_{\|\overline{\beta}\|=r} \left\langle u; \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]} \right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\|\overline{\alpha}\|-\|\overline{\beta}\|+2b} \tau^{1-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)} \Bigg) \leq$$

$$\leq C \left\langle\!\left\langle u; \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]} \right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda} +$$

$$+ C \sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<2b} \sum_{r=\|\overline{\alpha}\|-l+2b}^{\|\overline{\alpha}\|} \rho^{-r} \tau^{1-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)} \left\langle u; \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]} \right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\|\overline{\alpha}\|-r+2b} \leq$$

$$\leq C \left\langle\!\left\langle u; \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]} \right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda} + C \sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<2b} \sum_{r=\|\overline{\alpha}\|-l+2b}^{\|\overline{\alpha}\|} \rho^{-r} \times$$

$$\times \tau^{1-(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)+(l-\|\overline{\alpha}\|+r-2b+\lambda)/(2b)} \left\langle\!\left\langle u; \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]} \right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda} =$$

$$= C \left(1 + \sum_{0\leq l-\|\overline{\alpha}\|<2b} \sum_{r=\|\overline{\alpha}\|-l+2b}^{\|\overline{\alpha}\|} \rho^{-r} (\chi\rho^{2b})^{r/(2b)} \right) \left\langle\!\left\langle u; \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]} \right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda} \leq$$

$$\leq C \left\langle\!\left\langle u; \Pi^{(j)}_{[t_0,t_0+\tau]} \right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda}.$$

5. Регуляризатор параболічної початкової задачі Солонникова – Ейдельмана та його властивості. Нехай τ — мале додатне число. Розглянемо спочатку задачу (5) у випадку $t_0 = 0$, тобто задачу

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)w = g, \qquad w \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,\tau]}, \qquad g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[0,\tau]}. \tag{7}$$

Побудуємо спеціальний оператор, який вектор-функції $g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[0,\tau]}$ буде ставити у відповідність вектор-функцію $v \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,\tau]}$, яка відрізняється від розв'язку задачі (7) на малу, за деякою нормою при досить малому τ, складову.

Зафіксуємо деяке мале число $\rho > 0$, і нехай товщина шару $\Pi_{[0,\tau]}$ пов'язана з ρ рівністю

$$\tau = \chi\rho^{2b}, \tag{8}$$

де $\chi < 1$, $\chi\rho^{2b} \leq T$, T — задане додатне число.

Розглянемо системи розбиттів $\{\omega^{(j)}, j \in \mathbb{N}\}^{(\rho)}$ і $\{\Omega^{(j)}, j \in \mathbb{N}\}^{(\rho)}$ та функції $\zeta^{(j)}$, які означено в п. 4.

Для кожного $j \in \mathbb{N}$ побудуємо вектор-функцію $v^{(j)}$ як розв'язок модельної задачі з нульовими початковими даними такого вигляду:

$$A^0(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x)v^{(j)}(t,x) = g^{(j)}(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,\tau]},$$

$$v^{(j)} \in \prod_{m=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_m+\lambda,[0,\tau]}, \qquad g^{(j)} \in \prod_{m=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_m+\lambda,[0,\tau]}, \tag{9}$$

де $\xi^{(j)}$ — спільний центр множин $\omega^{(j)}$ і $\Omega^{(j)}$; $A^0(0, \xi^{(j)}, \partial_t, \partial_x)$ — головна частина $A(t, x, \partial_t, \partial_x)$ із „замороженими” коефіцієнтами у точці $(0, \xi^{(j)})$; $g^{(j)} :=$ $:= \operatorname{col}(g_1^{(j)}, \dots, g_N^{(j)})$,

$$g_k^{(j)}(t,x) := \begin{cases} \zeta^{(j)}(x) g_k(t,x), & x \in \Omega^{(j)}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^{(j)}, \end{cases} \qquad k \in \{1, \dots, N\}. \tag{10}$$

Оскільки коефіцієнти системи є сталими, а вектор-функції $g^{(j)} \in$ $\in \prod_{m=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}_{l-s_m+\lambda, [0,\tau]}$, то за теоремою 2 з [10] задача (9) має єдиний розв'язок.

Лінійний оператор, який кожній вектор-функції $g \in G_{l+\lambda} := \prod_{m=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}_{l-s_m+\lambda, [0,\tau]}$ ставить у відповідність вектор-функцію $v \in V_{l+\lambda} := \prod_{m=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}_{l+t_m+\lambda, [0,\tau]}$, компоненти якої визначаються формулою

$$v_m(t,x) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \eta^{(j)}(x) v_m^{(j)}(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,\tau]}, \ m \in \{1, \dots, N\}, \tag{11}$$

де $\eta^{(j)}$ — ті самі функції, що й в п. 4; $v_m^{(j)}$ — компоненти розв'язку $v^{(j)}$ модельної задачі (9), позначатимемо через $\mathcal{R}$ і називатимемо *регуляризатором задачі* (7) або *регуляризатором параболічної початкової задачі Солонникова – Ейдельмана* (1), (2).

З огляду на наслідок із лем 1 і 2, норми у просторах $G_{l+\lambda}$ і $V_{l+\lambda}$ означимо відповідно за допомогою таких рівностей:

$$\|g\|_{G_{l+\lambda}} := \sum_{m=1}^{N} \{g_m\}^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}_{l-s_m+\lambda, [0,\tau]}, \qquad \|v\|_{V_{l+\lambda}} := \sum_{m=1}^{N} \{v_m\}^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}_{l+t_m+\lambda, [0,\tau]}.$$

Опишемо властивості оператора $\mathcal{R}$.

Лема 4. *Оператор $\mathcal{R}\colon G_{l+\lambda} \to V_{l+\lambda}$ є обмеженим, тобто для будь-якого $g \in G_{l+\lambda}$ справджується нерівність*

$$\|\mathcal{R} g\|_{V_{l+\lambda}} \le C \|g\|_{G_{l+\lambda}},$$

де C — стала, яка не залежить від χ і ρ.

Доведення. Розглянемо норму вектор-функції $\mathcal{R} g$

$$\|\mathcal{R} g\|_{V_{l+\lambda}} = \sum_{m=1}^{N} \left\{ (\mathcal{R} g)_m \right\}^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}_{l+t_m+\lambda, [0,\tau]} = \sum_{m=1}^{N} \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\langle\!\!\left\langle \sum_{j \in \mathbb{N}} \eta^{(j)} v_m^{(j)}; \Pi_{[0,\tau]}^{(r)} \right\rangle\!\!\right\rangle^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}_{l+t_m+\lambda}.$$

На підставі властивості 2° множин $\Omega^{(j)}$ маємо

$$\left\langle\!\!\left\langle \sum_{j \in \mathbb{N}} \eta^{(j)} v_m^{(j)}; \Pi_{[0,\tau]}^{(r)} \right\rangle\!\!\right\rangle^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}_{l+t_m+\lambda} \le \sum_{s=1}^{K} \left\langle\!\!\left\langle \eta^{(j_s)} v_m^{(j_s)}; \Pi_{[0,\tau]}^{(j_s)} \right\rangle\!\!\right\rangle^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}_{l+t_m+\lambda} \le$$

$$\le K \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\langle\!\!\left\langle \eta^{(j)} v_m^{(j)}; \Pi_{[0,\tau]}^{(j)} \right\rangle\!\!\right\rangle^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}_{l+t_m+\lambda},$$

тоді

$$\|\mathcal{R}g\|_{V_{l+\lambda}} \leq K \sum_{m=1}^{N} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\langle\!\left\langle \eta^{(j)} v_m^{(j)}; \Pi_{[0,\tau]}^{(j)} \right\rangle\!\right\rangle_{l+t_m+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}, \tag{12}$$

де K — кратність покриття $\mathbb{R}^n$ системою множин $\{\Omega^{(j)}, j \in \mathbb{N}\}^{(\rho)}$. Оскільки $v_m^{(j)} \in$ $\in \overset{\circ}{H}{}_{l+t_m+\lambda,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}$ і $|\partial_x^\alpha \eta^{(j)}| \leq C\rho^{-\|\alpha\|}$, то за лемою 3

$$\left\langle\!\left\langle \eta^{(j)} v_m^{(j)}; \Pi_{[0,\tau]}^{(j)} \right\rangle\!\right\rangle_{l+t_m+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \leq C \left\langle\!\left\langle v_m^{(j)}; \Pi_{[0,\tau]}^{(j)} \right\rangle\!\right\rangle_{l+t_m+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}, \quad m \in \{1,\ldots,N\}. \tag{13}$$

Враховуючи те, що функції $v_m^{(j)}$ є компонентами розв'язку задачі (9), на підставі теореми 2 з [10] та наслідку з лем 1 і 2 одержуємо оцінку

$$\sum_{m=1}^{N} \left\langle\!\left\langle v_m^{(j)} \right\rangle\!\right\rangle_{l+t_m+\lambda,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \leq C \sum_{m=1}^{N} \left\langle\!\left\langle g_m^{(j)} \right\rangle\!\right\rangle_{l-s_m+\lambda,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}. \tag{14}$$

Сталу C в (14) на підставі умов **A** і **C** можна вибрати однаковою для всіх $j \in \mathbb{N}$.

Використовуючи означення норм, лему 3, рівність (10) і нерівність (14), маємо

$$\sum_{m=1}^{N} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\langle\!\left\langle v_m^{(j)} \right\rangle\!\right\rangle_{l+t_m+\lambda,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \leq C \sum_{m=1}^{N} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\langle\!\left\langle g_m^{(j)}; \Pi_{[0,\tau]}^{(j)} \right\rangle\!\right\rangle_{l-s_m+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \leq$$

$$\leq C \sum_{m=1}^{N} \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\langle\!\left\langle g_m; \Pi_{[0,\tau]}^{(j)} \right\rangle\!\right\rangle_{l-s_m+\lambda}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} = C \sum_{m=1}^{N} \{g_m\}_{l-s_m+\lambda,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})}, \tag{15}$$

а звідси, враховуючи (12) і (13), одержуємо

$$\|\mathcal{R}g\|_{V_{l+\lambda}} \leq C\|g\|_{G_{l+\lambda}}.$$

Лему доведено.

Запишемо (7) у вигляді

$$\mathcal{A}w = g, \tag{16}$$

де $w \in V_{l+\lambda}$, $g \in G_{l+\lambda}$, $\mathcal{A}$ — оператор, який кожному елементу $w \in V_{l+\lambda}$ ставить у відповідність елемент $\mathcal{A}w := A(t,x,\partial_t,\partial_x)w \in G_{l+\lambda}$.

Зауважимо, що $\mathcal{A}$ є обмеженим оператором, оскільки

$$\|\mathcal{A}w\|_{G_{l+\lambda}} = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sum_{m=1}^{N} A_{jm}(t,x,\partial_t,\partial_x) w_m \right\}_{l-s_j+\lambda,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} \leq$$

$$\leq C \sum_{m=1}^{N} \{w_m\}_{l+t_m+\lambda,[0,\tau]}^{\vec{k}(\cdot,\vec{a})} = C\|w\|_{V_{l+\lambda}}.$$

Тут використано те, що коефіцієнти диференціальних виразів $A_{jm}(t,x,\partial_t,\partial_x)$ системи (7) задовольняють умову **C**.

Лема 5. *Для будь-якої вектор-функції $g \in G_{l+\lambda}$ є правильною рівність*

$$\mathcal{A}\mathcal{R}g = g + \mathcal{T}g, \tag{17}$$

де $\mathcal{T}$ — обмежений оператор у просторі $G_{l+\lambda}$, норма якого мала, якщо малі χ і ρ у (8).

Доведення. Враховуючи (11) і властивості функцій $\eta^{(j)}$ і $\zeta^{(j)}$, маємо

$$\mathcal{A}\mathcal{R}g = A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)\mathcal{R}g + A^1(t,x,\partial_t,\partial_x)\mathcal{R}g =$$

$$= A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}v^{(j)}\right) + A^1(t,x,\partial_t,\partial_x)\mathcal{R}g =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}A^0(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x)v^{(j)} - \sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}A^0(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x)v^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)v^{(j)} - \sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)v^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{N}}A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)(\eta^{(j)}v^{(j)}) + A^1(t,x,\partial_t,\partial_x)\mathcal{R}g =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}\zeta^{(j)}g + \sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}\Big(A^0(t,x,\partial_t,\partial_x) - A^0(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x)\Big)v^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{N}}\Big(A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)(\eta^{(j)}v^{(j)}) - \eta^{(j)}A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)v^{(j)}\Big) + A^1(t,x,\partial_t,\partial_x)\mathcal{R}g =$$

$$= g + \sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}\Big(A^0(t,x,\partial_t,\partial_x) - A^0(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x)\Big)v^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{N}}\Big(A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)(\eta^{(j)}v^{(j)}) - \eta^{(j)}A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)v^{(j)}\Big) + A^1(t,x,\partial_t,\partial_x)\mathcal{R}g =$$

$$= g + \mathcal{T}g,$$

де $A^1(t,x,\partial_t,\partial_x) := A(t,x,\partial_t,\partial_x) - A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)$, а

$$\mathcal{T}g = \sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}\Big(A^0(t,x,\partial_t,\partial_x) - A^0(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x)\Big)v^{(j)} +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{N}}\Big(A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)(\eta^{(j)}v^{(j)}) - \eta^{(j)}A^0(t,x,\partial_t,\partial_x)v^{(j)}\Big) + A^1(t,x,\partial_t,\partial_x)\mathcal{R}g. \tag{18}$$

Оцінимо норму у просторі $G_{l+\lambda}$ першого доданка правої частини (18). Як і при доведенні леми 4, маємо

$$\sum_{r=1}^{N}\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}\sum_{m=1}^{N}\Big(A^0_{rm}(t,x,\partial_t,\partial_x) - A^0_{rm}(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x)\Big)v^{(j)}_m\right\}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_r+\lambda,[0,\tau]} =$$

$$= \sum_{r=1}^{N}\sup_{s\in\mathbb{N}}\left\langle\!\!\left\langle\sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}\sum_{m=1}^{N}\Big(A^0_{rm}(t,x,\partial_t,\partial_x) - A^0_{rm}(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x)\Big)v^{(j)}_m;\Pi^{(s)}_{[0,\tau]}\right\rangle\!\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_r+\lambda} \le$$

$$\leq C\sum_{r,m=1}^{N}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\langle\!\left\langle \eta^{(j)}\Big(A^0_{rm}(t,x,\partial_t,\partial_x)-A^0_{rm}(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x)\Big)v_m^{(j)};\Pi^{(j)}_{[0,\tau]}\right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_r+\lambda}\leq$$

$$\leq C\sum_{r,m=1}^{N}\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\langle\!\left\langle (A^0_{rm}(t,x,\partial_t,\partial_x)-A^0_{rm}(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x))v_m^{(j)};\Pi^{(j)}_{[0,\tau]}\right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_r+\lambda},\quad(19)$$

звідки видно, що досить оцінити норму

$$\left\langle\!\left\langle \Delta^{0,\xi^{(j)}}_{t,x}a\,\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}v_m^{(j)};\Pi^{(j)}_{[0,\tau]}\right\rangle\!\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_r+\lambda}=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{0\leq l-s_r-\|\overline{\beta}\|<m_s}\left\langle \partial^{\overline{\beta}}_{t,x}\big(\Delta^{0,\xi^{(j)}}_{t,x}a\,\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}v_m^{(j)}\big);\Pi^{(j)}_{[0,\tau]}\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/m_s,x_s}+$$

$$+\sum_{0\leq l-s_r-\|\overline{\beta}\|<2b}\left\langle \partial^{\overline{\beta}}_{t,x}\big(\Delta^{0,\xi^{(j)}}_{t,x}a\,\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}v_m^{(j)}\big);\Pi^{(j)}_{[0,\tau]}\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/(2b),t},\quad \|\overline{\alpha}\|=s_r+t_m,$$

де $\Delta^{0,\xi^{(j)}}_{t,x}a:=a(t,x)-a(0,\xi^{(j)})$, a — будь-який із коефіцієнтів диференціального виразу $A^0_{rm}(t,x,\partial_t,\partial_x)$, які за припущенням належать простору $H_{l-s_r+\lambda,[0,\tau]}$. На підставі цього припущення одержуємо такі оцінки:

$$\big|\partial^{\overline{\gamma}}_{t,x}\Delta^{0,\xi^{(j)}}_{t,x}a\big|\leq C\begin{cases}\rho^{\kappa}, & \|\overline{\gamma}\|=0,\\ 1, & \|\overline{\gamma}\|>0,\end{cases}$$

$$\big|\Delta^{y_s}_{x_s}\partial^{\overline{\gamma}}_{t,x}\Delta^{0,\xi^{(j)}}_{t,x}a\big|\leq C\begin{cases}|x_s-y_s|^{(l-s_r-\|\overline{\gamma}\|+\lambda)/m_s}, & 0\leq l-s_r-\|\overline{\gamma}\|<m_s,\\ |x_s-y_s|, & l-s_r-\|\overline{\gamma}\|\geq m_s,\end{cases}$$

$$\big|\Delta^{t'}_{t}\partial^{\overline{\gamma}}_{t,x}\Delta^{0,\xi^{(j)}}_{t,x}a\big|\leq C\begin{cases}|t-t'|^{(l-s_r-\|\overline{\gamma}\|+\lambda)/(2b)}, & 0\leq l-s_r-\|\overline{\gamma}\|<2b,\\ |t-t'|, & l-s_r-\|\overline{\gamma}\|\geq 2b,\end{cases}$$

$$\big\{(t,x),(t,x(y_s)),(t',x)\big\}\subset\Pi^{(j)}_{[0,\tau]},\quad \|\overline{\gamma}\|\leq l-s_r.$$

Тут $\kappa=l-s_r+\lambda$ при $l-s_r<\hat{m}:=\min\limits_{s\in\{1,\dots,n\}}m_s$ і $\kappa=\hat{m}$ при $l-s_r\geq\hat{m}$.

Використовуючи ці оцінки та лему 1, для мультиіндексів $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ і $\overline{\gamma}$ таких, що $\|\overline{\alpha}\|=s_r+t_m$, $0\leq l-s_r-\|\overline{\beta}\|<m_s$, $\overline{\gamma}\leq\overline{\beta}$, маємо

$$\left\langle \partial^{\overline{\gamma}}_{t,x}\Delta^{0,\xi^{(j)}}_{t,x}a\,\partial^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}-\overline{\gamma}}_{t,x}v_m^{(j)};\ \Pi^{(j)}_{[0,\tau]}\right\rangle^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/m_s,x_s}\leq$$

$$\leq\sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_s))\}\subset\Pi^{(j)}_{[0,\tau]}\\ x_s\neq y_s}}\Big(\big|\Delta^{y_s}_{x_s}\partial^{\overline{\gamma}}_{t,x}\Delta^{0,\xi^{(j)}}_{t,x}a\big|\,\big|\partial^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}-\overline{\gamma}}_{t,x}v_m^{(j)}\big|\,|x_s-y_s|^{-(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/m_s}\times$$

$$\times\big(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_s))\big)^{-1}\Big)+\sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_s))\}\subset\Pi^{(j)}_{[0,\tau]}\\ x_s\neq y_s}}\Big(\big|\partial^{\overline{\gamma}}_{t,x}\Delta^{0,\xi^{(j)}}_{t,x}a\big|\,\big|\Delta^{y_s}_{x_s}\partial^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}-\overline{\gamma}}_{t,x}v_m^{(j)}\big|\times$$

$$\times|x_s-y_s|^{-(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/m_s}\Big(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_s))\Big)^{-1}\Big)\le$$

$$\le C\Big\langle v_m^{(j)};\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l+t_m+\lambda)/m_s,x_s}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\begin{Bmatrix}\rho^{l-s_r+\lambda}, & 0\le l-s_r-\|\overline{\gamma}\|<m_s\\ \rho^{\|\overline{\gamma}\|+m_s}, & l-s_r-\|\overline{\gamma}\|\ge m_s\end{Bmatrix}+$$

$$+C\Big\langle v_m^{(j)};\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l+t_m+\lambda)/m_s,x_s}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\begin{Bmatrix}\rho^{\kappa}, & \|\overline{\gamma}\|=0\\ \rho^{\|\overline{\gamma}\|}, & 0<\|\overline{\gamma}\|<\|\overline{\beta}\|-l+s_r+m_s\\ \rho^{\|\overline{\gamma}\|+\lambda}, & \|\overline{\beta}\|-l+s_r+m_s\le\|\overline{\gamma}\|\le\|\overline{\beta}\|\end{Bmatrix}\le$$

$$\le C\rho^{\lambda}\Big\langle v_m^{(j)};\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l+t_m+\lambda)/m_s,x_s}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},\quad r\in\{1,\ldots,N\},\tag{20}$$

де враховано, що ρ — мале число і $\hat{m}\ge 1$.

Аналогічно одержуємо

$$\Big\langle\partial_{t,x}^{\overline{\gamma}}\Delta_{t,x}^{0,\xi^{(j)}}a\,\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}+\overline{\beta}-\overline{\gamma}}v_m^{(j)};\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/(2b),t}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\le$$

$$\le C\rho^{\lambda}\Big\langle v_m^{(j)};\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l+t_m+\lambda)/(2b),t}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},\quad r\in\{1,\ldots,N\}.\tag{21}$$

За допомогою оцінок (15) та означення норм з нерівностей (19) – (21) випливає, що

$$\sum_{r=1}^{N}\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}\sum_{m=1}^{N}\Big(A_{rm}^{0}(t,x,\partial_t,\partial_x)-A_{rm}^{0}(0,\xi^{(j)},\partial_t,\partial_x)\Big)v_m^{(j)}\right\}_{l-s_r+\lambda,[0,\tau]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\le$$

$$\le C\rho^{\lambda}\sum_{m=1}^{N}\sup_{j\in\mathbb{N}}\Big\langle\Big\langle v_m^{(j)};\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle\Big\rangle_{l+t_m+\lambda}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\le C\rho^{\lambda}\sum_{m=1}^{N}\{g_m\}_{l-s_m+\lambda,[0,\tau]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}=C\rho^{\lambda}\|g\|_{G_{l+\lambda}}.\tag{22}$$

Розглянемо норму у просторі $G_{l+\lambda}$ третього доданка правої частини (18). Як і для першого доданка, маємо

$$\sum_{r=1}^{N}\left\{\sum_{m=1}^{N}A_{rm}^{1}(t,x,\partial_t,\partial_x)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}v_m^{(j)}\right)\right\}_{l-s_r+\lambda,[0,\tau]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}=$$

$$=\sum_{r=1}^{N}\sup_{s\in\mathbb{N}}\left\langle\left\langle\sum_{m=1}^{N}A_{rm}^{1}(t,x,\partial_t,\partial_x)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}v_m^{(j)}\right);\ \Pi_{[0,\tau]}^{(s)}\right\rangle\right\rangle_{l-s_r+\lambda}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\le$$

$$\le C\sum_{r,m=1}^{N}\sup_{j\in\mathbb{N}}\Big\langle\Big\langle A_{rm}^{1}(t,x,\partial_t,\partial_x)\big(\eta^{(j)}v_m^{(j)}\big);\ \Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle\Big\rangle_{l-s_r+\lambda}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},\tag{23}$$

звідки видно, що досить оцінити норму

$$\Big\langle\!\Big\langle a\,\partial_{t,x}^{\overline{\delta}}\eta^{(j)}\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}-\overline{\delta}}v_m^{(j)};\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle\!\Big\rangle_{l-s_r+\lambda}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{0\le l-s_r-\|\overline{\beta}\|<m_s}\Big\langle\partial_{t,x}^{\overline{\beta}}(a\,\partial_{t,x}^{\overline{\delta}}\eta^{(j)}\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}-\overline{\delta}}v_m^{(j)});\ \Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/m_s,x_s}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}+$$

$$+\sum_{0\le l-s_r-\|\overline{\beta}\|<2b}\Big\langle\partial_{t,x}^{\overline{\beta}}(a\,\partial_{t,x}^{\overline{\delta}}\eta^{(j)}\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}-\overline{\delta}}v_m^{(j)});\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/(2b),t}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},\qquad(24)$$

$0\le\|\overline{\alpha}\|<s_r+t_m$, $\overline{0}\le\overline{\delta}\le\overline{\alpha}$, a — будь-який із коефіцієнтів диференціального виразу $A_{rm}^1(t,x,\partial_t,\partial_x)$, які за припущенням належать простору $H_{l-s_r+\lambda,[0,\tau]}$.

Аналогічно до (20) для $\|\overline{\alpha}\|=s_r+t_m-p$, $p\ge\hat{m}$, $\overline{\gamma}\le\overline{\beta}$, $\overline{\delta}\le\overline{\alpha}$, одержуємо

$$\Big\langle\partial_{t,x}^{\overline{\gamma}}\big(a\,\partial_{t,x}^{\overline{\delta}}\eta^{(j)}\big)\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}-\overline{\delta}+\overline{\beta}-\overline{\gamma}}v_m^{(j)};\ \Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/m_s,x_s}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\le$$

$$\le\sup_{\substack{\{(t,x),(t,x(y_s))\}\subset\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\\ x_s\ne y_s}}\Big(\Big(\big|\partial_{t,x}^{\overline{\gamma}}(a\,\partial_{t,x}^{\overline{\delta}}\eta^{(j)})\big|\,\big|\Delta_{x_s}^{y_s}\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}-\overline{\delta}+\overline{\beta}-\overline{\gamma}}v_m^{(j)}\big|+\big|\Delta_{x_s}^{y_s}\partial_{t,x}^{\overline{\gamma}}(a\,\partial_{t,x}^{\overline{\delta}}\eta^{(j)})\big|\times$$

$$\times\big|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}-\overline{\delta}+\overline{\beta}-\overline{\gamma}}v_m^{(j)}\big|\Big)|x_s-y_s|^{-(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/m_s}\big(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_s))\big)^{-1}\Big)\le$$

$$\le C\rho^p(1+\chi^{(p+\lambda)/(2b)}\rho^{\kappa})\Big\langle v_m^{(j)};\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l+t_m+\lambda)/m_s,x_s}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},\qquad 0\le l-s_r-\|\overline{\beta}\|<m_s;$$

$$\Big\langle\partial_{t,x}^{\overline{\gamma}}(a\,\partial_{t,x}^{\overline{\delta}}\eta^{(j)})\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}-\overline{\delta}+\overline{\beta}-\overline{\gamma}}v_m^{(j)};\ \Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/(2b),t}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\le$$

$$\le\sup_{\substack{\{(t,x),(t',x)\}\subset\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\\ t\ne t'}}\Big(\Big(\big|\partial_{t,x}^{\overline{\gamma}}(a\,\partial_{t,x}^{\overline{\delta}}\eta^{(j)})\big|\,\big|\Delta_t^{t'}\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}-\overline{\delta}+\overline{\beta}-\overline{\gamma}}v_m^{(j)}\big|+\big|\Delta_t^{t'}\partial_{t,x}^{\overline{\gamma}}(a\,\partial_{t,x}^{\overline{\delta}}\eta^{(j)})\big|\times$$

$$\times\big|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}-\overline{\delta}+\overline{\beta}-\overline{\gamma}}v_m^{(j)}\big|\Big)|t-t'|^{-(l-s_r-\|\overline{\beta}\|+\lambda)/(2b)}\big(\Psi(t,x)+\Psi(t',x)\big)^{-1}\Big)\le$$

$$\le C\rho^p(1+\chi^{(p+\lambda)/(2b)}\rho^{\kappa})\Big\langle v_m^{(j)};\Pi_{[0,\tau]}^{(j)}\Big\rangle_{(l+t_m+\lambda)/(2b),t}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},\qquad 0\le l-s_r-\|\overline{\beta}\|<2b,$$

де $\kappa\le 0$.

З цих нерівностей, а також нерівностей (23) і (24) випливає оцінка

$$\sum_{r=1}^{N}\left\{\sum_{m=1}^{N}A_{rm}^1(t,x,\partial_t,\partial_x)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\eta^{(j)}v_m^{(j)}\right)\right\}_{l-s_r+\lambda,[0,\tau]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\le$$

$$\le C\rho^p(1+\chi^{(p+\lambda)/(2b)}\rho^{\kappa})\|g\|_{G_{l+\lambda}}.\qquad(25)$$

Аналогічну оцінку таким же способом одержуємо і для другого доданка правої частини (18). З цієї оцінки та оцінок (22) і (25) випливає, що оператор $\mathcal{T}$ є обмеженим і при досить малих χ і ρ його норма менше за 1.

Лема 6. *Для будь-якої вектор-функції $v \in V_{l+\lambda}$ справджується рівність*

$$\mathcal{R}\mathcal{A}v = v + \mathcal{W}v,$$

де $\mathcal{W}$ — обмежений оператор у просторі $V_{l+\lambda}$, норма якого мала, якщо малі χ і ρ у (8).

Доведення. Позначимо через $\mathcal{R}^{(j)}$ оператор, який правій частині $g^{(j)}$ задачі (9) ставить у відповідність розв'язок цієї задачі $v^{(j)}$. Зауважимо, що з єдиності розв'язку задачі (9) випливає, що для будь-якої вектор-функції $v \in V_{l+\lambda}$

$$\mathcal{R}^{(j)} A^0(0, \xi^{(j)}, \partial_t, \partial_x)\zeta^{(j)} v = \zeta^{(j)} v. \tag{26}$$

За допомогою (11) і (26) для будь-якої вектор-функції $v \in V_{l+\lambda}$ маємо

$$\mathcal{R}\mathcal{A}v = \mathcal{R}A^0(t, x, \partial_t, \partial_x)v + \mathcal{R}A^1(t, x, \partial_t, \partial_x)v =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta^{(j)}\mathcal{R}^{(j)} A^0(0, \xi^{(j)}, \partial_t, \partial_x)\zeta^{(j)} v - \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta^{(j)}\mathcal{R}^{(j)} A^0(0, \xi^{(j)}, \partial_t, \partial_x)\zeta^{(j)} v +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta^{(j)}\mathcal{R}^{(j)} A^0(t, x, \partial_t, \partial_x)\zeta^{(j)} v - \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta^{(j)}\mathcal{R}^{(j)} A^0(t, x, \partial_t, \partial_x)\zeta^{(j)} v +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta^{(j)}\mathcal{R}^{(j)} (\zeta^{(j)} A^0(t, x, \partial_t, \partial_x)v) + \mathcal{R}A^1(t, x, \partial_t, \partial_x)v =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta^{(j)}\zeta^{(j)} v + \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta^{(j)}\mathcal{R}^{(j)} \Big(A^0(t, x, \partial_t, \partial_x) - A^0(0, \xi^{(j)}, \partial_t, \partial_x)\Big)\zeta^{(j)} v +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta^{(j)}\mathcal{R}^{(j)} \Big(\zeta^{(j)} A^0(t, x, \partial_t, \partial_x)v - A^0(t, x, \partial_t, \partial_x)\zeta^{(j)} v\Big) +$$

$$+ \mathcal{R}A^1(t, x, \partial_t, \partial_x)v = v + \mathcal{W}v,$$

де

$$\mathcal{W}v := \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta^{(j)}\mathcal{R}^{(j)} \Big(A^0(t, x, \partial_t, \partial_x) - A^0(0, \xi^{(j)}, \partial_t, \partial_x)\Big)\zeta^{(j)} v +$$

$$+ \sum_{j\in\mathbb{N}} \eta^{(j)}\mathcal{R}^{(j)} \Big(\zeta^{(j)} A^0(t, x, \partial_t, \partial_x)v - A^0(t, x, \partial_t, \partial_x)\zeta^{(j)} v\Big) + \mathcal{R}A^1(t, x, \partial_t, \partial_x)v. \tag{27}$$

Оцінка норми $\|\mathcal{W}v\|_{V_{l+\lambda}}$ доводиться аналогічно до оцінки $\|\mathcal{T}g\|_{G_{l+\lambda}}$ з леми 5.

***Зауваження* 2.** Аналогічно будується і досліджується регуляризатор задачі (5) в області $\Pi_{[t_0, t_0+\tau]}$ з нульовими початковими даними при $t = t_0$, де $0 \le t_0 < t_0 + \tau \le T$. Істотно, що величини χ і ρ можуть бути однаковими для будь-якого t_0. Це випливає з умов **A**, **B** і **C**.

6. Доведення теореми 3. Нехай спочатку $t_0 = 0$. Твердження теореми 3 у цьому випадку рівносильне існуванню обмеженого оператора $\mathcal{A}^{-1}$, оберненого до оператора $\mathcal{A}$ із (16).

Нехай $\mathcal{R}$ — регуляризатор задачі (7). Згідно з лемами 5 і 6 маємо

$$\mathcal{A}\mathcal{R} = I_1 + \mathcal{T}, \qquad \mathcal{R}\mathcal{A} = I_2 + \mathcal{W}, \tag{28}$$

де $\mathcal{T}$ і $\mathcal{W}$ — обмежені оператори, які означено формулами (18) і (27), а I_1, I_2 — тотожні оператори відповідно у просторах $G_{l+\lambda}$, $V_{l+\lambda}$. Зафіксуємо числа χ і ρ , які пов'язані з τ рівністю (8), так, щоб

$$\|\mathcal{T}\| \leq \frac{1}{2}, \qquad \|\mathcal{W}\| \leq \frac{1}{2}.$$

Тоді, як відомо, існують обмежені обернені оператори $(I_1 + \mathcal{T})^{-1}$ і $(I_2 + \mathcal{W})^{-1}$, до того ж

$$\|(I_1 + \mathcal{T})^{-1}\| \leq 2, \qquad \|(I_2 + \mathcal{W})^{-1}\| \leq 2.$$

Звідси і з рівностей (28) випливає, що $\mathcal{R}(I_1 + \mathcal{T})^{-1}$ — правий обернений, а $(I_2 + \mathcal{W})^{-1}\mathcal{R}$ — лівий обернений оператор до $\mathcal{A}$.

На підставі леми 2 з [12, с. 139] існує обернений оператор $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{R}(I_1+\mathcal{T})^{-1} = (I_2 + \mathcal{W})^{-1}\mathcal{R}$, який визначено у просторі $G_{l+\lambda}$ зі значеннями у просторі $V_{l+\lambda}$. Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ є обмеженим, оскільки

$$\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq \|\mathcal{R}\| \, \|(I_1 + \mathcal{T})^{-1}\| \leq 2C,$$

де C — така сама стала, що й в лемі 4.

Отже, задача (7) є однозначно розв'язною для будь-яких $g \in G_{l+\lambda}$, а її розв'язок задовольняє нерівність

$$\|w\|_{V_{l+\lambda}} \leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \, \|g\|_{G_{l+\lambda}} \leq 2C\|g\|_{G_{l+\lambda}},$$

яка згідно з наслідком із лем 1 і 2 рівносильна нерівності (6) при $t_0 = 0$.

Правильність твердження теореми 3 з довільним t_0 доводиться так само, якщо врахувати зауваження 2. При цьому величину τ_0 можна брати не залежною від t_0.

7. Доведення теореми 1. Згідно з теоремою 1 із [10] досить довести існування єдиного розв'язку задачі (7) у випадку $\tau = T$, який задовольняє нерівність (6) при $t_0 = 0$, $\tau = T$.

За теоремою 3 задача (7) має єдиний розв'язок w, для якого виконується оцінка (6) з $t_0 = 0$, $\tau = \tau_0$. Знайдемо значення похідних за змінною t від компонент цього розв'язку до порядку $\hat{l}_j := \big[(l + t_j)/(2b)\big]$ ($[a]$ — ціла частина числа a) при $t = \tau_0/2$ і позначимо їх через ${\varphi'}_j^{(\alpha_0)}(x)$, $\alpha_0 \in \{0, \ldots, \hat{l}_j\}$.

Розглянемо в $\Pi_{[\tau_0/2,T]}$ функції v'_j такі, що

$$\partial_t^{\alpha_0} v'_j \,\big|_{t=\tau_0/2} = {\varphi'}_j^{(\alpha_0)}, \quad \alpha_0 \in \{0, \ldots, \hat{l}_j\}, \tag{29}$$

і справджуються нерівності

$$\sum_{j=1}^{N} \|{v'}_j\|_{l+t_j+\lambda,[\tau_0/2,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \leq C \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha_0=0}^{\hat{l}_j} |{\varphi'}_j^{(\alpha_0)}|_{l+t_j-2br+\lambda}^{\overrightarrow{a}} \leq C \sum_{j=1}^{N} \|w_j\|_{l+t_j+\lambda,[0,\tau]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}. \tag{30}$$

Друга нерівність є очевидною, оскільки $\partial_t^{\alpha_0} w_j \,|_{t=\tau_0/2} = {\varphi'}_j^{(\alpha_0)}$, $\alpha_0 \in \{0, \ldots, \hat{l}_j\}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Функції ${v'}_j$, враховуючи (29), можна побудувати так само, як в лемі 2 із [10]. Тоді існування єдиного розв'язку задачі (5) з $t_0 = \tau_0/2$ і $\tau = 3\tau_0/2$ рівносильне існуванню єдиного розв'язку $w' := w - v'$ задачі

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)w'(t,x) = g'(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[\tau_0/2, 3\tau_0/2]},$$

$$\partial_t^{\alpha_0} {w'}_j(t,x) \mid_{t=\tau_0/2} = 0, \quad \alpha_0 \in \{0,\ldots,\hat{l}_j\}, \quad j \in \{1,\ldots,N\}, \tag{31}$$

де $g' := g - Av'$, до того ж $\partial_t^{\alpha_0} {g'}_j \mid_{t=\tau_0/2} = 0$, $\alpha_0 \in \{0,\ldots,[(l-s_j)/(2b)]\}$, $j \in \in \{1,\ldots,N\}$, для якого правильною є оцінка

$$\sum_{j=1}^N \|{w'}_j\|_{l+t_j+\lambda,[\tau_0/2,3\tau_0/2]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \le C \sum_{j=1}^N \|{g'}_j\|_{l-s_j+\lambda,[\tau_0/2,3\tau_0/2]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}. \tag{32}$$

Існування єдиного розв'язку задачі (31) і виконання оцінок (32) випливає із теореми 3. Отже, задача (7) має єдиний розв'язок в $\Pi_{[0,3\tau_0/2]}$, для якого з урахуванням (30), (32) правильною є оцінка

$$\sum_{j=1}^N \|w_j\|_{l+t_j+\lambda,[0,3\tau_0/2]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \le C \sum_{j=1}^N \|g_j\|_{l-s_j+\lambda,[0,3\tau_0/2]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}.$$

Продовжуючи міркувати так само, ми крок за кроком вичерпаємо весь проміжок $[0,T]$. При цьому кількість кроків є скінченною, а величина кроку дорівнює τ_0.

8. Доведення теореми 2. Досить довести лише необхідність умови А для правильності оцінок (4). Нехай ці оцінки справджуються для будь-якої вектор-функції $u \in \prod_{j=1}^N H_{l+t_j+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$. Доведемо, що система (1) є параболічною системою Солонникова – Ейдельмана в $\Pi_{[0,T]}$. Припустимо протилежне. Тоді існують такі точки $(t^0,x^0) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma^0 := (\sigma_1^0,\ldots,\sigma_n^0) \in \mathbb{R}^n$, а також число $p^0 \in \mathbb{C}$, що $|p^0| + |\sigma^0| \ne 0$, $\operatorname{Re} p^0 \ge 0$ і

$$\det A^0(t^0,x^0,p^0,\sigma^0) = 0. \tag{33}$$

При довільному фіксованому $\nu > 0$ розглянемо матрицю-стовпець висоти N $v_\nu(t,x)$, всі елементи якої дорівнюють $\exp\left\{\nu^{m_0}p^0 t + i\sum_{j=1}^n \nu^{m_j}\sigma_j^0 x_j\right\}$. Нехай ζ — нескінченно диференційовна й фінітна в $\Pi_{[0,T]}$ функція. Візьмемо матрицю-стовпець

$$u_\nu(t,x) := (\widehat{A}^0(t^0,x^0,\partial_t,\partial_x)v_\nu(t,x))\zeta(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]},$$

де $\widehat{A^0} := \det A^0 (A^0)^{-1}$ — матриця, взаємна для A^0. Оскільки елементи $u_{\nu j}$, $j \in \in \{1,\ldots,N\}$, матриці u_ν є фінітними в $\Pi_{[0,T]}$, то оцінка (4) для них має вигляд

$$\sum_{j=1}^N \|u_{\nu j}\|_{l+t_j+\lambda,[0,T]} \le C \sum_{k,j=1}^N \|A_{kj}^0 u_{\nu j}\|_{l-s_k+\lambda,[0,T]}. \tag{34}$$

Але ця нерівність не може виконуватися для досить великих $\nu > 0$. Справді, найшвидше зростаючий при $\nu \to \infty$ член у лівій частині нерівності (34) дорівнює

$$C\nu^{2br-s_0+l+\lambda} \exp\{\nu^{m_0}\tau \operatorname{Re} p^0\}, \quad \tau \in (0,T],$$

де $s_0 := \min\limits_{j\in\{1,\ldots,N\}} s_j$. Але оскільки на підставі (33)

$$A^0(t^0, x^0, \partial_t, \partial_x)(\widehat{A}^0(t^0, x^0, \partial_t, \partial_x)v_\nu) = \nu^{2br} \det A^0(t^0, x^0, p^0, i\sigma^0)v_\nu = 0,$$

то аналогічний член у правій частині зазначеної нерівності дорівнює

$$C\nu^{2br-s_0+l+\lambda-1} \exp\{\nu^{m_0}\tau \operatorname{Re} p^0\}.$$

Отже, нерівність (34) не виконується при великих ν.

1. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1 – 72.
2. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40 – 43.
3. *Солонников В. А.* О краевых задачах для общих параболических систем // Там же. – 1964. – **157**, № 1. – С. 56 – 59.
4. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-Параболические системы // Тр. сем. по функцион. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.
5. *Івасишен С. Д., Кондур О. С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільного порядку // Мат. студ. – 2000. – **14**, № 1. – С. 73 – 84.
6. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.
7. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3 – 163.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
9. *Івасюк Г. П.* Початкова задача для модельних параболічних за Солонниковим систем неоднорідної структури // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2005. – Вип. 269. – С. 49 – 52.
10. *Івасишен С. Д., Івасюк Г. П.* Параболічні за Солонниковим системи квазіоднорідної структури // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1501 – 1510.
11. *Івасишен С. Д., Івасюк Г. П.* Початкові задачі для параболічних систем Солонникова – Ейдельмана // Доп. НАН України. – 2007. – № 9. – С. 7 – 11.
12. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.

Одержано 15.08.08