УДК 517.968.7

А. Ю. Лучка, О. Б. Нестеренко (Ін-т математики НАН України, Київ)

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ І ОБМЕЖЕННЯМИ

We establish conditions for the existence of solutions of boundary-value problems for weakly nonlinear integro-differential equations with parameters and restrictions. We also substantiate the applicability of iterative and projection-iterative methods for the solution of these problems.

Установлены условия существования решений краевых задач для слабонелинейных интегро-дифференциальных уравнений с параметрами и ограничениями, а также обосновано применение к ним итерационных и проекционно-итеративных методов.

1. Постановка задачі. Розглянемо інтегро-диференціальне рівняння

$$(Lx)(t) = f(t) + C(t)\lambda + \varepsilon \int\limits_a^b H(t,s)F\left(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(m-1)}(s)\right) ds \qquad (1)$$

і поставимо задачу знаходження функції $x(t,\varepsilon)$, яка неперервна по ε на відрізку $[0,\varepsilon_0]$ і при кожному фіксованому $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ належить $W_2^m[a,b]$, та параметра $\lambda \in \mathbb{R}^l$, які задовольняють рівняння (1) майже скрізь, крайові умови

$$U(x) = \gamma \qquad (2)$$

та обмеження

$$\int\limits_a^b S(t)x(t)dt = \alpha. \qquad (3)$$

Якщо така пара $(x(t),\lambda)$ існує, то задачу (1) – (3) вважаємо сумісною.

В зображеннях (1) – (3)

$$(Lx)(t) = x^{(m)}(t) + p_1(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + p_m(t)x(t), \qquad (4)$$

$t \in [a,b]$, ε — достатньо малий невід'ємний параметр, $f \in L_2[a,b]$, $\{p_1,\ldots,p_m\} \subset \subset L_2[a,b]$, ядро $H(t,s)$ є сумовним з квадратом за сукупністю змінних, $C(t)$ і $S(t)$ — відповідно $(1\times l)$- і $(l\times 1)$-матриці, елементи яких — лінійно незалежні функції, сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$, U — стала $(m\times 1)$-матриця, елементи якої мають вигляд

$$U_\nu(x) = \sum_{i=1}^m \left(\alpha_{\nu i}x^{(i-1)}(a) + \beta_{\nu i}x^{(i-1)}(b)\right),$$

$\gamma \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$ є заданими.

Вважаємо також, що оператор

$$(Fx)(t) = F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m-1)}(t)), \qquad (5)$$

який визначається функцією $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, відображає простір $W_2^m[a,b]$ у простір $L_2[a,b]$.

При розв'язанні питань дослідження сумісності задачі та розробці методів побудови розв'язків скористаємось методикою, розробленою в [1 – 5].

2. Умови сумісності задачі. Для встановлення умов сумісності використаємо допоміжну задачу

$$(Ax)(t) = C(t)\lambda + y(t), \qquad U(x) = \gamma, \tag{6}$$

$$\int\limits_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{7}$$

де

$$(Ax)(t) = x^{(m)}(t) + c_1(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + c_m(t)x(t), \tag{8}$$

задана функція $y \in L_2[a,b]$ і коефіцієнти $c_1(t),\ldots, c_m(t)$ є неперервними на відрізку $[a,b]$. У статті [2] доведено, що у випадку, коли однорідна задача

$$(Ax)(t) = C(t)\lambda, \quad U(x) = 0, \quad \int\limits_a^b S(t)x(t)dt = 0 \tag{9}$$

має лише тривіальний розв'язок, існують такі вектор $\sigma \in \mathbb{R}^l$, функції $h(t)$, $G(t,s)$ та $(l \times 1)$-матриця $\Gamma(s)$, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі (6), (7) зображується формулами

$$x(t) = h(t) + \int\limits_a^b G(t,s)y(s)ds, \tag{10}$$

$$\lambda = \sigma + \int\limits_a^b \Gamma(s)y(s)ds. \tag{11}$$

За допомогою виразів (10), (6), (8), враховуючи, що оператор

$$(Bx)(t) = (Ax)(t) - (Lx)(t), \tag{12}$$

задачу (1) – (3) зводимо до рівносильного [2] інтегрального рівняння

$$y(t) = g(t) + \int\limits_a^b K(t,s)y(s)ds + \varepsilon \int\limits_a^b H(t,s)F\Bigg(s, h(s) + \int\limits_a^b G(s,\xi)y(\xi)d\xi, \ldots$$

$$\ldots, h^{(m-1)}(s) + \int\limits_a^b \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}G(s,\xi)y(\xi)d\xi\Bigg)ds, \tag{13}$$

де

$$K(t,s) = (BG)(t,s), \qquad g(t) = (Bh)(t). \tag{14}$$

Таким чином, дослідження задачі (1) – (3) звелось до дослідження інтегрального рівняння (13) і правильною є наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо допоміжна задача* (6), (7) *має єдиний розв'язок, то задача* (1) – (3) *сумісна тоді і тільки тоді, коли існує розв'язок рівняння* (13).

Питання існування та єдиності розв'язку рівняння (13) достатньо вивчені. Зокрема, якщо оператор

$$(My)(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)ds + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\Bigg(s, h(s) + \int_a^b G(s,\xi)y(\xi)d\xi, \ldots$$

$$\ldots, h^{(m-1)}(s) + \int_a^b \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} G(s,\xi)y(\xi)d\xi\Bigg) ds \tag{15}$$

є оператором стиску в $L_2[a,b]$, то існує єдиний розв'язок задачі (1) – (3).

Встановимо достатні умови, за яких оператор (15) є оператором стиску у просторі $L_2[a,b]$.

Для цього зазначимо, що за умов, накладених на ядро $H(t,s)$ і коефіцієнти диференціальних операторів (4), (8), можна встановити, з урахуванням формул (14), (12) і структури функції Гріна $G(t,s)$ [2], існування додатних мінімальних констант η, æ, ν_i, $i = \overline{0, m-1}$, таких, що для будь-яких функцій $y \in L_2[a,b]$ виконуються нерівності

$$\int_a^b \left| \int_a^b K(t,s)y(s)ds \right|^2 dt \leq \eta^2 \int_a^b |y(t)|^2 dt, \tag{16}$$

$$\int_a^b \left| \int_a^b H(t,s)y(s)ds \right|^2 dt \leq æ^2 \int_a^b |y(t)|^2 dt, \tag{17}$$

$$\int_a^b \left| \int_a^b \frac{\partial^i}{\partial t^i} G(t,s)y(s)ds \right|^2 dt \leq \nu_i^2 \int_a^b |y(t)|^2 dt, \quad i = \overline{0, m-1}. \tag{18}$$

Нехай, крім того, справджується умова

$$\Big| F(t, u_0, \ldots, u_{m-1}) - F(t, w_0, \ldots, w_{m-1}) \Big| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i |u_i - w_i| \quad \forall \{u_i, w_i\} \subset \mathbb{R}, \tag{19}$$

де $\tau_i \in \mathbb{R}^+$, $i = \overline{0, m-1}$. Тоді, очевидно, оператор (5) задовольняє умову

$$\|Fx - Fv\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i \|x^{(i)} - v^{(i)}\| \quad \forall \{x, v\} \in W_2^m[a,b]. \tag{20}$$

Із нерівностей (16) – (20) очевидним чином випливає нерівність

$$\|My - Mz\| \leq \rho \|y - z\| \quad \forall y, z \in L_2[a,b], \tag{21}$$

в якій

$$\rho = \eta + \varepsilon æ(\tau_0 \nu_0 + \ldots + \tau_{m-1}\nu_{m-1}). \tag{22}$$

Таким чином, якщо в нерівності (21) виконується умова $\rho < 1$, де ρ має вигляд (22), то оператор M, який визначається формулою (15), є оператором стиску у просторі $L_2[a, b]$.

Оскільки точний розв'язок задачі (1)–(3) можна зобразити в явному вигляді у виключних випадках, виникає потреба побудови наближених розв'язків даної задачі. Для цього можна використати існуючі наближені методи, зокрема проекційно-ітеративні.

3. Проекційно-ітеративний метод. Суть вказаного методу полягає в тому, що для побудови наближених розв'язків використовуються ідеї як проекційних, так і ітераційних методів.

Нехай наближення $(x_{k-1}(t), \lambda_{k-1})$ до шуканого розв'язку вже побудовано і функція $y_{k-1}(t)$ також відома.

З певних міркувань вибираємо номер n, задаємо $(m \times n)$-матрицю $\Phi(t)$ та $(n \times m)$-матрицю $\Psi(t)$ із сумовними з квадратом елементами на відрізку $[a, b]$, причому стовпці матриці $\Phi(t)$ і рядки матриці $\Psi(t)$ є лінійно незалежними.

Знаходимо функцію

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + \delta_k(t). \tag{23}$$

Поправка $\delta_k(t)$ — це розв'язок задачі

$$(A\delta_k)(t) = C(t)\beta_k + \Phi(t)\mu_k, \quad U(\delta_k) = 0, \tag{24}$$

в якій невідомі вектори $\beta_k \in \mathbb{R}^l$ та $\mu_k \in \mathbb{R}^n$ визначаємо так, щоб справджувались умови

$$\int_a^b S(t)\delta_k(t)dt = 0, \tag{25}$$

$$\int_a^b \Psi(t)(y_k(t) - y_{k-1}(t) - \Phi(t)\mu_k)dt = 0, \tag{26}$$

де

$$y_k(t) = f(t) + (Bz_k)(t) + \varepsilon \int_a^b H(t, s)F\left(s, z_k(s), z_k'(s), \ldots, z_k^{(m-1)}(s)\right) ds. \tag{27}$$

Наступне наближення визначаємо із задачі

$$(Ax_k)(t) = C(t)\lambda_k + y_k(t), \qquad U(x_k) = \gamma, \qquad \int_a^b S(t)x_k(t)dt = \alpha. \tag{28}$$

Початкове наближення $(x_0(t), \lambda_0)$ знаходимо із задачі (28) при $k = 0$ і заданій функції $y_0(t)$.

Припускаємо, що однорідна задача (9) має лише тривіальний розв'язок. Згідно з лемою 1 [2] задача (24), (25) та задача (28) мають єдині розв'язки

$$\delta_k(t) = \int_a^b G(t, s)\Phi(s)\mu_k ds, \tag{29}$$

$$x_k(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s) y_k(s) ds, \tag{30}$$

$$\lambda_k = \sigma + \int_a^b \Gamma(s) y_k(s) ds. \tag{31}$$

Нехай

$$Y(t) = \int_a^b G(t,s)\Phi(s) ds, \tag{32}$$

тоді на основі формул (23), (32), (29), (27) та (26) отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення параметра μ_k:

$$\Lambda \mu_k = d_k + \varepsilon \Delta_k, \tag{33}$$

в якій

$$\Lambda = \int_a^b \Psi(t)\left(\Phi(t) - Z(t)\right) dt, \quad Z(t) = (BY)(t), \tag{34}$$

$$d_k = \int_a^b \Psi(t)\left(v_k(t) - y_{k-1}(t)\right) dt, \tag{35}$$

$$v_k(t) = f(t) + (Bx_{k-1})(t) + \varepsilon \int_a^b H(t,s) F\left(s, x_{k-1}(s), \ldots, x_{k-1}^{(m-1)}(s)\right) ds, \tag{36}$$

$$\Delta_k = \int_a^b \Psi(t) w_k(t) dt, \tag{37}$$

$$w_k(t) = \int_a^b H(t,s)\left[F\left(s, x_{k-1}(s) + Y(s)\mu_k, \ldots, \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}(x_{k-1}(s) + Y(s)\mu_k)\right) - \right.$$

$$\left. - F\left(s, x_{k-1}(s), \ldots, x_{k-1}^{(m-1)}(s)\right)\right] ds. \tag{38}$$

Зауважимо, що у випадку, коли матриця Λ є невиродженою, при достатньо малому ε система (33) має єдиний розв'язок.

Знайшовши розв'язок системи (33), точний чи наближений, і розв'язавши задачу (28), отримаємо шукане наближення.

Для запобігання певним обчислювальним труднощам при розв'язуванні системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (33) пропонуємо застосувати до задачі (1) – (3) модифікований варіант проекційно-ітеративного методу.

4. Модифікований проекційно-ітеративний метод. Суть цього методу полягає в тому, що в описаному в п. 3 алгоритмі (23) – (28) функцію $y_k(t)$ пропонуємо шукати у вигляді

$$y_k(t) = f(t) + (Bz_k)(t) + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\left(s, x_{k-1}(s), \ldots, x_{k-1}^{(m-1)}(s)\right) ds. \tag{39}$$

У цьому випадку, врахувавши формули (37) – (39), для визначення параметра $\mu_k \in \mathbb{R}^n$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Lambda \mu_k = d_k, \tag{40}$$

в якій матриця Λ та вектор d_k визначаються за формулами (34) – (36).

Якщо матриця Λ системи (40) є невиродженою, то, очевидно, наближені розв'язки будуються однозначно.

Алгоритм (23) – (26), (39), (28) щодо задачі (1) – (3) можна звести до алгоритму модифікованого проекційно-ітеративного методу щодо інтегрального рівняння (13).

Справді, як було показано в п. 2, задача (1) – (3) рівносильна інтегральному рівнянню (13). Із формул (23), (29), (30) випливає правильність співвідношення

$$z_k(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)(y_{k-1}(s) + \Phi(s)\mu_k) ds. \tag{41}$$

Підставивши вираз (41) в формулу (39), врахувавши (30) і позначення (14), отримаємо

$$\begin{aligned} y_k(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)(y_{k-1}(s) + \Phi(s)\mu_k) ds + \\ + \varepsilon \int_a^b H(t,s) F(s, h(s) + \int_a^b G(s,\xi) y_{k-1}(\xi) d\xi, \ldots \\ \ldots, h^{(m-1)}(s) + \int_a^b \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} G(s,\xi) y_{k-1}(\xi) d\xi) ds. \end{aligned} \tag{42}$$

Рівності (42), (26) — суть модифікованого проекційно-ітеративного методу щодо інтегрального рівняння (13).

Таким чином, встановлення умов збіжності модифікованого проекційно-ітеративного методу (23) – (26), (39), (28) звелось до встановлення умов збіжності методу (42), (26) щодо інтегрального рівняння (13), умови збіжності якого наведено, зокрема, у статті [4].

5. Ітераційний метод. Частинним випадком проекційно-ітеративного методу є ітераційний метод, згідно з яким наближені розв'язки задачі (1) – (3) визначаються із задачі (28), в якій

$$y_k(t) = f(t) + (Bx_{k-1})(t) + \varepsilon \int_a^b H(t,s)F\left(s, x_{k-1}(s), \ldots, x_{k-1}^{(m-1)}(s)\right) ds. \tag{43}$$

Як відомо [2], цей метод зводиться до методу послідовних наближень для інтегрального рівняння (13), умови збіжності і оцінки похибки якого є відомими. Використавши їх, можна встановити таке твердження.

Теорема 2. *Якщо допоміжна задача* (6), (7) *має єдиний розв'язок і в нерівності* (21) *виконується умова* $\rho < 1$, *де* ρ *має вигляд* (22), *то існує єдиний розв'язок* $(x^* \in W_2^m[a,b],\ \lambda^* \in \mathbb{R}^l)$ *задачі* (1)–(3) *і послідовність* $\{x_k(t),\ \lambda_k,\ k \geq 0\}$, *побудована за ітераційним методом* (28), (43), *збігається до цього розв'язку та справджуються оцінки*

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i}(x^* - x_k) \right\| \leq \nu_i \rho^k \|y^* - y_0\|, \tag{44}$$

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i}(x^* - x_k) \right\| \leq \frac{\nu_i \rho}{1-\rho} \|y_k - y_{k-1}\|, \tag{45}$$

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i}(x^* - x_k) \right\| \leq \frac{\nu_i \rho^k}{1-\rho} \|y_1 - y_0\|, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{46}$$

$$\|\lambda^* - \lambda_k\|_0 \leq \chi \|y^* - y_k\|, \tag{47}$$

де $\|\cdot\|_0$ — *евклідова норма вектора,* $y^* \in L_2[a,b]$ — *розв'язок рівняння* (13) *і*

$$\chi^2 = \int_a^b \Gamma^*(s)\Gamma(s)ds,$$

а $\Gamma^*(s)$ — *матриця, спряжена до* $\Gamma(s)$.

Справді, існування розв'язку $y^*(t)$ рівняння (13) і збіжність послідовності (43) до нього за умови $\rho < 1$ гарантує теорема Банаха. Оцінки (44)–(47) безпосередньо випливають із відомих оцінок методу послідовних наближень для рівняння (13) і співвідношень

$$x^*(t) - x_k(t) = \int_a^b G(t,s)(y^*(s) - y_k(s))ds,$$

$$\lambda^* - \lambda_k = \int_a^b \Gamma(s)(y^*(s) - y_k(s))ds,$$

які, в свою чергу, випливають із формул (10), (11), (30) та (31), а також нерівностей (18).

Аналогічна теорема є правильною і для модифікованого проекційно-ітеративного методу щодо задачі (1)–(3). Відмінність полягає лише в тому, що при її доведенні використовуються умови збіжності та оцінки похибки модифікованого проекційно-ітеративного методу для інтегрального рівняння (13), наведені в [4].

Зауважимо, що ітераційний метод до задачі (1)–(3) доцільно застосовувати у випадку, коли величина ρ є досить малою. У випадку, коли ε — достатньо малий параметр, а величина η є досить великою, зокрема, коли $\eta > 1$, доцільно наближені розв'язки будувати згідно з модифікованим проекційно-ітеративним методом, оскільки в цьому випадку вдалим вибором матриць $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ та їх розмірності можна зробити величину η як завгодно малою. Так, як це встановлено в [4], правильним є твердження: якщо елементами матриці $\Phi(t)$ є перші n функцій повної в

$L_2[a,b]$ системи $\{\varphi_i(t),\, 1 \leq i \leq \infty\}$ і $\Psi(t) = \Phi^*(t)$, де $\Phi^*(t)$ — матриця, спряжена до матриці $\Phi(t)$, а одиниця не є власним значенням інтегрального оператора, ядро якого визначається формулою (14), то $\eta \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, при достатньо малому ε існує такий номер n, що модифікований проекційно-ітеративний метод є збіжним.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
2. *Нестеренко О. Б.* Ітераційний метод розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 336 – 347.
3. *Лучка А. Ю., Нестеренко О. Б.* Побудова розв'язків інтегро-диференціальних рівнянь з обмеженнями і керуванням проекційно-ітеративним методом // Там же. – 2009. – **12**, № 1. – С. 83 – 91.
4. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и систем. анализ. – 1996. – № 3. – С. 82 – 96.
5. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.

Одержано 16.02.09,
після доопрацювання — 30.03.09