УДК 517.98

А. А. Юсенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

П'ЯТІРКИ ОРТОПРОЕКТОРІВ ПОВ'ЯЗАНІ ЛІНІЙНИМ СПІВВІДНОШЕННЯМ

We consider the equation $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n = I$, where $P_1, \ldots, P_n$ are orthoprojectors in a Hilbert space. We prove that the set of real parameters $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, for which there exists a solution of this equation in the orthoprojectors, contains an open set from $\mathbb{R}^5$.

Рассматривается уравнение $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n = I$ над ортопроекторами $P_1, \ldots, P_n$ в гильбертовом пространстве. Показано, что множество действительных параметров $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, для которых существует решение этого уравнения в ортопроекторах, содержит открытое множество из $\mathbb{R}^5$.

Вступ. Ряд недавніх робіт (див., наприклад, [1 – 5]) присвячено дослідженню наборів проекторів $P_1, \ldots, P_n$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, що задовольняють лінійне співвідношення

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = \gamma I, \qquad \alpha_i, \gamma \in \mathbb{R}_+,$$

зокрема опису можливих значень параметрів α_i та γ, при яких існують такі набори проекторів, а також, по можливості, опису всіх незвідних наборів проекторів для допустимих значень параметрів. Так, у роботі [2] отримано опис множини Σ_n можливих значень γ у випадку, коли $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$. Відповідна множина є дискретною при $n < 5$ та містить неперервний проміжок при $n \geq 5$. У роботах [4, 5] досліджувалася задача опису множини параметрів для довільного набору $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, γ, при яких існує четвірка ортопроекторів $P_1, \ldots, P_4$, для яких виконується $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_4 P_4 = \gamma I$. Виявилося, що ці множини не містять відкритих підмножин.

У статті [3] вивчалися властивості множини $I_n \subset \mathbb{R}_+^n$ наборів $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n)$, при яких існує набір проекторів, що пов'язані лінійним співвідношенням

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = I.$$

Для дослідження множини I_n було введено R-*умову* та показано, що структура множини точок $\vec{\alpha} \in I_n$, для яких виконується R-*умова*, залежить від того, якою є множина I_k, $k < n$. Також було показано, що структура множини точок $\vec{\alpha} \in I_n$, для яких R-*умова* не виконується, визначається структурою підмножини точок, для яких $A \in \left(1 + \frac{1}{n-3}, 2\right]$, де $A = \sum \alpha_i$. При цьому питання про структуру множини точок $\vec{\alpha} \in I_n$, $\sum \alpha_i \in \left(1 + \frac{1}{n-3}, 2\right]$, залишилось відкритим.

Метою даної статті є дослідження множини I_5 на проміжку $A \in \left(\frac{3}{2}, 2\right]$. Отримано достатні умови на набір $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$, за яких $\vec{\alpha} \in I_5$ для всіх $A \in \left(\frac{3}{2}, 2\right]$, а також показано, що така множина містить непорожню відкриту підмножину.

1. Постановка задачі та деякі відомі результати. У роботах [1 – 5] було розглянуто такі задачі:

Для фіксованого набору $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ описати множину $\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$ тих $\gamma \in \mathbb{R}_+$, для яких існує набір проекторів $P_1, \ldots, P_n$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, що задовольняють співвідношення

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = \gamma I. \tag{1}$$

Для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ описати множину I_n векторів $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$, для яких існує набір проекторів $P_1, \ldots, P_n$ у деякому просторі $\mathcal{H}$, що задовольняють співвідношення

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = I.$$

У даній статті ми будемо використовувати множину $I_n(A) = \left\{\vec{\alpha} \,|\, \vec{\alpha} \in I_n, \sum_{i=1}^n \alpha_i = A\right\}$.

Нагадаємо опис множини $\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$ при $n = 1, \ldots, 4$. Насамперед зазначимо, що для $n \le 3$ опис множини $\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$ можна отримати з опису множини I_n і навпаки. Так, при $n = 1$ $\sum_{(\alpha_1)} = \{0, \alpha_1\}$.

Множина $\sum_{(\alpha_1,\alpha_2)}$ має вигляд $\sum_{(\alpha_1,\alpha_2)} = \{0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$.

При $n = 3$ один із проекторів записують як лінійну комбінацію двох інших, тому

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \left\{\sum_{i \in J} \alpha_i,\ J \subset \{1, 2, 3\}\right\} \cup \left\{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{2}\right\}.$$

Описи множин $\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_4)}$ та I_4 дещо відрізняються. В роботі [4] описано множину I_4, а в роботі [5] — множину $\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_4)}$.

Починаючи з $n \ge 5$ опис множин $\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$ та I_n у загальному випадку є невідомим. У статті [2] описано множину $\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$ у випадку, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$. Ця множина містить не лише дискретну частину, а й неперервний проміжок, коли $n \ge 5$. Нагадаємо її опис (див. [2]):

$$\sum_{1,\ldots,1} = \left\{\Lambda_n^1, \Lambda_n^2, \left[\frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, \frac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2}\right], n - \Lambda_n^1, n - \Lambda_n^2\right\},$$

де

$$\Lambda_n^1 = \left\{0,\ 1 + \frac{1}{n-1},\ 1 + \frac{1}{n - 2 - \frac{1}{n-1}}, \ldots,\ 1 + \frac{1}{n - 2 - \frac{1}{n - 2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{n-1}}}}, \ldots\right\},$$

$$\Lambda_n^2 = \left\{ 1,\ 1 + \frac{1}{n-2},\ 1 + \frac{1}{n-2-\frac{1}{n-2}}, \ldots,\ 1 + \frac{1}{n-2-\frac{1}{n-2-\frac{1}{\ddots - \frac{1}{n-2}}}}, \ldots \right\}.$$

При вивченні даної множини використовувалась техніка функторів Кокстера, що описана в [2, 3]. Зокрема, було доведено, що якщо $[3/2, 2] \subset \sum_5$, то $\left(\frac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2} \right) \subset \sum_n$, та показано, що існують набори проекторів $P_1, \ldots, P_n$, які задовольняють умову

$$P_1 + \ldots + P_n = \gamma I$$

для всіх $\gamma \in [3/2, 2]$.

Таким чином, за умови $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$ задача опису неперервної частини $\sum_n$ зводиться до випадку п'яти проекторів. Тому вивчення загального випадку природно почати з вивчення п'ятірки лінійно пов'язаних проекторів.

2. Загальні факти про n проекторів, що пов'язані лінійним співвідношенням. У статті [3] було розглянуто набір проекторів $P_1, \ldots, P_n$, що задовольняють співвідношення $\sum \alpha_i P_i = I$. З використанням функторів Кокстера S та T було побудовано новий набір проекторів $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$ (взагалі кажучи, в іншому гільбертовому просторі $\mathcal{H}$), який задовольняє співвідношення $\sum \tilde{\alpha}_i \tilde{P}_i = I$ з деякими $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n) \in I_n$. Такий підхід дозволив описати деякі властивості множини $I_n = \{ \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \}$.

Дія функторів Кокстера S та T на векторах $\vec{\alpha}$ задається таким чином:

$$S(\vec{\alpha}) = (1 - \alpha_1, 1 - \alpha_2, \ldots, 1 - \alpha_n),$$

причому функтор застосовний лише для таких векторів $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, що $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$,

$$T(\vec{\alpha}) = \left(\frac{\alpha_1}{A-1}, \frac{\alpha_2}{A-1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{A-1} \right),$$

функтор застосовний для $A > 1$, $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i$,

$$\Phi^+(\vec{\alpha}) = ST(\vec{\alpha}) = \left(1 - \frac{\alpha_1}{A-1}, 1 - \frac{\alpha_2}{A-1}, \ldots, 1 - \frac{\alpha_n}{A-1} \right),$$

функтор застосовний для $0 < \alpha_i < A - 1$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\Phi^-(\vec{\alpha}) = TS(\vec{\alpha}) = \left(\frac{1-\alpha_1}{n-A-1}, \frac{1-\alpha_2}{n-A-1}, \ldots, \frac{1-\alpha_n}{n-A-1} \right),$$

функтор застосовний для $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $A < n - 1$, де $A = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

У статті [3] введено *R-умову*. Вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ задовольняє *R-умову*, якщо:

1) вектор $\vec{\alpha}$ містить координату $\alpha_{i_0} \geq 1$, або

2) вектор $\vec{\alpha}$ містить координату α_{i_0} таку, що $\alpha_{i_0} + 1 \geq A$.

Також показано, що, використовуючи функтори Кокстера для векторів $\vec{\alpha} \in I_n$ таких, що $A \in \left[1, \dfrac{n - \sqrt{n^2 - 4n}}{2}\right)$, завжди одержуємо деякий вектор $\vec{\beta} = \Phi^{-k}(\vec{\alpha})$, $k \geq 1$, для якого виконується *R-умова*. З допомогою функторів Кокстера показано, що для опису множини векторів $\vec{\alpha} \in I_n$ при $A \in \left(\dfrac{n + \sqrt{n^2 - 4n}}{2}, 2\right]$ необхідно дослідити вектори $\vec{\alpha} \in I_n$ при $A \in \left(1 + \dfrac{1}{n-3}, 2\right]$.

У даній статті розглядається множина I_5 для $A \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

Оскільки функтори Кокстера Φ^+, Φ^- встановлюють взаємно однозначну відповідність між множинами $\bigcup_{A=3/2}^{2} I_5(A)$ і $\bigcup_{A=2}^{3} I_5(A)$, а функтор S встановлює взаємно однозначну відповідність між множинами $\bigcup_{A=2}^{5/2} I_5(A)$ та $\bigcup_{A=5/2}^{3} I_5(A)$, достатньо дослідити хоча б одну з цих множин.

Твердження 1. *Якщо незвідний набір проекторів* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *задовольняє співвідношення* $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n = \gamma I$ *і* $\alpha_n \geq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$, *то* $P_n = 0$ *або* $P_n = 1$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $\gamma < \dfrac{A}{2}$, де $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, тоді з рівності (1) отримаємо

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_{n-1} P_n = \gamma I - \alpha_n P_n.$$

Оскільки зліва завжди додатно визначений оператор і за умовою $\gamma < \dfrac{A}{2}$ та $\alpha_n \geq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$, то справа оператор буде додатно визначеним лише при $P_n = 0$.

У випадку $\gamma \geq \dfrac{A}{2}$ введемо заміну $P_i = I - \tilde{P}_i$. Тоді з рівності (1) отримаємо

$$\alpha_1(I - \tilde{P}_1) + \alpha_2(I - \tilde{P}_2) + \ldots + \alpha_{n-1}(I - \tilde{P}_{n-1}) = \gamma I - \alpha_n(I - \tilde{P}_n),$$

$$\alpha_1 \tilde{P}_1 + \alpha_2 \tilde{P}_2 + \ldots + \alpha_{n-1} \tilde{P}_{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \gamma\right) I - \alpha_n \tilde{P}_n.$$

Аналогічно, враховуючи всі умови, одержуємо $\tilde{P}_n = 0$, а отже, $P_n = I$.

3. Конструкція лінійно пов'язаних п'ятірок проекторів. Перш ніж будувати ортопроектори в нескінченновимірному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, введемо позначення матриць $A(\alpha, x), B(\alpha, x) \in M_2(\mathbb{C})$:

$$A(\alpha, x) = \begin{pmatrix} x & \sqrt{x(\alpha - x)} \\ \sqrt{x(\alpha - x)} & \alpha - x \end{pmatrix},$$

$$B(\alpha, x) = \begin{pmatrix} x & -\sqrt{x(\alpha - x)} \\ -\sqrt{x(\alpha - x)} & \alpha - x \end{pmatrix}$$

для довільних $x, \alpha \in \mathbb{R}$ таких, що $x \leq \alpha$. Зрозуміло, що $\frac{1}{\alpha} A(\alpha, x)$ і $\frac{1}{\alpha} B(\alpha, x)$ — ортопроектори. Для вивчення множини I_5 побудуємо відповідні набори лінійно пов'язаних ортопроекторів. Нехай P_1, P_2 — блочно-діагональні оператори у просторі $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \ldots$, які задаються рівняннями

$$P_1 = \frac{1}{\alpha_1} (A(\alpha_1, \gamma_1) \oplus A(\alpha_1, \gamma_2) \oplus \ldots), \tag{2}$$

$$P_2 = \frac{1}{\alpha_2} (B(\alpha_2, \beta_1) \oplus B(\alpha_2, \beta_1) \oplus \ldots), \tag{3}$$

де $0 < \gamma_n < \alpha_1$, $0 < \beta_n < \alpha_2$, $n = 1, 2, \ldots$. Елементи P_3, P_4 — блочно-діагональні оператори у просторі $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2 \oplus \ldots$, які задаються рівняннями

$$P_3 = \frac{1}{\alpha_3} (x^{(1)} \oplus A(\alpha_3, \tau_1) \oplus A(\alpha_3, \tau_2) \oplus \ldots), \tag{4}$$

$$P_4 = \frac{1}{\alpha_4} (x^{(2)} \oplus B(\alpha_4, \theta_1) \oplus B(\alpha_4, \theta_2) \oplus \ldots), \tag{5}$$

де $0 < \tau_n < \alpha_3$, $0 < \theta_n < \alpha_4$, $x^{(1)} \in \{0, \alpha_3\}$, $x^{(2)} \in \{0, \alpha_4\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Елемент P_5 — діагональний оператор у просторі $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \ldots$, який задається рівнянням

$$P_5 = \frac{1}{\alpha_5} (x_1^{(3)} \oplus x_2^{(3)} \oplus \ldots), \tag{6}$$

де $x_n^{(3)} \in \{0, \alpha_5\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Нескладно переконатися, що $P_1, \ldots, P_5$ — ортопроектори в $\mathcal{H}$.

Знайдемо необхідні умови, за яких побудований набір проекторів $P_1, \ldots, P_5$ задовольняє співвідношення

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_5 P_5 = I. \tag{7}$$

Твердження 2. *Проектори* $P_1, \ldots, P_5$, *які задаються формулами* (2) – (6), *задовольняють співвідношення* (7) *при певних значеннях параметрів тоді і тільки тоді, коли існують* $x \in \left\{-\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}, \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}, \frac{\mp\alpha_4 \pm \alpha_3}{2}\right\}$ *та послідовність чисел* $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *для яких*

$$t_n = (2n-1)\left(1 - \frac{A}{2}\right) - x -$$

$$- \frac{\alpha_5}{2} \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon_i \in \left[-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, -\frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2}\right] \bigcup \left[\frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{2}, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right],$$

$$s_n = 2n\left(1 - \frac{A}{2}\right) - x -$$

$$- \frac{\alpha_5}{2} \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i \in \left[-\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}, -\frac{|\alpha_3 - \alpha_4|}{2}\right] \bigcup \left[\frac{|\alpha_4 - \alpha_3|}{2}, \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right],$$

де $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Доведення. З умови (7) для проекторів такого вигляду випливає, що матриці $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ та $\alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4$ є діагональними.

З рівності

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = \operatorname{diag}(\gamma_1 + \beta_1, \alpha_1 + \alpha_2 - (\gamma_1 + \beta_1), \ldots) \tag{8}$$

випливає, що $\gamma_n(\alpha_1 - \gamma_n) = \beta_n(\alpha_2 - \beta_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Нехай $\tilde{t}_n = \gamma_n(\alpha_1 - \gamma_n) = \beta_n(\alpha_2 - \beta_n)$, тоді $\gamma_n = \dfrac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\tilde{t}_n}}{2}$, $\beta_n = \dfrac{\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\tilde{t}_n}}{2}$. Нехай також $t_n = \dfrac{\pm\sqrt{\alpha_1^2 - 4\tilde{t}_n} \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\tilde{t}_n}}{2}$. Тоді рівність (8) набере вигляду

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} I + \operatorname{diag}(t_1, -t_1, t_2, -t_2, \ldots).$$

Аналогічно

$$\alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = \operatorname{diag}(\tilde{x}, \tau_1 + \theta_1, \alpha_3 + \alpha_4 - (\tau_1 + \theta_1), \ldots), \tag{9}$$

де $\tilde{x} \in \{0, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4\}$. З рівності (9) випливає, що $\tau_n(\alpha_3 - \tau_n) = \theta_n(\alpha_4 - \theta_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$. Нехай $\tilde{s}_n = \tau_n(\alpha_3 - \tau_n) = \theta_n(\alpha_4 - \theta_n)$, тоді $\tau_n = \dfrac{\alpha_3 \pm \sqrt{\alpha_3^2 - 4\tilde{s}_n}}{2}$, $\theta_n = \dfrac{\alpha_4 \pm \sqrt{\alpha_4^2 - 4\tilde{s}_n}}{2}$. Нехай також $s_n = \dfrac{\pm\sqrt{\alpha_3^2 - 4\tilde{s}_n} \pm \sqrt{\alpha_4^2 - 4\tilde{s}_n}}{2}$. Враховуючи всі заміни, перепишемо (8) у вигляді

$$\alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} I + \operatorname{diag}(x, s_1, -s_1, s_2, -s_2, \ldots),$$

де $x \in \left\{-\dfrac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}, \dfrac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}, \dfrac{\mp\alpha_4 \pm \alpha_3}{2}\right\}$. Враховуючи ці перетворення, запишемо (7) у вигляді

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 + \alpha_5 P_5 = \frac{A}{2} I + \operatorname{diag}(t_1, -t_1, \ldots) +$$
$$+ \operatorname{diag}(x, s_1, -s_1, \ldots) + \operatorname{diag}(\tilde{\varepsilon}_1, \varepsilon_2, \ldots) = I. \tag{10}$$

Тут $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\tilde{\varepsilon}_n \in \left\{-\dfrac{\alpha_5}{2}, \dfrac{\alpha_5}{2}\right\}$. З (10) випишемо співвідношення для t_n, s_n:

$$t_1 + x + \tilde{\varepsilon}_1 = 1 - \frac{A}{2},$$

$$-t_1 + s_1 + \tilde{\varepsilon}_2 = 1 - \frac{A}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_i - s_{i-1} + \tilde{\varepsilon}_i = 1 - \frac{A}{2},$$

$$-t_i - s_i + \tilde{\varepsilon}_i = 1 - \frac{A}{2}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Із цих співвідношень отримаємо загальні формули

$$t_n = (2n-1)\left(1-\frac{A}{2}\right) - x - \frac{\alpha_5}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\varepsilon_i, \tag{11}$$

$$s_n = 2n\left(1-\frac{A}{2}\right) - x - \frac{\alpha_5}{2}\sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i, \tag{12}$$

де $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Враховуючи значення, яких можуть набувати γ_n, β_n, τ_n, θ_n, отримуємо

$$t_n \in \left[-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, -\frac{|\alpha_1-\alpha_2|}{2}\right] \cup \left[\frac{|\alpha_2-\alpha_1|}{2}, \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right], \tag{13}$$

$$s_n \in \left[-\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}, -\frac{|\alpha_3-\alpha_4|}{2}\right] \cup \left[\frac{|\alpha_4-\alpha_3|}{2}, \frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\right]. \tag{14}$$

Отже, якщо існує послідовність $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, яка задовольняє умови (13), (14), то завжди можна побудувати ортопроектори вигляду (2) – (6), що задовольнятимуть співвідношення (7).

Справедливим є також зворотне твердження. Якщо існують $x \in \left\{-\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}, \frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}, \frac{\mp\alpha_4 \pm \alpha_3}{2}\right\}$ та послідовність $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, яка задовольняє умови (13), (14), то параметри, що задають ортопроектори $P_1, \ldots, P_5$, можна обчислити за формулами для γ_n, β_n, τ_n, θ_n з першої частини доведення та співвідношеннями

$$x = \begin{cases} -\dfrac{\alpha_3+\alpha_4}{2}, & x^{(1)} = x^{(2)} = 0, \\ \dfrac{\alpha_3-\alpha_4}{2}, & x^{(1)} = \alpha_3, \ \ x^{(2)} = 0, \\ \dfrac{\alpha_4-\alpha_3}{2}, & x^{(1)} = 0, \ \ x^{(2)} = \alpha_4, \\ \dfrac{\alpha_3+\alpha_4}{2}, & x^{(1)} = \alpha_3, \ \ x^{(2)} = \alpha_4, \end{cases} \qquad \text{та} \qquad \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & x_i^{(3)} = \alpha_5, \\ -1, & x_i^{(3)} = 0. \end{cases}$$

Використовуючи наведену конструкцію, доведемо наступні теореми.

Теорема 1. *Нехай* $\alpha_1 = \ldots = \alpha_4$, $2\alpha_1 \geq \alpha_5$, $A - \alpha_5 \leq 2$, *тоді для всіх* $A \in [2; 5/2]$ *існує набір проекторів, що задовольняють співвідношення*

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_1 P_2 + \alpha_1 P_3 + \alpha_1 P_4 + \alpha_5 P_5 = I.$$

Доведення. У даному випадку вирази (13) та (14) мають вигляд

$$t_n \in [-\alpha_1, \alpha_1], \qquad s_n \in [-\alpha_1, \alpha_1]. \tag{15}$$

Використовуючи формули (11), (12) для t_n та s_n, отримуємо

$$-\alpha_1 \leq (2n-1)\left(1-\frac{A}{2}\right) - x - \frac{\alpha_5}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\varepsilon_i \leq \alpha_1, \tag{16}$$

$$-\alpha_1 \leq 2n\left(1-\frac{A}{2}\right) - x - \frac{\alpha_5}{2}\sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i \leq \alpha_1, \tag{17}$$

де $x \in \{-\alpha_1, 0, \alpha_1\}$.

Нехай $\eta_n = [\, n(2-A) - 2x - 2\alpha_1, n(2-A) - 2x + 2\alpha_1 \,] \subset \mathbb{R}$. Тоді з (16) та (17) матимемо

$$\alpha_5 \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon_i \in \eta_{2n-1}, \qquad \alpha_5 \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i \in \eta_{2n}. \tag{18}$$

Теорему буде встановлено, якщо ми покажемо, що існує послідовність чисел $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ така, що виконуються умови (18).

Доведемо теорему методом математичної індукції. Легко переконатися, що при $n = 1$ завжди можна вибрати ε_1 та ε_2 для різних значень $x \in \{-\alpha_1, 0, \alpha_1\}$ такі, що задовольняють (18). Нехай існують ε_i для $i = 1, \ldots, 2n - 1$ такі, що виконуються (18). Покажемо, що для кожної точки $z \in \eta_{2n-1}$ існує $\varepsilon_{2n} \in \{-1, 1\}$ таке, що $z + \alpha_5 \varepsilon_{2n} \in \eta_{2n}$, та для кожної точки $y \in \eta_{2n}$ існує $\varepsilon_{2n+1} \in \{-1, 1\}$ таке, що $y + \alpha_5 \varepsilon_{2n+1} \in \eta_{2n+1}$.

Нехай $\eta_{2n-1} = \eta_{2n-1,1} \cup \eta_{2n-1,2}$, де

$$\eta_{2n-1,1} = [(2n-1)(2-A) - 2x - 2\alpha_1,\, 2n(2-A) - 2x + 2\alpha_1 - \alpha_5],$$

$$\eta_{2n-1,2} = [2n(2-A) - 2x + 2\alpha_1 - \alpha_5,\, 2n(2-A) - 2x + 2\alpha_1].$$

Можна перевірити, що для всіх $A \in [2; 5/2]$ за умов $\alpha_5 \le 2\alpha_1$ та $A - \alpha_5 \le 2$: $\varepsilon_{2n} = 1$ для всіх точок $z \in \eta_{2n-1,1}$, тобто $z + \alpha_5 \in \eta_{2n}$, і $\varepsilon_{2n} = -1$ для точок $z \in \eta_{2n-1,2}$, тобто $z - \alpha_5 \in \eta_{2n}$. Звідси випливає, що для кожної точки $z \in \eta_{2n-1}$ за умов $\alpha_5 \le 2\alpha_1$ та $A - \alpha_5 \le 2$ існує ε_{2n} таке, що $z + \alpha_5 \varepsilon_{2n} \in \eta_{2n}$. Аналогічно доводиться існування ε_{2n+1}.

Отже, для будь-якого $A \in [2, 5/2]$ за умов, що $\alpha_5 \le 2\alpha_1$ та $A - \alpha_5 \le 2$, можна підібрати таку послідовність чисел ε_i, щоб виконувались умови (18), тобто існуватиме розв'язок системи (11), (12).

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай* $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$, $2\alpha_1 \ge \alpha_5$, $2\alpha_3 \ge \alpha_5$, $\alpha_1 \le \frac{1}{2}$, $\alpha_3 \le \frac{1}{2}$, *тоді для всіх* $A \in [2; 5/2]$ *існує набір проекторів, що задовольняють співвідношення*

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_1 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_3 P_4 + \alpha_5 P_5 = I.$$

Доведення. У даному випадку вирази (13) та (14) мають вигляд

$$t_n \in [-\alpha_1, \alpha_1], \qquad s_n \in [-\alpha_3, \alpha_3]. \tag{19}$$

Використовуючи формули (11), (12) для t_n та s_n, отримуємо

$$-\alpha_1 \le (2n-1)\left(1 - \frac{A}{2}\right) - x - \frac{\alpha_5}{2} \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon_i \le \alpha_1, \tag{20}$$

$$-\alpha_3 \le 2n\left(1 - \frac{A}{2}\right) - x - \frac{\alpha_5}{2} \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i \le \alpha_3, \tag{21}$$

де $x \in \{-\alpha_3, 0, \alpha_3\}$.

Доведення проведемо аналогічно доведенню теореми 1; відмінність полягає лише у множинах η_{2n-1}, η_{2n}:

$$\eta_{2n-1} = [(2n-1)(2-A) - 2x - 2\alpha_1,\, (2n-1)(2-A) - 2x + 2\alpha_1] \subset \mathbb{R},$$

$$\eta_{2n} = [2n(2-A) - 2x - 2\alpha_3,\, 2n(2-A) - 2x + 2\alpha_3] \subset \mathbb{R}.$$

Отже, для будь-якого $A \in [2, 5/2]$ за умов $\alpha_5 \le 2\alpha_1$, $\alpha_5 \le 2\alpha_3$, $\alpha_1 \le \frac{1}{2}$, $\alpha_3 \le \frac{1}{2}$ можна підібрати таку послідовність чисел ε_i, щоб виконувались умови (20), (21), тобто існуватиме розв'язок системи (11), (12).

Теорему доведено.

Наступна теорема показує, що за певних умов на α_i множина I_5 містить непорожню відкриту підмножину.

Теорема 3. *Нехай* $\alpha_5 \ge |\alpha_2 - \alpha_1|$, $\alpha_5 \ge |\alpha_4 - \alpha_3|$, $\alpha_1 + \alpha_2 \le 1$, $\alpha_3 + \alpha_4 \le 1$ *та* $\alpha_5 \le \alpha_j$, $j = 1, \ldots, 4$, *тоді для всіх* $A \in [2, 5/2]$ *існує набір проекторів, що задовольняють співвідношення*

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 + \alpha_5 P_5 = I.$$

Доведення. Нехай

$$G_n = (2n-1)(2-A) - 2x - (\alpha_1 + \alpha_2), \quad B_n = (2n-1)(2-A) - 2x - |\alpha_2 - \alpha_1|,$$

$$C_n = (2n-1)(2-A) - 2x + |\alpha_1 - \alpha_2|, \quad D_n = (2n-1)(2-A) - 2x + (\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$E_n = 2n(2-A) - 2x - (\alpha_3 + \alpha_4), \quad F_n = 2n(2-A) - 2x - |\alpha_4 - \alpha_3|,$$

$$K_n = 2n(2-A) - 2x + |\alpha_3 - \alpha_4|, \quad L_n = 2n(2-A) - 2x + (\alpha_3 + \alpha_4).$$

Тоді $\eta_{2n-1} = [G_n, B_n] \cup [C_n, D_n] \subset \mathbb{R}$ та $\eta_{2n} = [E_n, F_n] \cup [K_n, L_n] \subset \mathbb{R}$.

Підставивши (11) та (12) в (13) та (14), отримаємо

$$\alpha_5 \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon_i \in \eta_{2n-1}, \qquad \alpha_5 \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i \in \eta_{2n}. \tag{22}$$

Теорему буде доведено, якщо ми покажемо, що існує послідовність чисел $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ така, що виконуються умови (22).

При $n = 1$ неважко переконатися, що для будь-яких $x \in \in \left\{-\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}, \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}, \frac{\mp\alpha_4 \pm \alpha_3}{2}\right\}$ завжди можна підібрати ε_1 та ε_2. Нехай існують ε_i для $i = 1, \ldots, 2n-1$ такі, що виконуються (22). Покажемо, що для кожної точки $z \in \eta_{2n-1}$ існує $\varepsilon_{2n} \in \{-1, 1\}$ таке, що $z + \alpha_5 \varepsilon_{2n} \in \eta_{2n}$, та для кожної точки $y \in \eta_{2n}$ існує $\varepsilon_{2n+1} \in \{-1, 1\}$ таке, що $y + \alpha_5 \varepsilon_{2n+1} \in \eta_{2n+1}$.

Розглянемо спочатку множину точок η_{2n-1}, а саме, множину $[G_n, B_n]$. Легко бачити, що для будь-якої точки $x \in [G_n, B_n]$ при $\varepsilon_{2n} = 1$ $x + \alpha_5 \in [E_n, L_n]$ за умови, що $\alpha_1 + \alpha_2 \le 1$. Для точок $x \in [G_n, B_n]$, які при $\varepsilon_{2n} = 1$ переходять у точки $x + \alpha_5 \in [F_n, K_n]$, необхідно, щоб $\varepsilon_{2n} = -1$, тоді за умови $\alpha_5 \le \alpha_j$, $j = 1, \ldots, 4$, точки $x - \alpha_5 \in [E_n, F_n]$. Розглянемо тепер множину $[C_n, D_n]$.

Нехай $[C_n, D_n] = \eta_{2n-1,1} \cup \eta_{2n-1,2}$, де

$$\eta_{2n-1,1} = [(2n-1)(2-A) - 2x + |\alpha_1 - \alpha_2|, 2n(2-A) - 2x + (\alpha_4 + \alpha_3) - \alpha_5],$$

$$\eta_{2n-1,2} = [2n(2-A) - 2x + (\alpha_4 + \alpha_3) - \alpha_5, (2n-1)(2-A) - 2x + (\alpha_1 + \alpha_2)],$$

$\varepsilon_{2n} = 1$ для всіх точок $z \in \eta_{2n-1,1}$, тобто $z + \alpha_5 \in [K_n, L_n]$. За умови $\alpha_5 \le \alpha_j$, $j = 1, \ldots, 4$, $\varepsilon_{2n} = -1$ для всіх точок $z \in \eta_{2n-1,2}$, тобто $z - \alpha_5 \in [K_n, L_n]$.

Розглянемо тепер η_{2n}, а саме, множину $[E_n, F_n]$. Легко бачити, що для будь-якої точки $x \in [E_n, F_n]$ при $\varepsilon_{2n+1} = 1$ $x + \alpha_5 \in [C_{n+1}, D_{n+1}]$ за умови, що $\alpha_3 + \alpha_4 \le 1$. Для точок $x \in [E_n, F_n]$, які при $\varepsilon_{2n+1} = 1$ переходять у точки $x + \alpha_5 \in [B_{n+1}, C_{n+1}]$, необхідно, щоб $\varepsilon_{2n+1} = -1$, тоді за умови $\alpha_5 \le \alpha_j$, $j = 1, \ldots, 4$, точки $x - \alpha_5 \in [G_{n+1}, B_{n+1}]$. Розглянемо тепер множину $[K_n, L_n]$.

Нехай $[K_n, L_n] = \eta_{2n,1} \cup \eta_{2n,2}$, де

$$\eta_{2n,1} = [2n(2-A) - 2x + |\alpha_3 - \alpha_4|, (2n+1)(2-A) - 2x + (\alpha_2 + \alpha_1) - \alpha_5],$$

$$\eta_{2n,2} = [(2n+1)(2-A) - 2x + (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_5, 2n(2-A) - 2x + (\alpha_3 + \alpha_4)].$$

Можна перевірити, що для всіх точок $y \in \eta_{2n,1}$ виконується рівність $\varepsilon_{2n+1} = = 1$, тобто $y + \alpha_5 \in [C_{n+1}, D_{n+1}]$. Крім того, для всіх точок $y \in \eta_{2n,2}$ за умови $\alpha_5 \le \alpha_j$, $j = 1, \ldots, 4$ число $\varepsilon_{2n+1} = -1$, тобто $y - \alpha_5 \in [C_{n+1}, D_{n+1}]$.

Отже, для будь-якого $A \in [2, 5/2]$ за умов $\alpha_5 \ge |\alpha_2 - \alpha_1|$, $\alpha_5 \ge |\alpha_4 - \alpha_3|$, $\alpha_1 + \alpha_2 \le 1$, $\alpha_3 + \alpha_4 \le 1$ та $\alpha_5 \le \alpha_j$, $j = 1, \ldots, 4$, можна підібрати таку послідовність чисел ε_i, що виконуються умови (22), тобто існуватиме розв'язок системи (11), (12).

Теорему доведено.

З доведеної теореми випливають два наслідки.

***Наслідок* 1.** *Множина параметрів* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5$, *при яких існують п'ять ортопроекторів* $P_1, \ldots, P_5$ *у деякому гільбертовому просторі, що задовольняють співвідношення* $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_5 P_5 = I$, *містить відкриту підмножину з* $\mathbb{R}^5$.

Наприклад, гіперкуб $(0,45; 0,5)^4 \times (0,2; 0,45)$.

***Наслідок* 2.** *Множина параметрів* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, *при яких існує набір ортопроекторів* $P_1, \ldots, P_n$ *у деякому гільбертовому просторі, що задовольняють співвідношення* $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = I$, *містить відкриту підмножину з* $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Множина параметрів $(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5$ містить відкриту підмножину з $\mathbb{R}^5$ (наслідок 1). Покажемо, що множина $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $n > 5$, також містить відкриту підмножину з $\mathbb{R}^n$. Справді, для множини параметрів $(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5$ існує набір проекторів $P_1, \ldots, P_n$, де для всіх $k > 5$ $P_k = 0$, який задовольняє співвідношення $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_5 P_5 + \alpha_6 0 + \ldots + \alpha_n 0 = I$. Отже, множина параметрів $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I_n$ містить відкриту підмножину з $\mathbb{R}^n$.

Наслідок доведено.

1. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representation of finitely presented $*$-algebras. 1. Representation by bounded operators // Revs Math. and Math. Phys. – 1999. – **11**. – P. 1 – 261.
2. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, № 3. – С. 20 – 35.
3. *Kruglyak S. A.* Coxeter functor for a sertein class of $*$-quivers and $*$-algebras // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 4. – P. 49 – 57.
4. *Кириченко А. А. , Кругляк С. А.* Про спектр суми проекторів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2003. – № 1. – С. 24 – 31.
5. *Юсенко К. А.* Про четвірки проекторів, пов'язаних лінійним співвідношенням // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1289 – 1295.

Одержано 08.04.08,
після доопрацювання — 23.09.08