УДК 517. 5

А. И. Подвысоцкая (Киев нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ОЦЕНКА СНИЗУ В НЕРАВЕНСТВЕ С. Н. БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

We prove that $\max|p'(x)|$, where p runs over all algebraic polynomials of degree not greater than $n \geq 3$ with modules bounded by 1 on $[-1, 1]$, is not less than $(n-1)/\sqrt{1-x^2}$ for all $x \in (-1, 1)$ such that $|x| \in \bigcup_{k=0}^{[n/2]-1}\left[\cos\dfrac{2k+1}{2(n-1)}\pi, \cos\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right]$.

Доведено, що $\max|p'(x)|$, де p пробігає множину всіх обмежених за модулем одиницею на $[-1, 1]$ алгебраїчних поліномів степеня не вище $n \geq 3$, не менше $(n-1)/\sqrt{1-x^2}$ для всіх тих $x \in (-1, 1)$, для яких $|x| \in \bigcup_{k=0}^{[n/2]-1}\left[\cos\dfrac{2k+1}{2(n-1)}\pi, \cos\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right]$.

1. Введение и основной результат. Пусть $\mathcal{P}_n$ обозначает множество всех алгебраических многочленов с действительными коэффициентами степени не выше $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, $C(I)$ — класс всех действительнозначных непрерывных функций f на $I := [-1, 1]$, $\|f\|_{C(I)} := \max_{x\in I}|f(x)|$ и

$$\pi_n := \left\{p \in \mathcal{P}_n \,\middle|\, \|p\|_{C(I)} \leq 1\right\}, \qquad K(p) := \{x \in I \,|\, |p(x)| = 1\}, \qquad p \in \pi_n.$$

Если $p \in \pi_n$ и $\operatorname{card} K(p) = n+1$, то существуют такие знаки $\sigma_1, \sigma_2 \in \{+1, -1\}$, что $p(x) = \sigma_1 T_n(\sigma_2 x)$, где $\operatorname{card} A$ обозначает число различных элементов некоторого конечного множества $A \subseteq \mathbb{R}^1$, а $T_n(x) := \cos n \arccos x$ — многочлен Чебышева первого рода n-й степени.

Известно [1, с. 99], что во многих экстремальных задачах на множестве π_n экстремум достигается на одном из многочленов $p \in \pi_n$, для которого $n \leq \operatorname{card} K(p) \leq n+1$. Одной из таких задач является тесно связанная с известным неравенством Бернштейна

$$|p'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\|p\|_{C(I)}, \quad x \in (-1, 1), \quad p \in \mathcal{P}_n, \tag{1}$$

экстремальная задача нахождения

$$M_n(x) := \max_{p \in \pi_n}|p'(x)| \tag{2}$$

для произвольной фиксированной точки $x \in I$ (см. [2, с. 32], задача 1.1). Эта задача была решена в 1892 г. В. А. Марковым [3] (см. также [2, с. 38]), который доказал, что $M_n(x) = |T_n'(x)|$, если x принадлежит специальным подынтервалам $\left\{\left[\alpha_j, \beta_j\right]\right\}$ интервала I. Им было доказано также, что на оставшихся подынтервалах I значение $M_n(x)$ достигается на так называемых полиномах Золотарева, т. е. на тех многочленах $p \in \pi_n \setminus \pi_{n-1}$, для которых $\operatorname{card} K(p) = n$.

Непосредственно из определения множества π_n и неравенства Бернштейна (1) следуют такие свойства функции $M_n(x)$:

$$M_n(x) = M_n(-x), \quad x \in I; \qquad 1 \le M_n(x) \le \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \tag{3}$$

Используя новые свойства многочленов Золотарева, установленные в [4], докажем следующую оценку снизу функции $M_n(x)$.

Теорема. *Для произвольного* $n \ge 3$ *имеет место неравенство*

$$M_n(x) \ge \frac{n-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| \in \bigcup_{k=0}^{[n/2]-1} \left[\cos\frac{2k+1}{2(n-1)}\pi, \cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right]. \tag{4}$$

2. Предварительные результаты. Будем использовать обозначения для многочленов Золотарева, введенные в [4, с. 154]. Для каждого натурального $n \ge 2$ и действительного числа $1 \le b < \infty$ существует единственный многочлен Золотарева $Z_{n,b}(x)$ степени n со свойствами

$$\begin{gathered} Z_n'(-b) = 0, \qquad |Z_n(-b_1)| = |Z_n(-b_2)| = 1, \\ b_2 > b_1 \ge b \ge 1, \qquad b_1 = b_1(b), \qquad b_2 = b_2(b), \end{gathered} \tag{5}$$

допускающий аналитическое представление (см. [4], формула (11))

$$\begin{gathered} Z_{n,b}(x) = \cos(n\,\omega(x)), \quad x \in I, \\ \omega(x) := \omega(x,b) := \int_x^1 \sqrt{\frac{\rho(t,b)}{1-t^2}}\,dt, \qquad \rho(x,b) := \frac{(b+x)^2}{(b_1(b)+x)\,(b_2(b)+x)}. \end{gathered} \tag{6}$$

При этом $Z_{n,1}(x) = T_n\left(x\,\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)$ и в дополнение к формулам (6) будем использовать обозначение (см. [4], формула (5))

$$Z_{n,b}(x) := T_n\left(\frac{x + b\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{1 + b\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right), \quad b \in [0,1]. \tag{7}$$

В приведенном ниже доказательстве теоремы будет использовано следующее свойство функции $\rho(x,b)$.

Лемма. *Пусть* $1 < b < \infty$ *и функция* $\rho(x,b)$ *определена формулой* (6). *Тогда*

$$\rho(x,b) \ge \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2, \quad x \in [0,1]. \tag{8}$$

Доказательство. Множество π_n является выпуклым и $Z_{n,b} \in \pi_n$ при любом $b \ge 0$. Поэтому для произвольных $\theta \in [0,1]$, $b \ge 1$ и $|\varepsilon| < b$

$$(1-\theta)Z_{n,b} + \theta Z_{n,b+\varepsilon} = Z_{n,b} + \theta(Z_{n,b+\varepsilon} - Z_{n,b}) \in \pi_n. \tag{9}$$

Предположим, что $y \in I$ и $Z_{n,b}(y) = \sigma \in \{1, -1\}$. Тогда из (9) следует

$$\sigma\left(Z_{n,b+\varepsilon}(y) - Z_{n,b}(y)\right) \le 0, \quad |\varepsilon| < b, \quad b \ge 1. \tag{10}$$

В [5, с. 12 – 14] получено выражение многочленов $Z_{n,b}$, $b \ge 1$, через эллиптические функции, из которого следует, что все коэффициенты многочлена $Z_{n,b}$, как и функции $b_1(b)$ и $b_2(b)$, являются непрерывно дифференцируемыми функциями параметра b. Поэтому разделив неравенство (10) на ε и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\sigma \frac{\partial}{\partial b} Z_{n,b}(y) \le 0,$$

если $\varepsilon > 0$, и

$$\sigma \frac{\partial}{\partial b} Z_{n,b}(y) \ge 0,$$

если $\varepsilon < 0$, откуда следует

$$y \in I, \qquad \left| Z_{n,b}(y) \right| = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial b} Z_{n,b}(y) = 0. \tag{11}$$

Согласно известным свойствам многочлена $Z_{n,b}$ при $b > 1$ (см. [4, с. 153]) $\left| Z_{n,b}(\pm 1) \right| = 1$ и $\left| Z_{n,b}(y) \right| = 1$ для всех $(n-2)$-х корней уравнения $Z'_{n,b}(y) = 0$, которые расположены в $(-1, 1)$, $(n-1)$-й корень этого уравнения равен $-b$. Поэтому из (11) следует, что для каждого $b > 1$ существует такая ненулевая действительная постоянная $\lambda(b)$, что

$$\frac{\partial}{\partial b} Z_{n,b}(x) = \lambda(b) \frac{1 - x^2}{x + b} Z'_{n,b}(x), \quad b > 1. \tag{12}$$

Для нахождения $\lambda(b)$ подставим представление (6) в (12):

$$-\frac{\partial}{\partial b} \int_x^1 \sqrt{\frac{\rho(t,b)}{1-t^2}}\, dt = \lambda(b) \frac{1 - x^2}{x + b} \sqrt{\frac{\rho(x,b)}{1 - x^2}} = \lambda(b) \sqrt{\frac{1 - x^2}{(x + b_1)(x + b_2)}},$$

и после дифференцирования по x будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{\partial}{\partial b} \sqrt{\rho(x,b)} = \lambda(b) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{1 - x^2}{(x + b_1)(x + b_2)}}. \tag{13}$$

Поскольку $\sqrt{\rho(x,b)} = (x + b) / \sqrt{(x + b_1)(x + b_2)}$, обозначив $b'_k := b'_k(b)$, $k = \overline{1, 2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{\partial}{\partial b} \sqrt{\rho(x,b)} = \frac{x + b}{2\sqrt{(1 - x^2)(x + b_1)(x + b_2)}} \left[\frac{2}{x + b} - \frac{b'_1}{x + b_1} - \frac{b'_2}{x + b_2} \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{1 - x^2}{(x + b_1)(x + b_2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - x^2}{(x + b_1)(x + b_2)}} \left[\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{x + b_1} - \frac{1}{x + b_2} \right]$$

и из (13) найдем

$$(x + b) \left[\frac{2}{x + b} - \frac{b'_1}{x + b_1} - \frac{b'_2}{x + b_2} \right] =$$

$$= \lambda(b)(1 - x^2) \left[\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + b_1} - \frac{1}{x + b_2} \right].$$

Отсюда с учетом равенств

$$(x^2 - 1) \left[\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + b_1} - \frac{1}{x + b_2} \right] =$$

$$= (x^2-1)\left[\frac{b_1-1}{(x+1)(x+b_1)}+\frac{b_2+1}{(x-1)(x+b_2)}\right] = \frac{(b_1-1)(x-1)}{x+b_1} +$$

$$+ \frac{(b_2+1)(x+1)}{x+b_2} = b_1 + b_2 - \frac{(1+b_1)(b_1-1)}{x+b_1} + \frac{(b_2+1)(1-b_2)}{x+b_2} =$$

$$= b_1 + b_2 - \frac{b_1^2-1}{x+b_1} - \frac{b_2^2-1}{x+b_2}$$

получим

$$2 - b_1' - b_2' + \frac{b_1-b}{x+b_1}b_1' + \frac{b_2-b}{x+b_2}b_2' = \lambda(b)\left[\frac{b_1^2-1}{x+b_1}+\frac{b_2^2-1}{x+b_2}-b_1-b_2\right].$$

Таким образом, должны иметь место равенства

$$b_1' + b_2' - 2 = \lambda(b)(b_1+b_2),$$

$$b_1'(b_1-b) = \lambda(b)\left(b_1^2-1\right),$$

$$b_2'(b_2-b) = \lambda(b)\left(b_2^2-1\right).$$

Подставляя в первое равенство значения производных из второго и третьего, получаем

$$\lambda(b)(b_1+b_2) = \lambda(b)\frac{b_1^2-1}{b_1-b} + \lambda(b)\frac{b_2^2-1}{b_2-b} - 2,$$

откуда с учетом неравенств $b_2 > b_1 > b > 1$ (см. (5)) находим

$$\frac{2}{\lambda(b)} = \frac{b_1^2-1}{b_1-b} - b_1 + \frac{b_2^2-1}{b_2-b} - b_2 = \frac{bb_1-1}{b_1-b} + \frac{bb_2-1}{b_2-b} =$$

$$= \frac{(bb_1-1)(b_2-b) + (bb_2-1)(b_1-b)}{(b_1-b)(b_2-b)} > 0,$$

т. е.

$$\lambda(b) = \frac{2(b_1-b)(b_2-b)}{(bb_1-1)(b_2-b) + (bb_2-1)(b_1-b)} > 0 \quad \forall b>1. \tag{14}$$

Теперь заметим, что знак правой части (13) при $x\in[0,1]$ совпадает со знаком выражения

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x+b_1} - \frac{1}{x+b_2} = -\frac{2x}{1-x^2} - \frac{1}{x+b_1} - \frac{1}{x+b_2} < 0,$$

поэтому с учетом (13) и (14) имеем

$$\frac{\partial}{\partial b}\rho(x,b) < 0 \quad \forall b>1, \quad x\in[0,1]. \tag{15}$$

Но в [3, с. 65] доказано, что $\lim_{b\to+\infty} Z_{n,b} = T_{n-1}$, а это в силу формул (6) означает, что $\lim_{b\to+\infty}\rho(x,b) = (n-1)^2/n^2$ при каждом $x\in[-1,1]$. Поэтому на основании (15) получаем $\rho(x,b) \ge (n-1)^2/n^2$ для произвольных $b>1$ и $x \in [0, 1]$, что и требовалось доказать.

3. Доказательство теоремы. Пусть $n\ge 2$, $0 \le k \le [n/2]-1$, $\alpha_k(n) := := \cos\frac{2k+1}{2n}$ и $\beta_n := \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$. Поскольку $T_n(\alpha_k(n)) = 0$, по определению (7) многочлен $Z_{n,b}$ на промежутке $\left[\cos\frac{2k+1}{2(n-1)}\pi,\ \cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right]$ имеет ровно один нуль $\alpha_k(n)\,(1+b\beta_n)-b\beta_n$, который убывает от $\alpha_k(n)$ до $\alpha_k(n)\,(1+\beta_n)-\beta_n$, когда b возрастает от 0 до 1. Поэтому для каждого $x\in\left[\alpha_k(n)\,(1+\beta_n)-\beta_n,\right.$ $\left.\alpha_k(n)\right]$ существует такое $b\in[0,1]$, что корень $\alpha_k(n)\,(1+b\beta_n)-b\beta_n$ многочлена $Z_{n,b}$ совпадает с x. Но из (7) следует, что

$$Z'_{n,b}(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{1+b\beta_n},$$

откуда имеем

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}Z'_{n,b}(x) \ \ge\ \frac{1}{1+\beta_n} \ =\ \cos^2\frac{\pi}{2n} \ \ge\ 1-\frac{\pi^2}{4n^2} \ \ge\ 1-\frac{1}{n},$$

что доказывает неравенство (4) для всех $x\in\left[\alpha_k(n)\,(1+\beta_n)-\beta_n,\ \alpha_k(n)\right]$.

Рассмотрим случай, когда в (4) $x\in\left[\alpha_k(n-1),\ \alpha_k(n)\,(1+\beta_n)-\beta_n\right)$.

Для произвольного $b\ge 1$ обозначим нули полинома $Z_{n,b}$ через $\alpha_r^n(n)$, $0\le$ $\le r\le n-1$, причем (см. [4, с. 155]) $\alpha_{n-1}^b(n)<\alpha_{n-2}^b(n)<\ldots<\alpha_1^b(n)<\alpha_0^b(n)<1$. В [3, с. 65] доказано, что когда b возрастает от 1 до $+\infty$, $\alpha_k^b(n)$ убывает от $\alpha_k(n)\,(1+\beta_n)-\beta_n$ до $\alpha_k(n-1)$, причем $\lim_{b\to+\infty}Z_{n,b}=T_{n-1}$. Поэтому для произвольного $x\in\left(\alpha_k(n-1),\ \alpha_k(n)\,(1+\beta_n)-\beta_n\right)$ существует такое $b>1$, что $\alpha_k^b(n)=x$, а в этой точке из формулы (6) следует равенство

$$\left|Z'_{n,b}(x)\right| = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{\rho(x)},$$

из которого вследствие (8) вытекает неравенство (4). Если же $x=\alpha_k(n-1)$, то неравенство (4) непосредственно следует из равенства $\left|T'_{n-1}\left(\alpha_k(n-1)\right)\right|=(n-$ $-1)\,/\sqrt{1-\alpha_k(n-1)^2}$. Четность функции $M_n(x)$ (см. (3)) завершает доказательство теоремы.

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории аппроксимации. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 303 с.
2. *Bojanov B. D.* Markov-type inequalities for polynomials and splines // Approxim. Theory X: Abstract and Classical Anaysis. – Vanderbilt Univ. Press, 2002. – P. 31 – 90.
3. *Марков В. А.* О функціяхъ, наименѣ уклоняющихся отъ нуля въ данном промежуткѣ. – Санкт Петербургъ, 1892.
4. *Avvakumova L. S.* Comparison of integral functionals depending on the second derivative of Chebyshev and Zolotarev polynomials // East J. Approxim. – 1999. – **5**, № 2. – P. 151 – 182.
5. *Золотарев Е. И.* Полное собрание сочинений. Т. 2. – Л.: Изд-во АН СССР, 1932. – Т. 2. – 364 с.

Получено 29.09.08