УДК 517.9

В. В. Федоренко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ ИНТЕРВАЛА*

We consider the dynamical systems generated by continuous maps of the interval I to itself. We prove that the trajectory of the interval $J \subset I$ is asymptotically periodic if and only if J contains an asymptotically periodic point.

Розглядаються динамічні системи, що породжені неперервними відображеннями інтервалу I в себе. Доведено, що траєкторія інтервалу $J \subset I$ є асимптотично періодичною тоді і тільки тоді, коли J містить асимптотично періодичну точку.

В работе, в отличие от классической топологической динамики, исследуется асимптотическое поведение траекторий не отдельных точек, а траекторий подмножеств фазового пространства динамической системы. Поведение траекторий множеств может существенно отличаться от поведения траекторий точек и для многих классов динамических систем является более простым, чем поведение траекторий точек. Например, траектории точек одностороннего сдвига Бернулли имеют широкий спектр асимптотического поведения — это периодические траектории сколь угодно большого периода, гомоклинические траектории, всюду плотные в фазовом пространстве траектории и т. д., в то время как все элементы, начиная с некоторого, траектории любой окрестности каждой точки фазового пространства совпадают со всем фазовым пространством. Необходимость исследования траекторий множеств естественно возникает в различных задачах, в частности, при исследовании асимптотического поведения решений разностных уравнений с непрерывным временем и некоторых классов краевых задач для уравнений в частных производных [1, 2].

Пусть $I = [0,1]$ и $f \in C^0(I, I)$. Пусть также $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, f^0 — тождественное отображение. Последовательность $f^n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — траектория точки $x \in I$. Аналогично, траекторией замкнутого интервала $J \subset I$ будем называть последовательность множеств $f^n(J)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В работе исследуется асимптотическое поведение траектории $f^n(J)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В силу непрерывности f элементы траектории $f^n(J)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — замкнутые интервалы (возможно, вырожденные, т. е. точки), которые обозначим $f^n(J) = [a_n, b_n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Исследование асимптотического поведения траектории интервала J сводится к изучению предельного поведения последовательностей a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и b_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при $n \to \infty$.

Определение 1. *Траекторию $f^n(J) = [a_n, b_n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, интервала J будем называть сходящейся, если каждая из последовательностей a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и b_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при $n \to \infty$ является сходящейся. Пределом сходящейся траектории интервала J будем называть интервал $[a_\infty, b_\infty]$, где $a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_n$ и $b_\infty = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Это определение сходимости траектории интервала эквивалентно определению сходимости последовательности множеств, т. е. существованию ее топологического предела, определение которого приведено, например, в [3, 4].

Ниже используются следующие понятия и обозначения:

---

* Поддержана Научной программой Национальной академии наук Украины (проект № 0107U002333).

$\mathrm{Fix} f = \{x \in I \mid f(x) = x\}$ — множество неподвижных точек;

$\mathrm{Per} f = \bigcup_{n \ge 0} \mathrm{Fix}\, f^n$ — множество периодических точек.

Периодом точки $x \in \mathrm{Per} f$ называется наименьшее натуральное p такое, что $x \in \mathrm{Fix} f^p$; $\omega(x) = \bigcap_{n \ge 0} \overline{\bigcup_{k \ge n} f^k(x)}$ — ω-предельное множество точки $x \in I$.

Из сходимости траектории любой точки из I (т. е. из того, что любое ω-предельное множество — неподвижная точка) следует сходимость траектории любого (открытого, полуоткрытого, замкнутого, вырожденного) интервала из I [5, 6]. Отметим также, что класс непрерывных отображений, траектория каждой точки которого сходится, достаточно полно исследован; известно много критериев принадлежности отображения этому классу, использующих различные понятия топологической динамики [7, 8].

С другой стороны, если траектория любого невырожденного интервала сходится, то отсюда не следует сходимость траектории любой точки (примером такого отображения может служить односторонний сдвиг Бернулли). Если отображение имеет траектории интервала, которые не являются сходящимися, то естественно выяснить условия на интервал, гарантирующие сходимость его траектории. Одно из таких условий связано с наличием на интервале прообраза периодической точки [9]. Точные формулировки свойств упомянутых выше утверждений приведены ниже.

Теорема А [5, 6]. *Пусть* $f \in C^0(I, I)$. *Если траектория любой точки сходится* (*т. е.* ω*-предельное множество любой точки есть неподвижная точка*), *то траектория любого подынтервала сходится.*

Теорема Б [9]. *Пусть* $f \in C^0(I, I)$. *Если интервал* J *содержит прообраз периодической точки периода* p *отображения* f, *то при отображении* f^{2p} *траектория интервала* J *сходится.*

Заметим, что в [10] приведено другое (не использующее явно периодические точки) достаточное условие сходимости траектории интервала, а именно, наличие на интервале неустойчивой по Ляпунову точки.

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы, обобщающей теоремы А и Б. Для формулировки необходимо еще одно определение.

Определение 2. *Траекторию интервала* J (*возможно, вырожденного*) *назовем асимптотически периодической, если существует натуральное* p *такое, что при отображении* f^p *траектория* $f^{pi}(J)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, *сходится, а наименьшее* p, *при котором это свойство выполняется, назовем периодом асимптотически периодической траектории.*

Теорема. *Пусть* $f \in C^0(I, I)$. *Траектория интервала* J *из* I *является асимптотически периодической тогда и только тогда, когда* J *содержит асимптотически периодическую точку. При этом если период асимптотически периодической точки, принадлежащей* J, *равен* p, *то период асимптотически периодической траектории интервала является делителем числа* $2p$.

Для доказательства теоремы необходимы следующие очевидные свойства асимптотически периодических траекторий.

***Свойство* 1.** Если траектория интервала при отображении $g = f^k$ является асимптотически периодической при некотором натуральном k, то траектория этого интервала при отображении $h = f^l$ асимптотически периодическая при каждом натуральном l.

***Свойство* 2.** Если последовательность $f^{pi}(J)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, сходится при некотором $p > 1$, то последовательность $f^{pi+m}(J)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, сходится при любом $m \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

Это свойство является следствием непрерывности отображения f.

***Свойство* 3.** Если траектория $f^n(J) = [a_n, b_n]$, $i = 0, 1, 2, \dots$, интервала J является сходящейся, то ее предел $[a_\infty, b_\infty]$ является инвариантным интервалом, т. е. $f([a_\infty, b_\infty]) = [a_\infty, b_\infty]$.

Ниже доказываются четыре леммы, из которых следует теорема.

Лемма 1. *Если траектория интервала сходится к невырожденному интервалу, то существует элемент этой траектории, содержащий неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть траектория $f^n(J)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, интервала J сходится к интервалу $J_\infty = [a_\infty, b_\infty]$ и при этом $a_\infty \neq b_\infty$. Поскольку J_∞ — инвариантный интервал, то он содержит неподвижную точку отображения f.

Возможны только два случая:

1) $\operatorname{Fix}(f) \bigcap (a_\infty, b_\infty) \neq \varnothing$, 2) $\operatorname{Fix}(f) \bigcap (a_\infty, b_\infty) = \varnothing$.

Расссмотрим каждый из них.

В первом случае неподвижную точку множества $\operatorname{Fix}(f) \bigcap (a_\infty, b_\infty)$ обозначим через α. Поскольку $a_\infty < \alpha < b_\infty$, существуют открытые непересекающиеся окрестности этих точек, которые обозначим $U(a_\infty)$, $U(\alpha)$ и $U(b_\infty)$ соответственно. Поскольку траектория $f^n(J) = [a_n, b_n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, сходится к интервалу $J_\infty = [a_\infty, b_\infty]$, т. е. $a_n \to a_\infty$ и $b_n \to b_\infty$ при $n \to \infty$, существуют n_1 и n_2 такие, что $a_n \in U(a_\infty)$ при $n > n_1$ и $b_n \in U(b_\infty)$ при $n > n_2$. Отсюда следует, что $\alpha \in f^n(J)$ при любом $n > \max\{n_1, n_2\}$.

Пусть теперь $\operatorname{Fix}(f) \bigcap (a_\infty, b_\infty) = \varnothing$. В этом случае a_∞ и b_∞ — неподвижные точки отображения f. Возможны только два случая: 1) $f(x) > x$ при $x \in (a_\infty, b_\infty)$, 2) $f(x) < x$ при $x \in (a_\infty, b_\infty)$. Рассмотрим только первый из них, так как доказательство леммы во втором аналогично.

Поскольку $a_n \to a_\infty$ при $n \to \infty$, существует n_3 такое, что $a_n < b_\infty$ при любом $n \geq n_3$. Если существует $n_4 \geq n_3$ такое, что $a_{n_4} = a_\infty$, то $f^{n_4}(J)$ содержит неподвижную точку a_∞.

Если существует $n_5 \geq n_3$ такое, что $a_{n_5} > a_\infty$, то $b_{n_5} > b_\infty$ и $f^{n_5}(J)$ содержит неподвижную точку b_∞. Действительно, если предположить, что $b_{n_5} < b_\infty$, то, так как $f(x) > x$ при $x \in (a_\infty, b_\infty)$, расссматриваемая траектория сходится к точке b_∞, что невозможно в силу невырожденности предельного интервала.

Остается последняя возможность взаимного расположения точек a_n, $n \geq n_3$, и a_∞: $a_n < a_\infty$ при любом $n \geq n_3$. В этом случае, поскольку $b_n \to b_\infty$ при $n \to \infty$, существует $n_6 \geq n_3$ такое, что $b_{n_6} > a_\infty$ и, следовательно, $f^{n_6}(J)$ содержит неподвижную точку a_∞.

Лемма 2. *Если траектория интервала сходится, то этот интервал содержит асимптотически неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть траектория $f^n(J)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, интервала J сходится к интервалу $[a_\infty, b_\infty]$. Если $a_\infty \neq b_\infty$, то из леммы 1 следует, что существует n_0 такое, что $f^{n_0}(J)$ содержит неподвижную точку α. Поэтому J содержит асимптотически неподвижную точку β такую, что $f^{n_0}(\beta) = \alpha$. Если же $a_\infty = b_\infty$, то из определения сходимости траектории интервала следует, что любая точка интервала J является асимптотически неподвижной.

Лемма 3. *Если* $f^k(J) \bigcap f^{k+l}(J) \neq \varnothing$ *при некоторых* $k \geq 0$ *и* $l > 0$, *то траектория интервала* J *асимптотически периодическая.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $g = f^l$. В силу свойства 1 асимптотически периодических траекторий для доказательства леммы 3 достаточно доказать, что траектория интервала J при отображении g асимптотически периодическая. Кроме того, асимптотическая периодичность траектории интервала J при отображении g эквивалентна асимптотической периодичности траектории интервала $g^k(J)$ при отображении g при любом $k \geq 0$. Поэтому достаточно доказать утверждение: если $J \bigcap g(J) \neq \varnothing$, то траектория интервала J асимптотически периодическая.

Действительно, если J содержит неподвижную точку, то из теоремы Б следует, что траектория интервала J при отображении g^2 сходится, т. е. является асимптотически периодической.

Пусть теперь J не содержит неподвижных точек. Отсюда следует, что 1) $g(x) > x$ при $x \in J$ либо 2) $g(x) < x$ при $x \in J$. Рассмотрим только первый случай (доказательство леммы во втором случае аналогично). Если интервал $g(J)$ содержит неподвижную точку, то по теореме Б траектория интервала J асимптотически периодическая.

Пусть $g(J)$ не содержит неподвижных точек. В этом случае, поскольку $J \bigcap g(J) \neq \varnothing$, множество $J \bigcup g(J)$ является замкнутым интервалом и при этом $(x) > x$ для $x \in J \bigcup g(J)$.

Продолжая эти рассуждения, получаем только две возможности: 1) существует n_0 такое, что $g^{n_0}(J)$ содержит неподвижную точку, 2) $\bigcup_{i \geq 0} g^i(J)$ — интервал и $g(x) > x$ для $x \in \bigcup_{i \geq 0} g^i(J)$. В первом случае асимптотическая периодичность траектории интервала J следует из теоремы Б, во втором случае траектория интервала J сходится к правому концу интервала $\overline{\bigcup_{i \geq 0} g^i(J)}$.

Лемма 4. *Если интервал содержит асимптотически неподвижную точку, а все элементы траектории этого интервала попарно не пересекаются, то траектория интервала сходится к этой неподвижной точке.*

Доказательство. Пусть интервал J содержит точку x, траектория которой сходится к неподвижной точке α. Это означает, что для любой открытой окрестности U точки x существует N такое, что $f^n(x) \in U$ при всех $n > N$.

Если $f^n(J) \in U$ при всех $n > N$, то точки a_n и b_n, которые являются концами интервала $f^n(J)$, принадлежат окрестности U при всех $n > N$. Это свойство означает, что последовательности a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и b_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходятся к точке α при $n \to \infty$. Поэтому в этом случае лемма 4 справедлива.

Если $f^n(J) \in U$ при всех $n > N$, кроме конечного числа элементов множества $n+1$, $n+2, \ldots$, то существует $n_1 > n$ такое, что $f^n(J) \in U$ при всех $n > n_1$, и доказательство сводится к предыдущему случаю.

Для завершения доказательства леммы 4 докажем невозможность существования бесконечной возрастающей последовательности чисел n_i, $i = 2, 3, \ldots$, такой, что $n_2 > N$ и $f^{n_i}(J) \notin U$ при всех $i \geq 2$. Предположим, что это возможно, т. е. существует либо бесконечная последовательность $a_{n_i} \notin U$, $i \geq 2$, либо бесконечная последовательность $b_{n_i} \notin U$, $i \geq 2$. Обозначим $\overline{U} = [a_U, b_U]$. Не умаляя общности, можно считать, что $a_{n_2} < a_U$ и $a_{n_3} < a_U$. При этом, в силу выбора окрестности U, имеем $f^{n_2}(x) \in U$ и $f^{n_3}(x) \in U$. Следовательно, $a_{n_2} < a_U < f^{n_2}(x)$ и $a_{n_3} < a_U < f^{n_3}(x)$. Эти неравенства означают, что $a_U \in$ $\in f^{n_2}(J) \bigcap f^{n_3}(J)$, т. е. существуют пересекающиеся элементы траектории интервала J. Пришли к противоречию.

Доказательство теоремы. Пусть траектория интервала J является асимптотически периодической периода p при отображении f. Тогда при отображении $g = f^p$ траектория интервала J является сходящейся. Из леммы 2 следует, что J содержит асимптотически неподвижную точку при отображении g, которая, в свою очередь, является асимптотически периодической при отображении f.

Обратное утверждение. Пусть интервал J содержит асимптотически периодическую точку периода p при отображении f. Если существуют пересекающиеся элементы этой траектории, то из леммы 3 следует, что траектория этого интервала асимптотически периодическая. Пусть теперь элементы траектории интервала J попарно не пересекаются. При отображении $g = f^p$ интервал J содержит асимптотически неподвижную точку. В этом случае из леммы 4 следует, что траектория интервала сходится к этой неподвижной точке. Поэтому из свойства 1 следует, что траектория интервала J является асимптотически периодической при отображении f.

Из теоремы Б вытекает, что период асимптотически периодической траектории интервала J равен делителю числа $2p$.

Теорема доказана.

1. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с. (Перевод: *Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu.* Difference equations and their applications. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 358 p.)
2. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Difference equations and dynamical systems generated by some classes of boundary value problems // Proc. Steklov Inst. Math. – 2004. – **244**. – P. 264 – 279.
3. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. – М.; Л.: ОНТИ НКТИ СССР, 1937. – 304 с.
4. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
5. *Федоренко В. В.* Топологический предел траекторий интервала простейших одномерных динамических систем // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 425 – 430.
6. *Fedorenko V. V.* Topological limit of trajectories of intervals of one-dimensional dynamical systems // Iteration Theory (ECIT'02) / Eds J. Sousa Ramos, D. Gronau, C. Mira, L. Reich, A. N. Sharkovsky (Grazer Math. Ber., Bericht Nr.). – 2004. – **346**. – P. 107 – 111.
7. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. – Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с. (Перевод: *Sharkovsky A. N., Kolyada S. F., Sivak A. G., Vedorenko V. V.* Dynamics of one-dimensional maps. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 272 p.)
8. *Block L. S., Coppel W. A.* Dynamics in one dimension. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1992. – 249 p.
9. *Федоренко В. В.* Асимптотика траектории интервала содержащего прообраз периодической точки // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 1. – С. 130 – 133.
10. *Романенко Е. Ю.* Динамика окрестностей точек при непрерывном отображении интервала // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 11. – С. 534 – 547.

Получено 05.03.08