УДК 512. 534

В. В. Дорошенко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО НАПІВГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЗЛІЧЕННИХ ЛІНІЙНО УПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ ПОРЯДОК

Semigroups of endomorphisms of linearly ordered sets $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Z}$ and their subsemigroups of cofinite endomorphisms are considered. The Green's relations, automorphism groups, conjugacy, centralizers of elements, growth, and free subsemigroups in these semigroups are investigated.

Рассматриваются полугруппы эндоморфизмов линейно упорядоченных множеств $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$, а также их подполугруппы коконечных эндоморфизмов. Исследуются отношения Грина, группы автоморфизмов, сопряженность, централизаторы элементов, рост, свободные подполугруппы в этих полугруппах.

1. Вступ. Напівгрупи перетворень, які зберігають порядок, є об'єктом досліджень протягом останніх років. Зокрема, в роботах [1 – 3] отримано цікаві результати комбінаторного характеру про напівгрупи частково визначених відображень, які зберігають порядок на скінченній лінійно впорядкованій множині. Проте випадок нескінченних лінійно впорядкованих множин є малодослідженим.

У даній роботі будемо розглядати напівгрупи всіх тих перетворень множин цілих і натуральних чисел, які зберігають природний порядок на них, а також їх піднапівгрупи коскінченних перетворень (тобто перетворень, при яких доповнення до образу є скінченною множиною).

Опишемо коротко будову статті. У п. 2 наведено основні означення, визначено напівгрупи перетворень $O(\mathbb{N})$ і $O(\mathbb{Z})$, а також їх піднапівгрупи коскінченних функцій $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ і $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$. Крім того, наведено твердження з роботи [4] про задання цих напівгруп у термінах твірних та визначальних співвідношень, що будуть використовуватись у наступних пунктах. У п. 3 розглянуто напівгрупові властивості цих напівгруп: існування ідемпотентів, регулярність, скоротність, резидуальну скінченність. У п. 4 описано відношення Гріна. Пункт 5 присвячено групам автоморфізмів. Доведено, що в $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ і $O(\mathbb{N})$ групи автоморфізмів складаються лише з тотожного відображення, а групи автоморфізмів $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$ і $O(\mathbb{Z})$ ізоморфні напівгрупі цілих чисел з операцією додавання і складаються лише з внутрішніх автоморфізмів. Пункт 6 присвячено характеризації спряженості у напівгрупі $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. У п. 7 з точністю до ізоморфізму описано централізатори у напівгрупі $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Доведено, що централізатор довільного елемента напівгрупи $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ є ізоморфним піднапівгрупі адитивної напівгрупи натуральних чисел. Показано, що кожна комутативна піднапівгрупа напівгрупи $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ ізоморфна піднапівгрупі адитивної напівгрупи натуральних чисел. У п. 8 доведено, що всі скінченнопороджені піднапівгрупи $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ мають поліноміальний ріст, а тому напівгрупи $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ не містять вільних некомутативних піднапівгруп. Доведено, що напівгрупа $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$ має експоненціальний ріст. Також наведено приклад вільної некомутативної піднапівгрупи в $O(\mathbb{N})$.

Всі необхідні означення з теорії напівгруп, які не наведено у цій роботі, можна знайти, наприклад, у [5].

2. Основні означення і допоміжні відомості. Нехай $(M, <)$ — лінійно впорядкована множина. Позначимо символом $O(M)$ множину всіх перетворень, які зберігають порядок $<$, тобто таких перетворень $f: M \mapsto M$, що для довільних $x, y \in M$ з нерівності $x < y$ випливає $f(x) < f(y)$. Тоді $O(M)$ є піднапівгрупою повної напівгрупи перетворень $T(M)$ множини M, яка складається з усіх строго зростаючих функцій. Назвемо перетворення $f \in O(M)$ коскінченним, якщо множина $M \setminus f(M)$ є скінченною. Позначимо через $O_{\text{fin}}(M)$ множину всіх коскінченних перетворень з $O(M)$. Легко бачити, що $O_{\text{fin}}(M)$ є піднапівгрупою $O(M)$. Тотожне відображення id буде одиницею обох цих напівгруп.

Позначимо через $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ множини всіх невід'ємних цілих чисел і цілих чисел відповідно, з природно визначеними відношеннями лінійних порядків на них. Далі під символом M розуміємо $\mathbb{N}$ або $\mathbb{Z}$. Кожне перетворення $f \in O(\mathbb{N})$ довизначимо у точці 0, поклавши $f(0) = 0$.

Для $f \in O(M)$ та $n \in M$ позначимо $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) - 1$. Оскільки f — строго зростаюча функція, то $\Delta f(n) \geq 0$. Назвемо число $\Delta f(n)$ висотою стрибка функції f у точці n. Будемо говорити, що f має стрибок в n, якщо $\Delta f(n) > 0$. Зауважимо, що кожен елемент з $O(\mathbb{N})$ однозначно визначається точками своїх стрибків та їх висотами. Легко бачити, що для $f \in O(M)$ виконується $f \in O_{\text{fin}}(M)$ тоді і лише тоді, коли кількість стрибків f є скінченною.

Нехай $f \in O(M)$. Позначимо $|f| = |M \setminus f(M)|$. Зауважимо, що $|f| < \infty$ тоді і лише тоді, коли $f \in O_{\text{fin}}(M)$. Для $f \in O_{\text{fin}}(M)$ виконується $|f| = \sum_{n \in M} \Delta f(n)$.

Для напівгрупи з одиницею S символом S^* будемо позначати підгрупу оборотних елементів напівгрупи S.

Нагадаємо необхідні для подальшого результати, доведені в [4].

Твердження 1. *Нехай* $f, g \in O_{\text{fin}}(M)$, *тоді* $|fg| = |f| + |g|$.

Визначимо відношення $\preceq$ на $O(\mathbb{N})$. Для $f, g \in O(\mathbb{N})$ покладемо $f \preceq g$, якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується $f(n) \leq g(n)$.

Твердження 2. 1. *Відношення* $\preceq$ *є частковим порядком на* $O(\mathbb{N})$.

2. *Нехай* $f, g \in O(\mathbb{N})$. *Тоді* $f \preceq fg$ *і* $f \preceq gf$.

3. *Нехай* $f, g \in O(M)$. *Тоді з того, що* $fg = f$ *або* $gf = f$, *випливає* $g = \text{id}$.

Для кожного цілого k визначимо перетворення

$$e_k(n) = \begin{cases} n, & n \leq k, \\ n+1, & n > k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $e_k \in O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$, $k \in \mathbb{Z}$. Для кожного $k \geq 0$ будемо тим самим символом e_k позначати звуження e_k на множину цілих невід'ємних чисел. Отже, $e_k \in O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ при $k \geq 0$.

Теорема 1. *Множина* $\{e_k | k \geq 0\} \cup \{\text{id}\}$ *є єдиною незвідною системою твірних у напівгрупі* $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ *і*

$$\left\langle e_0, e_1, \ldots \middle| e_k e_l = e_{l+1} e_k, k \leq l \right\rangle$$

— *козображення напівгрупи* $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. *Кожен елемент* $e_k \in O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ *має єдину канонічну форму* $f = e_{n_1}^{t_1} e_{n_2}^{t_2} \ldots e_{n_k}^{t_k}$, $0 \leq n_1 < \ldots < n_k$, $t_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, $k \geq 1$. *При* *цьому* f *має стрибки у точках* $n_1, \ldots, n_k$ *з висотами* $t_1, \ldots, t_k$ *відповідно та не має стрибків у інших точках і* $|f| = t_1 + \ldots + t_k$.

Алгоритм зведення елементів $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ ***до канонічної форми.*** Нехай є елемент $w = e_{n_1} e_{n_2} \ldots e_{n_k} \in O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$. Будуємо послідовність слів $w_0, w_1, \ldots$.

1. Покладемо $w_0 = w$.
2. Нехай слово $w_m = e_{l_1} e_{l_2} \ldots e_{l_k}$ вже побудовано. Вибираємо найменше $1 \leq \leq i < k$ таке, що $e_{l_i} > e_{l_{i+1}}$. Якщо таке i не існує, то переходимо до п. 5.
3. Покладемо $w_{m+1} = e_{l_1} \ldots e_{l_i+1} e_{l_i-1} \ldots e_{l_k}$. Із визначальних співвідношень випливає, що w_m і w_{m+1} задають один і той самий елемент напівгрупи $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$.
4. Переходимо до п. 2.
5. Отримане слово w_m є канонічним.

Теорема 2. *Алгоритми зведення до канонічної форми в* $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ *завершуються за скінченну кількість кроків, і останнє слово буде канонічним.*

Нехай $\sigma_k(n) = n + k$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Група $O(\mathbb{Z})^* = \{\sigma_k, k \in \mathbb{Z}\}$ ізоморфна адитивній групі цілих чисел. Маємо $e_k = \sigma_k e_0 \sigma_{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3. *Множина* $\{\sigma_1, \sigma_{-1}, e_0\}$ *є незвідною системою твірних* $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z})$ *і*

$$\left\langle e_0, \sigma_1, \sigma_{-1} \middle| e_k e_l = e_{l+1} e_k, k \leq l, \sigma_1 \sigma_{-1} = 1, \sigma_{-1} \sigma_1 = 1 \right\rangle$$

— *козображення* $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z})$, *де* $e_k = \sigma_k e_0 \sigma_{-k}$. *Кожний елемент* $f \in O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z})$ *має єдину канонічну форму* $f = \sigma_h e_{n_1}^{t_1} e_{n_2}^{t_2} \ldots e_{n_k}^{t_k}$, $n_1 < \ldots < n_k$, $t_i \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, *до того ж якщо* $f = \sigma_h e_{n_1}^{t_1} e_{n_2}^{t_2} \ldots e_{n_k}^{t_k}$, $n_1 < \ldots < n_k$, $t_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, $k \geq 1$, *то* f *має стрибки у точках* $n_1, \ldots, n_k$ *з висотами* $t_1, \ldots, t_k$ *відповідно і не має стрибків у інших точках та* $|f| = t_1 + \ldots + t_k$.

3. Найпростіші властивості. Всі елементи напівгрупи $O(M)$ є ін'єкціями, а тому $O(M)$ — напівгрупа з лівими скороченнями. Легко бачити, що $O(M)$ не є напівгрупою з правими скороченнями. Наприклад, виберемо f так, що $f(n) = 2n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді $e_0 f = e_1 f$.

У напівгрупі $O(\mathbb{N})$ біекцією є тільки тотожне відображення, тому в цій напівгрупі існує єдиний оборотний елемент. У напівгрупі $O(\mathbb{Z})$ біекціями є лише σ_k, $k \in \mathbb{Z}$, тому групою оборотних елементів є $\{\sigma_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Припустимо, що $f \in O(M)$ — ідемпотент, тобто $f^2 = f$. Якщо існує $n \in M$ таке, що $f(n) \neq n$, то з ін'єктивності f випливає, що $f(f(n)) \neq f(n)$. Отже, $f = \mathrm{id}$. Як наслідок, напівгрупи $O(M)$ і $O_{\mathrm{fin}}(M)$ не є регулярними.

Нагадаємо, що напівгрупа S є резидуально скінченною, якщо для довільних a, $b \in S$, $a \neq b$, існують скінченна напівгрупа T і гомоморфізм напівгруп f: $S \to T$ такий, що $f(a) \neq f(b)$.

Твердження 3. *Напівгрупа* $O(\mathbb{N})$ *є резидуально скінченною.*

Доведення. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Визначимо у повній симетричній напівгрупі перетворень T_n піднапівгрупу W_n. А саме, елемент $f \in T_n$ належить W_n тоді і лише тоді, коли для довільних k, l таких, що $1 \leq k < l \leq n$, виконується $f(k) \leq f(l)$, і якщо $f(k) < n$, то $f(k) < f(l)$. Легко перевірити, що W_n є піднапівгрупою T_n.

Визначимо відображення $\rho_n : O(\mathbb{N}) \mapsto W_n$. Для довільного $f \in O(\mathbb{N})$ покладемо $\rho_n(f)(k) = \min(n, f(k))$, $1 \leq k \leq n$. Безпосередньо перевіряється, що

ρ_n — гомоморфізм напівгруп.

Нехай $f, g \in O(\mathbb{N})$, $f \neq g$. Тоді існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $f(n) \neq g(n)$. Позначимо $m = \max(f(n), g(n))$. Тоді $\rho_{m+1}(f)(n) = f(n) \neq g(n) = \rho_{m+1}(g)(n)$. Отже, $\rho_{m+1}(f) \neq \rho_{m+1}(g)$.

Твердження доведено.

Оскільки піднапівгрупа резидуально скінченної напівгрупи є резидуально скінченною, то звідси випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Напівгрупа* $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ *є резидуально скінченною.*

***Відкрите питання* 1.** Чи будуть напівгрупи $O(\mathbb{Z})$ і $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$ резидуально скінченними ?

4. Відношення Гріна. Нагадаємо означення відношень Гріна $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{J}$. Нехай S — напівгрупа з одиницею. Для довільних $a, b \in S$ покладемо $a\mathcal{L}b$ (відповідно $a\mathcal{R}b$), якщо $Sa = Sb$ (відповідно $aS = bS$), тобто головні ліві (відповідно праві) ідеали збігаються. Відношення $\mathcal{D}$ визначається як найменше відношення, що містить $\mathcal{L}$ і $\mathcal{R}$. Відомо, що $\mathcal{L}$ і $\mathcal{R}$ комутують, тому $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ (тут символ $\circ$ позначає добуток відношень). Відношення $\mathcal{H}$ визначається як $\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Нарешті, для $a, b \in S$ покладемо $a\mathcal{J}b$, якщо $SaS = SbS$, тобто головні двосторонні ідеали збігаються.

Нехай $a, b \in S$. Легко бачити, що $a\mathcal{L}b$ $(a\mathcal{R}b)$ тоді і тільки тоді, коли існують $c, d \in S$ такі, що $a = cb$, $b = da$ $(a = bc,\ b = ad)$. Аналогічно $a\mathcal{J}b$ тоді і тільки тоді, коли існують $c, d, e, f \in S$ такі, що $a = cbd$, $b = eaf$.

Теорема 4. *В* $O(\mathbb{N})$ *і* $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ *всі відношення Гріна є відношеннями рівності.*

***Доведення*.** Нехай $a, b \in O(\mathbb{N})$ такі, що $a\mathcal{J}b$. Тоді існують такі x_1, x_2, $y_1, y_2 \in O(\mathbb{N})$, що $a = x_1 b x_2$, $b = y_1 a y_2$. За твердженням 2 $a \preceq y_1 a \preceq y_1 a y_2 = b$ $\preceq \preceq x_1 b \preceq x_1 b x_2 = a$, отже, всі нерівності є рівностями, що за твердженням 2 можливо тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \mathrm{id}$, тому $a = b$.

Отже, відношення $\mathcal{J}$ — рівність, а оскільки $\mathcal{J}$ містить всі інші відношення Гріна, то в $O(\mathbb{N})$ всі відношення Гріна є відношеннями рівності. У свою чергу, оскільки $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ — підгрупа $O(\mathbb{N})$, то відношення Гріна в $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ також є відношеннями рівності.

Теорему доведено.

Теорема 5. *Нехай* $a, b \in O(\mathbb{Z})$ *або* $a, b \in O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$. *Тоді*:

1) $a\mathcal{L}b$ *тоді і тільки тоді, коли існує* $k \in \mathbb{Z}$ *таке, що* $a(n) = b(n) + k$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$;

2) $a\mathcal{R}b$ *тоді і тільки тоді, коли існує* $k \in \mathbb{Z}$ *таке, що* $a(n) = b(n + k)$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$.

***Доведення*.** Доведемо твердження для $O(\mathbb{Z})$ (для $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$ доведення проводиться аналогічно).

1. $a\mathcal{L}b$ тоді і тільки тоді, коли існують $x, y \in O(\mathbb{Z})$ такі, що $a = xb$, $b = ya$. Маємо $a = xya$, і за твердженням 2 $xy = \mathrm{id}$. Тому $x \in O(\mathbb{Z})^*$. Отже, існує $k \in \mathbb{Z}$ таке, що $x = \sigma_k$. Для всіх $n \in \mathbb{Z}$ маємо $a(n) = \sigma_k(b(n)) = b(n) + k$.

2. Доведення аналогічне доведенню п.1.

Теорема 6. 1. *Нехай* $a, b \in O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$. $a\mathcal{H}b$ *тоді і тільки тоді коли,* $a = b$ *або* $a, b \in O(\mathbb{Z})^*$.

2. *В* $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$ *відношення* $\mathcal{D}$ *і* $\mathcal{J}$ *збігаються і* $a\mathcal{D}b$ *тоді і тільки тоді, коли існують* $x, y \in O(\mathbb{Z})^*$ *такі, що* $a = xby$.

Доведення. 1. Нехай $a, b \in O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$, $a\mathcal{H}b$. За попередньою теоремою існують такі k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$, що для всіх $n \in \mathbb{Z}$ виконується $a(n) = b(n) + k_1$, $a(n) = b(n + k_2)$. Тоді для всіх $n \in \mathbb{Z}$ $b(n + k_2) - b(n) = k_1$. Звідси b має стрибок у n тоді і тільки тоді, коли b має стрибок у $n + k_2$. Оскільки множина стрибків b є обмеженою, то можливі два варіанти:

а) $k_2 = 0$, тоді $k_1 = 0$ і $a = b$;

б) b не має стрибків, тобто $b \in O(\mathbb{Z})^*$, тоді $a \in O(\mathbb{Z})^*$.

В інший бік. Якщо $a = b$, то $a\mathcal{H}b$. Якщо $a, b \in O(\mathbb{Z})^*$, то існують s, $t \in \mathbb{Z}$ такі, що $a = \sigma_s$, $b = \sigma_t$. Тоді $\sigma_s = \sigma_t\sigma_{s-t} = \sigma_{s-t}\sigma_t$. Тому за попередньою теоремою $\sigma_s \mathcal{L} \sigma_t$ і $\sigma_s \mathcal{R} \sigma_t$, звідки $\sigma_s \mathcal{H} \sigma_t$.

2. Нехай $a, b \in O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$.

Доведемо, що $a\mathcal{J}b$ тоді і тільки тоді, коли існують $x, y \in O(\mathbb{Z})^*$ такі, що $a = xby$.

Нехай $a\mathcal{J}b$. Тоді існують $x_1, x_2, y_1, y_2 \in O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$ такі, що $a = x_1 b y_1$, $b = x_2 a y_2$. Звідси $a = x_1 x_2 a y_2 y_1$. За твердженням 1 $|a| = |x_1| + |x_2| + |a| + |y_2| + |y_1|$. Отже, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in O(\mathbb{Z})^*$.

В інший бік. Нехай $a = xby$, $x, y \in O(\mathbb{Z})^*$. Тоді $b = x^{-1} a y^{-1}$. Отже, $a\mathcal{J}b$.

За визначенням відношень Гріна $\mathcal{D} \subset \mathcal{J}$.

Доведемо, що $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$. Нехай $a\mathcal{J}b$. Тоді існують $x, y \in O(\mathbb{Z})^*$ такі, що $a = xby$. Маємо $b\mathcal{L}xb$, $xb\mathcal{R}xby$, звідки $b\mathcal{D}xby$, $b\mathcal{D}a$, бо $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$.

Теорема 7. *Нехай* $a, b \in O(\mathbb{Z})$. *Тоді*:

1) $a\mathcal{H}b$ *тоді і тільки тоді, коли існують* $x, y \in O(\mathbb{Z})^*$ *такі, що* $a = xb$, $a = by$;

2) $a\mathcal{D}b$ *тоді і тільки тоді, коли існують* $x, y \in O(\mathbb{Z})^*$ *такі, що* $a = xby$.

Доведення. 1. Випливає з опису $\mathcal{L}$ і $\mathcal{R}$ і означення $\mathcal{H}$.

2. Випливає з теореми 5 і того, що $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$.

5. Групи автоморфізмів. Позначимо через $\mathrm{Aut}(S)$ групу автоморфізмів напівгрупи S. Нехай a, $b \in S$. Будемо говорити, що a — правий (лівий) дільник b, якщо існує $c \in S$ таке, що $b = ca$ $(b = ac)$.

Лема 1. *Нехай* $f \in O(M)$, $n \in M$, $k \in \mathbb{N}$. $\Delta f(n) \geq k$ *тоді і тільки тоді, коли* e_n^k *є правим дільником* f.

Доведення. Якщо e_n^k — правий дільник f, то існує $g \in O(\mathbb{N})$ таке, що $f = ge_n^k$. Тоді $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) - 1 = g(n + k + 1) - g(n) - 1 \geq k$. В інший бік. Якщо $\Delta f(n) \geq k$, то визначимо g за правилом

$$g(m) = \begin{cases} f(m), & m \leq n, \\ f(n) + m - n, & n < m \leq n + k, \\ f(m - k), & m > n + k. \end{cases}$$

Тоді $f = ge_n^k$ і, оскільки $\Delta f(n) \geq k$, $g \in O(\mathbb{N})$.

Лему доведено.

Теорема 8. *Групи автоморфізмів напівгруп* $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ *і* $O(\mathbb{N})$ *є тривіальними.*

Доведення. 1. Нехай $F \in \mathrm{Aut}(O_{\text{fin}}(\mathbb{N}))$. Єдиними нерозкладними неодиничними елементами $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ є $e_k, k \geq 0$. Тому F є підстановкою на множині $\{e_k, k \geq 0\}$. Із визначальних співвідношень для $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ випливає, що $e_k^2 =$

$= e_{k+1} e_k$. Перемножаючи функції, маємо $e_k^2 \neq e_l e_k$ при $l \neq k$, $l \neq k+1$. Тому якщо $F(e_k) = e_m$, $F(e_{k+1}) = e_n$, то $n = m+1$. Отже, існує n таке, що для всіх $k \geq 0$ маємо $F(e_k) = e_{n+k}$. А оскільки F — бієкція на множині $\{e_k, k \geq 0\}$, то $n = 0$. Отже, F діє тотожно на твірних, тобто F — тотожний автоморфізм.

2. Нехай $F \in \mathrm{Aut}(O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}))$. Як і в п.1, показуємо, що F є тотожним на $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$. Нехай $f \in O(\mathbb{N})$. Доведемо, що висоти стрибків у кожній точці функцій f і $F(f)$ однакові. Нехай $\Delta f(n) = k$. Тоді за лемою 1 e_n^k є правим дільником f. Оскільки F діє тотожно на e_n, $n \geq 0$, то e_n^k — правий дільник $F(f)$. За лемою 1 маємо нерівність $\Delta f(n) \leq \Delta F(f)(n)$. Оскільки F — ізоморфізм, то $\Delta F(f)(n) \leq \Delta f(n)$. Маємо $\Delta f(n) = \Delta F(f)(n)$, тому $F(f) = f$.

Теорему доведено.

Назвемо автоморфізм F напівгрупи S внутрішнім, якщо існує $a \in S^*$ таке, що для довільного $s \in S$ $F(s) = a^{-1}sa$.

Теорема 9. *Групи автоморфізмів напівгруп* $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z})$ *і* $O(\mathbb{Z})$ *ізоморфні нескінченній циклічній групі. При цьому довільний автоморфізм однієї з цих напівгруп є внутрішнім.*

Доведення. 1. Нехай $F \in \mathrm{Aut}(O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}))$. Аналогічно доведенню п. 1 теореми 8 отримуємо, що існує $n \in \mathbb{Z}$ таке, що $F(e_k) = e_{n+k}$. Автоморфізм F є автоморфізмом на групі оборотних елементів, а оскільки $O(\mathbb{Z})^*$ ізоморфна $(\mathbb{Z}, +)$, то $F(\sigma_k) = \sigma_k$, $k \in \mathbb{Z}$, або $F(\sigma_k) = \sigma_{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Якщо виконується друге, то $F(e_k) = F(\sigma_k e_0 \sigma_{-k}) = F(\sigma_k) F(e_0) F(\sigma_{-k}) = \sigma_{-k} e_n \sigma_k = e_{n-k} \neq e_{n+k}$, $k \neq 0$, що неможливо. Отже, $F(\sigma_k) = \sigma_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким чином, автоморфізм F діє на твірних, як внутрішній автоморфізм $f \to \sigma_n f \sigma_{-n}$, тому F є внутрішнім автоморфізмом $f \to \sigma_n f \sigma_{-n}$.

2. Нехай $F \in \mathrm{Aut}(O(\mathbb{Z}))$. Аналогічно п.1 отримуємо, що існує $n \in \mathbb{Z}$ таке, що $f \to \sigma_n f \sigma_{-n}$ для $f \in O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z})$. Нехай $f \in O(\mathbb{Z})$. Аналогічно доведенню п. 2 теореми 8 маємо $\Delta f(k) = \Delta F(f)(k+n)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тобто існує $m \in \mathbb{Z}$ таке, що $F(f)(k) = f(k-n) + m$. Доведемо, що $m = n$. Нехай $m > n$, $l = f(1) + m - n - 1 \geq$ $\geq f(1)$, тоді $l + n = f(1) - m - 1$. Маємо

$$\Delta F(e_l f)(n) = \Delta\big(e_{l+n} F(f)\big)(n) = e_{l+n}(F(f)(n+1)) - e_{l+n}(F(f)(n)) =$$
$$= e_{l+n}(f(1)+m) - e_{l+n}(f(0)+m) = f(1)+m+1 - (f(0)+m) = \Delta(e_l f)(0) + 1. \qquad (1)$$

Отже, $\Delta F(e_l f)(n) \neq \Delta(e_l f)(0)$. Отримали суперечність. Таким чином, $m \leq n$. Аналогічно $m \geq n$. Тоді $F(f) = \sigma_n f \sigma_{-n}$ для довільного $f \in O(\mathbb{Z})$.

Теорему доведено.

6. Спряженість. Нехай S — деяка напівгрупа. Елементи $a, b \in S$ називаються елементарно спряженими, якщо існують $u, v \in S$ такі, що $a = uv$, $b =$ $= vu$. Елементи $a, b \in S$ називаються спряженими, якщо існують елементи напівгрупи S $a_1 = a, a_2, \ldots, a_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, такі, що для всіх $1 \leq i \leq n-1$ a_i та a_{i+1} є елементарно спряженими. Якщо f, g спряжені, то будемо писати $f \sim g$.

Для $f \in O(\mathbb{N})$ позначимо через $l(f)$ мінімальне n таке, що $\Delta f(n) > 0$, тобто $l(f)$ є місцем першого стрибка.

Теорема 10. *Нехай* $f, g \in O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$. $f \sim g$ *тоді і тільки тоді, коли* $|f| = |g|$ *і* $l(f) = l(g)$.

Доведення. *Необхідність* достатньо довести для елементарної спряженості. Нехай $f = uv$, $g = vu$ для деяких $u, v \in O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Тоді $|f| = |uv| = |u| + |v| = |vu| = |g|$. Зауважимо, що $n \le l(f)$ тоді і лише тоді, коли $f(n) = n$. Нехай $n \le l(f)$. Тоді $n = f(n) = u(v(n)) \ge v(n) \ge n$, оскільки $u(n) \ge n$, $v(n) \ge n$, $n \in \mathbb{N}$. Тому $u(n) = v(n) = n$. Отже, $g(n) = v(u(n)) = v(n) = n$. Таким чином, $n \le l(g)$. Тому $l(f) = l(g)$.

Достатність. Нехай $f \in O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Розглянемо запис f у канонічній формі:

$$f = e_{n_1}^{t_1} e_{n_2}^{t_2} \ldots e_{n_k}^{t_k}, \quad n_1 < \ldots < n_k, \quad t_i \ge 1, \quad 1 \le i \le n.$$

Достатньо довести, що $f \sim e_{n_1}^{|f|}$.

Переходячи до елементарних спряжених і використовуючи визначальні співвідношення, отримуємо

$$e_{n_1}^{t_1} e_{n_2}^{t_2} \ldots e_{n_k}^{t_k} = e_{n_1} e_{n_1}^{t_1-1} e_{n_2}^{t_2} \ldots e_{n_k}^{t_k} \sim e_{n_1}^{t_1-1} e_{n_2}^{t_2} \ldots e_{n_k}^{t_k} e_{n_1} =$$
$$= e_{n_1}^{t_1-1} e_{n_2}^{t_2} \ldots e_{n_1} e_{n_k-1}^{t_k} = e_{n_1}^{t_1} e_{n_2-1}^{t_2} \ldots e_{n_k-1}^{t_k}.$$

Продовжуючи аналогічно, маємо

$$e_{n_1}^{t_1} e_{n_2-1}^{t_2} \ldots e_{n_k-1}^{t_k} \sim e_{n_1}^{t_1} e_{\max(n_2-2,n_1)}^{t_2} e_{n_3-2}^{t_3} \ldots e_{n_k-2}^{t_k} \sim \ldots \sim e_{n_1}^{|f|}.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що відношення елементарної спряженості не збігається з відношенням спряженості. Наприклад, $f = e_0 e_2 \sim e_0^2$. Але $f = e_0 e_2 = e_3 e_0$ — єдині нетривіальні розклади на множники, тому f є елементарно спряженим тільки до $e_2 e_0 = e_1 e_0 \ne e_0^2$ і $e_0 e_3 \ne e_0^2$.

Відкрите питання 2. *Як описуються відношення спряженості у напівгрупах* $O(\mathbb{N})$, $O(\mathbb{Z})$, $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$?

7. Централізатори. Централізатором елемента a напівгрупи S називається множина всіх елементів S, які комутують з ним. Зауважимо, що централізатор елемента $a \in S$ завжди є піднапівгрупою S. Позначимо цю піднапівгрупу через $C(a)$. Метою даного пункту є опис централізаторів елементів піднапівгрупи $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ з точністю до ізоморфізму.

Для $f \in O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, $f \ne \text{id}$, позначимо $l(f) = \min\{n | \Delta f(n) > 0\}$ і $r(f) = \max\{n | \Delta f(n) > 0\}$, тобто місця першого і останнього стрибків функції f відповідно.

Спочатку знайдемо умови, при яких елементи напівгрупи $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ комутують. Нехай f, $g \in O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. До теореми 11 будемо вважати f та g фіксованими.

Лема 2. *Якщо* $fg = gf$ *і* $f \ne \text{id}$, $g \ne \text{id}$, *то* $l(f) = l(g)$ *і* $r(f) = r(g)$.

Доведення. Доведемо, що $l(f) = l(g)$. Нехай $l(f) < l(g)$. Тоді $f(l(g)) > l(g)$, тому $fg(l(g)) = f(l(g)) < g(f(l(g)) = gf(l(g))$. Отже, $fg \ne gf$. Аналогічно розглядається випадок $l(f) > l(g)$.

Доведемо, що $r(f) = r(g)$. Нехай $r(f) < r(g)$. Тоді $f(r(g)) = |f| + r(g)$, $g(r(g)) = |g| - \Delta g(r(g)) + r(g)$. Маємо $gf(r(g)) = g(|f| + r(g)) = |f| + |g| + r(g)$, $fg(r(g)) = f(|g| - \Delta g(r(g)) + r(g)) = |f| + |g| - \Delta g(r(g)) + r(g)$. Отже, $fg \ne gf$. Аналогічно розглядається випадок $l(f) > l(g)$.

Лему доведено.

Отже, для опису централізатора елемента з точністю до ізоморфізму можна вважати, що $\Delta f(0) > 0$. Тоді $f = e_0^{\alpha_0} \ldots e_n^{\alpha_n}$ і $g = e_0^{\beta_0} \ldots e_n^{\beta_n}$, до того ж $\alpha_0 \alpha_n \beta_0 \beta_n \ne 0$. Для зручності будемо вважати, що $\alpha_k = \beta_k = 0$, $k > n$.

Для $k \ge 0$ позначимо $s_k = \alpha_0 + \ldots + \alpha_k$ і $t_k = \beta_0 + \ldots + \beta_k$.

Лема 3. *Елементи* f *і* g *комутують тоді і лише тоді, коли*

$$\beta_0 + \sum_{i=0}^{t_0} \alpha_i = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{s_0} \beta_i,$$

$$\beta_1 + \sum_{i=t_0+1}^{t_1+1} \alpha_i = \alpha_1 + \sum_{i=s_0+1}^{s_1+1} \beta_i, \tag{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\beta_n + \sum_{i=t_{n-1}+n}^{t_n+n} \alpha_i = \alpha_n + \sum_{i=s_{n-1}+n}^{s_n+n} \beta_i.$$

Доведення. Систему рівнянь (2) отримуємо, прирівнюючи степені e_k у канонічному записі слів fg і gf. Праві частини рівнянь — це степені твірних в fg, а ліві — в gf.

Лема 4. *Нехай* $fg = gf$. *Тоді для* $0 < i \leq n$ *виконується* $\beta_i \leq i|f|$.

Доведення. З першого рівняння (2) отримуємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{s_0} \beta_i \leq |f|, \tag{3}$$

а з інших — нерівність

$$\beta_k + |f| \geq \sum_{i=s_{k-1}+k}^{s_k+k} \beta_i, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{4}$$

Доведемо лему індукцією по i. Для $i = 1$ твердження випливає з нерівності (3). Нехай для $i < m$ лему доведено, доведемо її для m. Тоді або $m \leq s_0$, і з нерівності (3) маємо $\beta_m \leq \sum_{i=1}^{s_0} \beta_i \leq |f| < m|f|$, або існує єдине l таке, що $s_{l-1} + l \leq m \leq s_l + l$, до того ж $l < m$. Тоді з нерівностей (4) отримуємо $\beta_m \leq$ $\leq \sum_{i=s_{l-1}+l}^{s_l+l} \beta_i \leq \beta_l + |f| \leq l|f| + f \leq m|f|$.

Лему доведено.

Лема 5. *Існує* $L \in \mathbb{N}$ *таке, що для довільного* $l \geq n$ *існує єдиний* $h \in$ $\in C(f)$, *для якого* $\Delta h(0) = l$, *до того ж* $|h| = L + l$.

Доведення. Нехай $g = e_0^{\gamma_0} \dots e_n^{\gamma_n}$, де $\gamma_0 = l$. Оскільки $\gamma_0 \geq n$, то рівняння (2) набирають вигляду

$$|f| = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_0} \gamma_i,$$

$$\gamma_1 = \alpha_1 + \sum_{i=s_0+1}^{s_1+1} \gamma_i, \tag{5}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\gamma_n = \alpha_n + \sum_{i = s_{n-1}+n}^{s_n + n} \gamma_i .$$

Відомо, що $\gamma_k = 0$, $k > n$. Послідовно визначаємо $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_1$. А саме, γ_k визначаємо з рівняння $\gamma_k = \alpha_k + \sum_{i = s_{k-1}+k}^{s_k + k} \gamma_i$. Оскільки в сумі у лівій частині зустрічаються γ з більшими номерами, ніж k, то γ_k визначається однозначно. Отже, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ визначаються однозначно. Для сумісності системи залишилось довести, що виконується перше рівняння, а це випливає з того, що всі інші виконуються, а якщо додати всі рівняння, то в лівій і правій частинах буде $|f| + |h| - \gamma_0$. Оскільки γ_0 не входить до системи, то γ_0 може набувати довільного значення, більшого за n. Звідси при фіксованому першому стрибку існує лише один елемент централізатора. Покладаючи $L = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, маємо $|h| = L + l$.

Лему доведено.

Тепер можемо довести основну теорему цього пункту.

Теорема 11. *Нехай* $f \in O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$. *Тоді централізатор* $C(f)$ *ізоморфний піднапівгрупі* $(\mathbb{N}, +)$, *яка містить всі натуральні числа, починаючи з деякого, до того ж відображення* $f \mapsto |f|$ *є зануренням* $C(f)$ *у* $(\mathbb{N}, +)$.

Доведення. Гомоморфність відображення $f \mapsto |f|$ випливає з твердження 1.

Позначимо $N = n + \dfrac{n(n-1)}{2}|f|$. Якщо $g \in C(f)$ і $|g| > N$, то за лемою 4 $\Delta g(0) \ge n$. Нехай L взято з леми 5. Покладемо $K = \max\{N, L + n\}$. Тоді за лемою 5 для довільного $n \ge K$ існує єдине $g \in C(f)$ таке, що $|g| = n$. Нехай $h \in C(f)$ таке, що $|h| = K$.

Доведемо ін'єктивність. Нехай $g_1, g_2 \in C(f)$, $|g_1| = |g_2|$. Тоді $|hg_1| = |hg_2| > K$, отже, $hg_1 = hg_2$. Оскільки $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ — напівгрупа з лівим скороченням, то $g_1 = g_2$.

Теорему доведено.

Наслідок 2. *Всі комутативні піднапівгрупи напівгрупи* $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ *ізоморфні піднапівгрупам напівгрупи натуральних чисел з операцією додавання.*

Наслідок 3. *Відношення бути перестановочними є відношенням еквівалентності на* $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$.

Оскільки $\left\{e_0^k \mid k \ge 0\right\}$ утворює піднапівгрупу, ізоморфну $(\mathbb{N}, +)$, то для довільної піднапівгрупи адитивної напівгрупи натуральних чисел існує піднапівгрупа $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$, яка їй ізоморфна.

8. Ріст і вільні піднапівгрупи. Визначення поняття росту напівгрупи можна знайти, наприклад, у [6].

Теорема 12. *Всі скінченнопороджені піднапівгрупи напівгрупи* $O_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ *мають поліноміальний ріст.*

Доведення. Нехай $S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ — піднапівгрупа $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$. Позначимо через m максимальний номер твірних $\{e_k \mid k \geq 0\}$, які зустрічаються у канонічних розкладах $a_1, \ldots, a_n$. Тоді S є піднапівгрупою $\langle e_0, \ldots, e_m \rangle$. Оскільки при зведенні до канонічної форми номери твірних збігаються, то всі елементи, що зображуються через добуток k твірних, мають вигляд $e_0^{\alpha_0} \ldots e_k^{\alpha_k}$, де $\alpha_0 + \ldots + \alpha_m = k$. Позначимо через $\delta(k)$ їх кількість. Тоді $\delta(k) = C_{m+k}^{m}$ (кількість способів розкласти k предметів по $m+1$ корзині). Далі, $\gamma(l) = \sum_{k=0}^{l} \delta(k)$ — функція росту $\langle e_0, \ldots, e_m \rangle$. Доведемо індукцією по l, що $\gamma(l) = C_{m+l+1}^{m+1}$. При $l = 0$ $\gamma(0) = 1 = C_{m+1}^{m+1}$. Маємо $\gamma(l) = \gamma(l-1) + \delta(l) = C_{m+l}^{m+1} + C_{m+l}^{m} = C_{m+l+1}^{m+1}$.

Легко бачити, що $\gamma(l) = C_{m+l+1}^{m+1}$ є поліномом $(m+1)$-го степеня від l.

Теорему доведено.

Наслідок 4. *У напівгрупі* $O_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ *не існує вільних неабелевих піднапівгруп.*

Теорема 13. *Елементи* f_0, f_1 *напівгрупи* $O(M)$ *такі, що* $f_0(n) = 2n$, $f_1(n) = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, *породжують вільну піднапівгрупу рангу* 2.

Доведення. Розглянемо $g = f_{\alpha_1} \ldots f_{\alpha_m} \in O(\mathbb{N})$, де $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq n$. Легко перевірити, що $g(n) = l + 2^m n$, $n \in \mathbb{N}$, де $l = 2^{m-1}\alpha_m + \ldots + 2^0 \alpha_1$.

Позначимо символом F_2 вільну напівгрупу рангу 2 з базисом x_0, x_1. Нехай w_1, $w_2 \in F_2$ такі, що $w_1 = x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_s}$, $w_2 = x_{\beta_1} \ldots x_{\beta_t}$. Із викладеного вище випливає, що $w_1(f_0, f_1)(n) = 2^{s-1}\alpha_s + \ldots + 2^0\alpha_1 + 2^s n$ і $w_2(f_0, f_1)(n) = 2^{t-1}\beta_t + \ldots + 2^0\beta_1 + 2^t n$, $n \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $w_1(f_0, f_1) = w_2(f_0, f_1)$. Тоді $s = t$ і $\alpha_i = \beta_i$, $1 \leq i \leq s$, звідки $w_1 = w_2$. Отже, в напівгрупі, породженій f_0, f_1, виконуються тільки тривіальні співвідношення, тому вона є вільною.

Теорему доведено.

Теорема 14. *Напівгрупа* $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$ *має експоненціальний ріст.*

Доведення. Нехай $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — функція зростання $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$, що відповідає системі твірних $\{\sigma_1, \sigma_{-1}, e_0\}$. Розглянемо для $n \in \mathbb{N}$ множину слів

$$A_n = \left\{ e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{1, 2\} \right\}.$$

За теоремою 3 всі слова з A_n є канонічними формами деяких елементів $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$, тому вони задають різні елементи $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$.

Оцінимо довжину елементів $O_{\text{fin}}(\mathbb{Z})$, які задаються словами з A_n у базисі $\{\sigma_1, \sigma_{-1}, e_0\}$:

$$e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n} = \sigma_1 e_0^{\alpha_1} \sigma_{-1} \sigma_2 e_0^{\alpha_2} \sigma_{-2} \ldots \sigma_n e_0^{\alpha_n} \sigma_{-n} = \sigma_1 e_0^{\alpha_1} \sigma_1 e_0^{\alpha_2} \ldots \sigma_1 e_0^{\alpha_n} \sigma_{-n}.$$

Отже, довжина $e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n}$ у базисі $\{\sigma_1, \sigma_{-1}, e_0\}$ не перевищує $2n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 4n$.

Таким чином, $\gamma(4n) \geq |A_n| = 2^n$.

Теорему доведено.

1. *Xiuliang Y.* A classification of maximal subsemigroups of finite order-preserving transformation semigroups // Communs Algedra. – 2000.– **28** (3) . – P. 1503 – 1513.
2. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* On the structure of IO_n // Semigroup Forum. – 2003. – **66** (3). – P. 455 – 483.

3. *Laradji A., Umar A.* Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations // J. Algebra. – 2004. – **278** (1). – P. 342 – 359.
4. *Doroshenko V.* Generators and relations for the semigroups of increasing on $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Z}$ // Algebra and Discrete Math. – 2005. – **4**. – P. 1 – 15.
5. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. – М.: Мир, 1985. – 439 с.
6. *Олийнык А. С., Резников И. И., Сущанский В. И.* Полугруппы преобразований, задаваемых автоматами Мили над конечным алфавитом // Пр. ІІІ міжнар. алгебр. конф. в Україні (Суми, 2001). – Суми, 2003. – С. 80 – 99.

Одержано 08.02.08,
після доопрацювання — 16.03.09