УДК 517. 5

В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСИ

For any fixed interval $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, given $r \in \mathbf{N}$ and A_r, A_0, $p > 0$, we solve the extremal problem

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left| x^{(k)}(t) \right|^q dt \to \sup, \quad q \ge p, \quad k = 0, \quad q \ge 1, \quad 1 \le k \le r-1,$$

on the set of all functions $x \in L^r_\infty$ such that $\left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le A_r$, $L(x)_p \le A_0$, where

$$L(x)_p := \left\{ \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} : \ a, b \in \mathbf{R}, \ |x(t)| > 0, \ t \in (a, b) \right\}.$$

For the case of $p = \infty$, $k \ge 1$, this problem was earlier solved by B. Bojanov and N. Naidenov.

Для довільного фіксованого відрізка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ та заданих $r \in \mathbf{N}$, A_r, A_0, $p > 0$ розв'язано екстремальну задачу

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left| x^{(k)}(t) \right|^q dt \to \sup, \quad q \ge p, \quad k = 0, \quad q \ge 1, \quad 1 \le k \le r-1,$$

на множині всіх функцій $x \in L^r_\infty$ таких, що $\left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le A_r$, $L(x)_p \le A_0$, де

$$L(x)_p := \left\{ \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} : \ a, b \in \mathbf{R}, \ |x(t)| > 0, \ t \in (a, b) \right\}.$$

У випадку $p = \infty$, $k \ge 1$ ця задача була розв'язана раніше Б. Бояновим і Н. Найдьоновим.

1. Введение. Пусть G обозначает действительную ось $\mathbf{R}$ или конечный отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, всех измеримых функций $x : G \to \mathbf{R}$ таких, что $\| x \|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\| x \|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai} \sup\limits_{t \in G} |x(t)|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in \mathbf{N}$ и $p, s \in (0, \infty]$ обозначим через $L^r_{p,s}$ пространство всех функций $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, для которых $x^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, $x \in L_p(\mathbf{R})$ и $x^{(r)} \in L_s(\mathbf{R})$. Будем писать $\| x \|_p$ вместо $\| x \|_{L_p(\mathbf{R})}$ и L^r_∞ вместо $L^r_{\infty,\infty}$.

В настоящей статье изучаются некоторые модификации известной экстремальной задачи

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \to \sup, \quad 0 \le k \le r-1, \quad q \ge 1, \tag{1}$$

на множестве всех функций $x \in L^r_{p,s}$ таких, что

$$\left\| x^{(r)} \right\|_s \le A_r, \quad \| x \|_p \le A_0. \tag{2}$$

Известно (см., например, [1, с. 47]), что задача (1) эквивалентна нахождению точной константы C в неравенстве типа Колмогорова – Надя

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \leq C\|x\|_p^{\alpha}\left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\alpha}, \quad 0 \leq k \leq r-1, \tag{3}$$

для функций $x \in L^r_{p,s}$, где $\alpha = (r-k+1/q-1/s)/(r+1/p-1/s)$.

Лишь в нескольких случаях точная константа в неравенстве (3) известна для всех $r \in \mathbf{N}$. Подробное описание случаев, для которых известна точная константа в неравенстве (3), можно найти в работах [1 – 3].

Для произвольного отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ Б. Бояновым и Н. Найденовым [4] решена задача

$$\int_\alpha^\beta \Phi\left(\left|x^{(k)}(t)\right|\right)dt \to \sup, \quad 1 \leq k \leq r-1,$$

на множестве всех функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих (2) с $p = s = \infty$, где Φ — непрерывно дифференцируемая функция на $[0, \infty)$, положительная на $(0, \infty)$ такая, что $\Phi(t)/t$ не убывает и $\Phi(0) = 0$.

Будем рассматривать класс W непрерывных, неотрицательных и выпуклых функций Φ на $[0, \infty)$ таких, что $\Phi(0) = 0$. Для $p > 0$ положим

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R}, |x(t)| > 0, t \in (a, b)\right\}.$$

Функционалы такого типа изучались в работе [5]. Отметим, что $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$ и $L(x')_1 \leq 2\|x\|_\infty$.

В настоящей работе решены следующие модификации задачи Б. Боянова и Н. Найденова:

$$\int_\alpha^\beta \Phi\left(|x(t)|^p\right)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0,$$

и

$$\int_\alpha^\beta \Phi\left(\left|x^{(k)}(t)\right|\right)dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad 1 \leq k \leq r-1,$$

на классе всех функций $x \in L^r_\infty$, удовлетворяющих условиям

$$\left\|x^{(r)}\right\|_\infty \leq A_r, \qquad L(x)_p \leq A_0$$

вместо условий (2) с $s = p = \infty$.

2. Вспомогательные утверждения. Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим r-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$. Перестановку функции $|x|$, $x \in L_1[a, b]$, будем обозначать символом $r(x, t)$ (см., например, [6], § 1.3). Положим $r(x, t) = 0$ для $t \geq b - a$.

Заметим, что если функция $x \in L^r_\infty$ удовлетворяет условию $L(x)_p < \infty$ для некоторого $p > 0$ и $|x(t)| > 0$, $t \in (a, b)$, причем $a = -\infty$ или $b = +\infty$, то $x(t) \to 0$, если $t \to -\infty$ или $t \to +\infty$. В этом случае будем полагать $x(-\infty) = 0$ и $x(+\infty) = 0$.

Лемма 1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, A_r, $p > 0$, *а интервал* (a, b), $-\infty \le a < b \le \infty$, *и функция* $x \in L_\infty^r$ *таковы, что*

$$\left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le A_r, \qquad L(x)_p \le \infty,$$

$$x(a) = x(b) = 0, \quad |x(t)| > 0, \quad t \in (a, b).$$

Пусть также $\lambda > 0$ *удовлетворяет условию*

$$L(x)_p \le A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p. \tag{4}$$

Тогда для любой функции $\Phi \in W$ *и произвольного измеримого множества* $E \subset (a, b)$, $\mu E \le \pi/\lambda$, *выполнены неравенства*

$$\int_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le \int_0^{\pi/\lambda} \Phi\left(\left| A_r \varphi_{\lambda,r}(t) \right|^p\right) dt \tag{5}$$

и

$$\int_E \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le \int_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(\left| A_r \varphi_{\lambda,r}(t) \right|^p\right) dt, \quad \Theta = \frac{\mu E}{2}, \tag{6}$$

где m — *точка локального максимума сплайна* $\varphi_{\lambda,r}$.

Кроме того, если $-\infty < a < b < \infty$, *то*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\pi/\lambda} \Phi\left(\left| A_r \varphi_{\lambda,r}(t) \right|^p\right) dt. \tag{7}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L_\infty^r$ и интервал (a, b), удовлетворяющие условиям леммы 1. Сначала докажем неравенство

$$\|x\|_\infty \le A_r \left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_\infty. \tag{8}$$

Предположим, что (8) не выполнено. Тогда существует $\omega < \lambda$ такое, что

$$\|x\|_\infty = A_r \left\| \varphi_{\omega,r} \right\|_\infty. \tag{9}$$

Пусть $t_0 \in \mathbf{R}$ удовлетворяет условию

$$\left\| \varphi_{\omega,r} \right\|_\infty = \varphi_{\omega,r}(t_0) \tag{10}$$

и c — наибольший нуль сплайна $\varphi_{\omega,r}$ такой, что $c < t_0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется точка $t_\varepsilon \in (c, t_0)$, для которой $\varphi_{\omega,r}(t_\varepsilon) = \left\| \varphi_{\omega,r} \right\|_\infty - \varepsilon$. Положим $\delta := t_0 - t_\varepsilon$. Ясно, что $\delta \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ определим функцию $\psi_\varepsilon(t)$ на $[c, c + \pi/\omega]$ следующим образом:

$$\psi_\varepsilon(t) := \begin{cases} \varphi_{\omega,r}(t - \delta), & \text{если } t \in [\, c + \delta, t_0 \,], \\ \varphi_{\omega,r}(t + \delta), & \text{если } t \in [\, t_0, c + \pi/\omega - \delta \,], \\ 0, & \text{если } t \in [\, c, c + \delta \,] \cup [\, c + \pi/\omega - \delta, c + \pi/\omega \,]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\psi_\varepsilon(t_0) = \left\|\varphi_{\omega,r}\right\|_\infty - \varepsilon$ и $\psi_\varepsilon(t) \to \varphi_{\omega,r}(t)$, $t \in [c, c + \pi/\omega]$, при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $L(x)_p < \infty$, из (9) и (10) следует существование такого сдвига $x_\varepsilon(t) := x(t + \tau_\varepsilon)$, что $x'_\varepsilon(t_0) = 0$ и

$$|x_\varepsilon(t_0)| \ \geq \ A_r\left(\left\|\varphi_{\omega,r}\right\|_\infty - \varepsilon\right) \ = \ A_r\,\psi_\varepsilon(t_0). \tag{11}$$

Заметим, что функция x удовлетворяет в силу (9) условиям теоремы сравнения Колмогорова [7]. Согласно этой теореме из (11) следует неравенство

$$|x_\varepsilon(t)| \ \geq \ A_r\,\psi_\varepsilon(t), \quad t \in [\,c + \delta, c + \pi/\omega - \delta\,].$$

Значит,

$$L(x)_p \ = \ L(x_\varepsilon)_p \ \geq \ A_r\,\|\,\psi_\varepsilon\,\|_{L_p[\,c+\delta,\, c+\pi/\omega-\delta\,]}.$$

Устремляя ε к нулю, получаем

$$L(x)_p \ \geq \ A_r\,L(\varphi_{\omega,r})_p \ > \ A_r\,L(\varphi_{\lambda,r})_p,$$

что противоречит условию (4). Тем самым неравенство (8) доказано.

Докажем теперь неравенство (5). Обозначим через $\bar{x}$ сужение функции x на (a, b), а через $\bar{\varphi}$ сужение сплайна $A_r\,\varphi_{\lambda,r}$ на $[c, c + \pi/\lambda]$, где c — нуль сплайна $\varphi_{\lambda,r}$. В силу теоремы Харди – Литтлвуда (см., например, [6], утверждение 1.3.11) для доказательства (5) достаточно показать, что

$$\int\limits_0^\xi r\left(|\,\bar{x}\,|^p, t\right)dt \ \leq \ \int\limits_0^\xi r\left(\left|\overline{\varphi_{\lambda,r}}\right|^p, t\right)dt, \quad \xi > 0. \tag{12}$$

На основании (8) и условия $x(a) = x(b) = 0$ леммы 1 для любого $z \in \left(0, \|\,\bar{x}\,\|_{L_\infty(a,b)}\right)$ существуют точки $t_i \in (a, b), i = 1, \ldots, m, m \geq 2$, и две точки $y_j \in (c, c + \pi/\lambda)$ такие, что

$$z \ = \ |\bar{x}(t_i)| \ = \ \left|\bar{\varphi}(y_j)\right|. \tag{13}$$

По теореме сравнения Колмогорова

$$|\bar{x}'(t_i)| \ \leq \ \left|\bar{\varphi}'(y_j)\right|. \tag{14}$$

Поэтому если точки θ_1 и θ_2 выбраны так, что

$$z \ = \ r(\bar{x}, \theta_1) \ = \ r(\bar{\varphi}, \theta_2),$$

то согласно теореме о производной перестановки (см., например, [6], предложение 1.3.2)

$$|\,r'(\bar{x}, \theta_1)\,| \ = \ \left[\,\sum_{i=1}^{m} |\,\bar{x}'(t_i)\,|^{-1}\right]^{-1} \ \leq \ \left[\,\sum_{j=1}^{2} \left|\,\bar{\varphi}'(y_j)\,\right|^{-1}\right]^{-1} \ = \ |\,r'(\bar{\varphi}, \theta_2)\,|.$$

Отсюда следует, что разность $\Delta(t) := r(\bar{x}, t) - r(\bar{\varphi}, t)$ меняет знак не более одного раза (с – на +). То же самое верно и для разности $\Delta_p(t) := r^p(\bar{x}, t) - r^p(\bar{\varphi}, t)$.

Рассмотрим интеграл

$$I(\xi) \ := \int_0^{\xi} \Delta_p(t)\,dt.$$

Ясно, что $I(0) = 0$. Положим $M := \max\{b - a,\ \pi/\lambda\}$. Тогда вследствие (4) для любого $\xi \geq M$

$$I(\xi) \ = \ L(x)_p^p \ - \ A_r^p\, L(\varphi_{\lambda,r})_p^p \ \leq \ 0.$$

Кроме того, производная $I'(t) = \Delta_p(t)$ меняет знак не более одного раза (с $-$ на $+$). Следовательно, $I(\xi) \leq 0$ для всех $\xi \geq 0$. Таким образом, неравенства (12) и (5) доказаны.

Докажем теперь (6). Заметим, что $|\overline{\varphi}|$ является функцией сравнения для функции $|\overline{x}|$, т. е. из (13) следует (14). Доказательство (5) было основано именно на этом факте и на неравенстве (4). Поэтому, используя (5) вместо (4), такими же рассуждениями можно доказать неравенство

$$\int_0^{\xi} r\big(\Phi(|\overline{x}|^p, t)\big)\,dt \ \leq \ \int_0^{\xi} r\big(\Phi(|\overline{\varphi}|^p, t)\big)\,dt, \quad \xi > 0.$$

Отсюда следует оценка

$$\int_E \Phi\big(|x(t)|^p\big)\,dt \ \leq \ \int_0^{\mu E} r\big(\Phi(|\overline{x}|^p, t)\big)\,dt \ \leq \ \int_0^{\mu E} r\big(\Phi(|\overline{\varphi}|^p, t)\big)\,dt \ =$$

$$= \int_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)\,dt,$$

что и доказывает (6).

Осталось доказать (7). Пусть $-\infty < a < b < +\infty$. Выберем $d \in (a, b)$ так, что

$$\int_a^d \Phi\big(|x(t)|^p\big)\,dt \ = \ \int_d^b \Phi\big(|x(t)|^p\big)\,dt \ := \ I.$$

Тогда вследствие (5) существует $y \in [0, \pi/(2\lambda)]$, для которого

$$I \ = \int_c^{c+y} \Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)\,dt,$$

где c — нуль сплайна $\varphi_{\lambda,r}$. Отсюда в силу теоремы сравнения Колмогорова вытекают неравенства $d - a \geq y$, $b - d \geq y$. Следовательно,

$$\int_a^b \Phi\big(|x(t)|^p\big)\,dt \ = \ \int_a^d \Phi\big(|x(t)|^p\big)\,dt \ + \ \int_d^b \Phi\big(|x(t)|^p\big)\,dt \ \leq$$

$$\leq \ \frac{d-a}{y}\int_c^{c+y} \Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)\,dt \ + \ \frac{b-d}{y}\int_c^{c+y} \Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)\,dt \ =$$

$$= \ (b-a)\,\frac{1}{y}\int_c^{c+y} \Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)\,dt.$$

Нетрудно видеть, что функция

$$\frac{1}{y}\int\limits_{c}^{c+y}\Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)dt$$

не убывает на $[0, \pi/(2\lambda)]$. Поэтому

$$\int\limits_a^b\Phi\big(|x(t)|^p\big)dt \;\le\; (b-a)\,\frac{2\lambda}{\pi}\int\limits_{c}^{c+\pi/(2\lambda)}\Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)dt \;=$$

$$=\;(b-a)\,\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{c}^{c+\pi/\lambda}\Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)dt,$$

что эквивалентно (7).

Лемма 1 доказана.

Полагая $\Phi(t) = t^{q/p}$, $q \ge p$, получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *В условиях леммы* 1

$$L(x)_q \;\le\; A_r\,L(\varphi_{\lambda,r})_q, \quad q \ge p.$$

В частности,

$$\|x\|_\infty \;\le\; A_r\big\|\varphi_{\lambda,r}\big\|_\infty.$$

Лемма 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, A_r, $p > 0$. *Предположим*, *что функция* $x \in L_\infty^r$ *имеет нули и удовлетворяет условию*

$$\big\|x^{(r)}\big\|_\infty \;\le\; A_r, \quad L(x)_p < \infty,$$

а $\lambda > 0$ *выбрано так*, *что*

$$L(x)_p \;\le\; A_r\,L(\varphi_{\lambda,r})_p.$$

Если t_0 — *нуль функции* x, *а* c — *нуль сплайна* $\varphi_{\lambda,r}$, *то для произвольной функции* $\Phi \in W$ *и любого* $\xi \in (0, \pi/\lambda]$

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\xi}\Phi\big(|x(t)|^p\big)dt \;\le\; \int\limits_{c}^{c+\xi}\Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)dt \tag{15}$$

и

$$\int\limits_{t_0-\xi}^{t_0}\Phi\big(|x(t)|^p\big)dt \;\le\; \int\limits_{c-\xi}^{c}\Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)dt.$$

Доказательство. Переходя к сдвигу $x(\cdot\, + \,\tau)$, если нужно, можно считать, что $t_0 = c$.

Докажем (15) (второе неравенство леммы 2 доказывается аналогично). Положим $\overline{\varphi}(t) := A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)$. При доказательстве леммы 1 было установлено, что сплайн $\overline{\varphi}$ является функцией сравнения для функции x, т. е. из $|x(\xi)| = |\overline{\varphi}(\eta)|$ следует $|x'(\xi)| \le |\overline{\varphi}'(\eta)|$. Отсюда имеем $|x(t)| \le |\overline{\varphi}(t)|$, $t \in (c, c + \pi/(2\lambda))$. Если последнее неравенство выполнено для всех $t \in (c, c + \xi)$, то (15) очевидно. Поэтому можно предположить, что разность $\Delta(t) := |x(t)| -$

$-|\overline{\varphi}(t)|$ меняет знак на $(c, c+\xi)$. При этом она имеет не более одной перемены знака (с – на +) на $(c, c+\pi/\lambda)$, так как $\overline{\varphi}$ является функцией сравнения для x. Ясно, что то же самое справедливо для разности $\Delta_\Phi(t) := \Phi\big(|x(t)|^p\big) - \Phi\big(|\overline{\varphi}(t)|^p\big)$. Пусть точка $d \in (c, c+\pi/\lambda)$ такова, что $\Delta(t) \le 0,\ t \in (c, d)$, и $\Delta(t) \ge 0,\ t \in (d, c+\pi/\lambda)$. Тогда $\Delta_\Phi(t) \le 0, t \in (c, d)$, и $\Delta_\Phi(t) \ge 0, t \in (d, c+\pi/\lambda)$.

Рассмотрим два случая: 1) $|x(t)| > 0,\ t \in (c, c+\xi)$, 2) $x(t)$ имеет нуль на $(c, c+\xi)$. Положим $I_\Phi(t) := \int_c^{c+t} \Delta_\Phi(u)\,du$. Докажем неравенство $I_\Phi(t) \le 0,\ t \in (0, \pi/\lambda)$, которое эквивалентно (15).

Сначала предположим, что $|x(t)| > 0,\ t \in (c, c+\xi)$. Согласно предположению $d < c+\xi$. Поэтому $|x(t)| \ge |\overline{\varphi}(t)| > 0,\ t \in (d, c+\pi/\lambda)$, и, следовательно, $|x(t)| > 0, t \in (c, c+\pi/\lambda)$. Но тогда согласно неравенству (5) $I_\Phi(\pi/\lambda) \le 0$. Кроме того, $I_\Phi(0) = 0$ и производная $I'_\Phi(t) = \Delta_\Phi(c+t)$ меняет знак на $(0, \pi/\lambda)$ не более одного раза (с – на +). Таким образом, $I_\Phi(t) \le 0, t \in (0, \pi/\lambda)$.

Предположим теперь, что $x(t)$ имеет нуль на $(c, c+\xi)$. Положим $c_1 := \sup\{t \in (c, c+\pi/\lambda) : x(t) = 0\}$. Ясно, что $x(c_1) = 0$ и $|x(t)| \le |\overline{\varphi}(t)|$, $t \in (c, c_1)$. Следовательно,

$$\int_c^\gamma \Phi\big(|x(t)|^p\big)dt \;\le\; \int_c^\gamma \Phi\big(|\overline{\varphi}(t)|^p\big)dt, \quad \gamma \in [c, c_1]. \tag{16}$$

Если $c+\xi \le c_1$, то (15) следует из (16). Пусть теперь $c_1 < c+\xi$. Тогда $|x(t)| > 0,\ t \in (c_1, c+\pi/\lambda)$. В этом случае (15) уже доказано. Поэтому, полагая $t_0 := c_1$ и применяя (15) с $c+\xi-c_1$ вместо ξ, получаем

$$\int_{c_1}^{c+\xi} \Phi\big(|x(t)|^p\big)dt \;\le\; \int_c^{2c+\xi-c_1} \Phi\big(|\overline{\varphi}(t)|^p\big)dt \;\le\; \int_{c_1}^{c+\xi} \Phi\big(|\overline{\varphi}(t)|^p\big)dt. \tag{17}$$

Последнее неравенство следует из очевидного соотношения

$$\inf_{a \in (c, \pi/\lambda-\delta)} \int_a^{a+\delta} \Phi\big(|\overline{\varphi}(t)|^p\big)dt \;=\; \int_c^{c+\delta} \Phi\big(|\overline{\varphi}(t)|^p\big)dt, \quad \delta \le \frac{\pi}{\lambda}.$$

Складывая (17) и (16) с $\gamma = c_1$, получаем (15).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, A_r, $p > 0$ *и функция* $x \in L^r_\infty$ *таковы, что*

$$\|x^{(r)}\|_\infty \le A_r, \quad L(x)_p < \infty,$$

а $\lambda > 0$ *удовлетворяет условию*

$$L(x)_p \;\le\; A_r\, L(\varphi_{\lambda,r})_p.$$

Тогда для любой функции $\Phi \in W$ *и произвольного отрезка* $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $b - a \le \pi/\lambda$, *выполнено неравенство*

$$\int_a^b \Phi\big(|x(t)|^p\big)dt \;\le\; \int_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\Big(\big|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\big|^p\Big)dt, \quad \Theta = \frac{b-a}{2}, \tag{18}$$

где m — *точка локального максимума сплайна* $\varphi_{\lambda,r}$. *В частности,*

$$\int\limits_a^b \Phi\left(|x(t)|^p\right)dt \;\le\; \int\limits_0^{\pi/\lambda} \Phi\left(\left|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^p\right)dt.$$

Доказательство. Если $|x(t)| > 0$ для $t \in (a, b)$, то (18) следует из неравенства (6). Поэтому предположим, что $x(t)$ имеет нуль $t_0 \in (a, b)$. Тогда согласно лемме 2

$$\int\limits_a^{t_0} \Phi\left(|x(t)|^p\right)dt \;\le \int\limits_{c+\pi/\lambda-(t_0-a)}^{c+\pi/\lambda} \Phi\left(\left|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^p\right)dt \qquad (19)$$

и

$$\int\limits_{t_0}^{b} \Phi\left(|x(t)|^p\right)dt \;\le \int\limits_{c}^{c+b-t_0} \Phi\left(\left|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^p\right)dt, \qquad (20)$$

где c — нуль сплайна $\varphi_{\lambda,r}$. Складывая (19) и (20), получаем (18), так как

$$\sup_{\mu E=\delta}\int\limits_E \Phi\left(\left|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^p\right)dt \;=\; \int\limits_{m-\delta/2}^{m+\delta/2} \Phi\left(\left|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^p\right)dt, \quad \delta \le \frac{\pi}{\lambda}.$$

Лемма 3 доказана.

3. Основные результаты. Зафиксируем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{N}$ и A_r, A_0, $p > 0$. Напомним конструкцию экстремальной функции $\varphi_{[\alpha,\beta],r}$ в задаче Б. Боянова и Н. Найденова [4]. Для этого сначала выберем $\lambda > 0$, удовлетворяющее равенству

$$A_0 \;=\; A_r\,L(\varphi_{\lambda,r})_p, \qquad (21)$$

затем представим длину отрезка $[\alpha, \beta]$ в виде

$$\beta - \alpha \;=\; n\frac{\pi}{\lambda} + 2\Theta, \quad \Theta \in \left(0,\, \pi/(2\lambda)\right), \qquad (22)$$

где $n \in \mathbf{N}$ или $n = 0$. Теперь положим

$$\varphi_{[\alpha,\beta],r}(t) \;:=\; A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t+\tau), \qquad (23)$$

где τ выбрано так, что

$$\left|\varphi_{[\alpha,\beta],r}(\alpha+\Theta)\right| \;=\; \left|\varphi_{[\alpha,\beta],r}(\beta-\Theta)\right| \;=\; A_r\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty.$$

Ясно, что $\varphi_{[\alpha,\beta],r} \in L^r_\infty$ и

$$\left\|\varphi^{(r)}_{[\alpha,\beta],r}\right\|_\infty \;=\; A_r, \qquad L\left(\varphi_{[\alpha,\beta],r}\right)_p \;=\; A_0.$$

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, A_0, A_r, $p > 0$, $\Phi \in W$, $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. *Тогда*

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta \Phi\left(|x(t)|^p\right)dt : x \in L^r_\infty,\ \left\|x^{(r)}\right\|_\infty \le A_r,\ L(x)_p \le A_0\right\} \;=\; \int\limits_\alpha^\beta \Phi\left(\left|\varphi_{[\alpha,\beta],r}(t)\right|^p\right)dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L^r_\infty$ такую, что

$$\left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le A_r, \qquad L(x)_p \le A_0.$$

Согласно (21)

$$L(x)_p \le A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p.$$

Положим $a_k := \alpha + k\pi/\lambda$, $k = 0, 1, \ldots, n$. По лемме 3

$$\int_{a_k}^{a_k+1} \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le \int_0^{\pi/\lambda} \Phi\left(\left|A_r \varphi_{\lambda,r}(t)\right|^p\right) dt, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

и

$$\int_{a_n}^{\beta} \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le \int_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(\left|A_r \varphi_{\lambda,r}(t)\right|^p\right) dt,$$

где m — точка локального максимума сплайна $\varphi_{\lambda,r}$, а Θ определено в (22). Таким образом,

$$\int_\alpha^\beta \Phi\left(|x(t)|^p\right) dt \le n \int_0^{\pi/\lambda} \Phi\left(\left|A_r \varphi_{\lambda,r}(t)\right|^p\right) dt + \int_{m-\Theta}^{m+\Theta} \Phi\left(\left|A_r \varphi_{\lambda,r}(t)\right|^p\right) dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Phi\left(\left|\varphi_{[\alpha,\beta],r}(t)\right|^p\right) dt.$$

Равенство здесь достигается для $x = \varphi_{[\alpha,\beta],r}$.

Теорема 1 доказана.

Пусть $q \ge p$. Полагая $\Phi(t) = t^{q/p}$, получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** *В условиях теоремы* 1 *для любого* $q \ge p > 0$

$$\sup\left\{\int_\alpha^\beta |x(t)|^q\, dt : x \in L_\infty^r, \left\|x^{(r)}\right\|_\infty \le A_r, L(x)_p \le A_0\right\} = \int_\alpha^\beta \left|\varphi_{[\alpha,\beta],r}(t)\right|^q dt.$$

Для $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$, k, $r \in \mathbf{N}$, $k < r$, рассмотрим функцию

$$\varphi_{[\alpha,\beta],r,k}(t) := \varphi_{[\alpha,\beta],r}(t + \tau_k), \qquad \tau_k := \frac{\pi}{4\lambda}\left(1 + (-1)^{k+1}\right),$$

где $\varphi_{[\alpha,\beta],r}$ определена равенством (23). Ясно, что

$$\varphi_{[\alpha,\beta],r,k}^{(k)}(t) = \varphi_{[\alpha,\beta],r-k}(t).$$

Кроме того, $\varphi_{[\alpha,\beta],r,k} \in L_\infty^r$ и

$$\left\|\varphi_{[\alpha,\beta],r,k}^{(r)}\right\|_\infty = A_r, \qquad L\left(\varphi_{[\alpha,\beta],r,k}\right)_p = A_0.$$

Теорема 2. *Пусть* k, $r \in \mathbf{N}$, $k < r$, A_0, A_r, $p > 0$, $\Phi \in W$, $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$. *Тогда*

$$\sup\left\{\int_\alpha^\beta \Phi\left(\left|x^{(k)}(t)\right|\right) dt : x \in L_\infty^r, \left\|x^{(r)}\right\|_\infty \le A_r, L(x)_p \le A_0\right\} =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Phi\left(\left|\varphi_{[\alpha,\beta],r,k}^{(k)}(t)\right|\right) dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L^r_\infty$ такую, что

$$\left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le A_r, \qquad L(x)_p \le A_0.$$

Согласно (21)

$$L(x)_p \le A_r\, L(\varphi_{\lambda,r})_p$$

и на основании следствия 1

$$\| x \|_\infty \le A_r \left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_\infty.$$

Отсюда в силу теоремы Колмогорова следует неравенство

$$\left\| x^{(i)} \right\|_\infty \le A_r \left\| \varphi_{\lambda,r-i} \right\|_\infty, \quad i = 1, \ldots, r-1.$$

Следовательно,

$$L\left(x^{(k)}\right)_1 \le 2 \left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty \le 2 A_r \left\| \varphi_{\lambda,r+1-k} \right\|_\infty = A_r\, L(\varphi_{\lambda,r-k})_1.$$

Поэтому, применяя теорему 1 с $p = 1$ к функции $x^{(k)} \in L^{r-k}_\infty$, получаем

$$\int\limits_\alpha^\beta \Phi\left(\left| x^{(k)}(t) \right|^p \right) dt \le \int\limits_\alpha^\beta \Phi\left(\left| \varphi_{[\alpha,\beta],\, r-k}(t) \right|^p \right) dt = \int\limits_\alpha^\beta \Phi\left(\left| \varphi^{(k)}_{[\alpha,\beta],\, r,\, k}(t) \right|^p \right) dt.$$

Равенство здесь достигается для функции $x = \varphi_{[\alpha,\beta],r,k}$.

***Замечание* 1.** В случае $p = \infty$ теорема 2 была доказана Б. Бояновым и Н. Найденовым [4].

***Следствие* 3.** *В условиях теоремы* 2 *для любых* $q \ge 1$ *и* $p > 0$

$$\sup \left\{ \int\limits_\alpha^\beta \left| x^{(k)}(t) \right|^q dt : x \in L^r_\infty, \left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le A_r,\ L(x)_p \le A_0 \right\} = \int\limits_\alpha^\beta \left| \varphi^{(k)}_{[\alpha,\beta],\, r,\, k}(t) \right|^q dt.$$

Следующая теорема уточняет теоремы 1 и 2 для функций, имеющих нули, и для периодических функций.

Теорема 3. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $p > 0$, $\Phi \in W$. *Тогда для любого отрезка* $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ *и произвольной функции* $x \in L^r_\infty$ *такой, что* $L(x)_p < \infty$ *и* $x(\alpha) = x(\beta) = 0$, *выполнено неравенство*

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_\alpha^\beta \Phi\left(|x(t)|^p \right) dt \le \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \Phi\left(\left| \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^{\frac{r}{r+1/p}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{1/p}{r+1/p}} \varphi_r(t) \right|^p \right) dt. \tag{24}$$

В частности, для любого $q \ge p$

$$\left(\frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_\alpha^\beta |x(t)|^q\, dt \right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi |\varphi_r(t)|^q\, dt \right)^{1/q} \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^{\frac{r}{r+1/p}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{1/p}{r+1/p}}. \tag{25}$$

Кроме того, если $q \ge 1$ *и* $k = 1, \ldots, r-1$, *то для произвольного отрезка* $[a, b] \subset \mathbf{R}$ *и любой функции* $x \in L^r_\infty$, *удовлетворяющей условию* $x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0$, *выполняется неравенство*

$$\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|x^{(k)}(t)\right|^{q}dt\right)^{1/q}\le\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^{q}dt\right)^{1/q}\left(\frac{\|x\|_{\infty}}{\|\varphi_{r}\|_{\infty}}\right)^{\frac{r-k}{r}}\left\|x^{(r)}\right\|_{\infty}^{k/r}. \tag{26}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный отрезок $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$ и функцию $x\in L_{\infty}^{r}$ такую, что $L(x)_p<\infty$, $x(\alpha)=x(\beta)=0$. Положим $A_r:=\left\|x^{(r)}\right\|_{\infty}$ и выберем $\lambda>0$, удовлетворяющее условию

$$L(x)_p=A_r\,L(\varphi_{\lambda,r})_p=A_r\,\lambda^{-r-1/p}\,L(\varphi_r)_p,$$

т. е.

$$\lambda^{-1}=\left(\frac{L(x)_p}{A_r\,L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{1}{r+1/p}}. \tag{27}$$

Рассмотрим множество всех отрезков $\left[a_j,b_j\right]\subset[\alpha,\beta]$ таких, что

$$x(a_j)=x(b_j)=0,\quad |x(t)|>0,\quad t\in(a_j,b_j).$$

Ясно, что

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi\left(|x(t)|^{p}\right)dt=\sum_j\int\limits_{a_j}^{b_j}\Phi\left(|x(t)|^{p}\right)dt$$

и

$$\sum_j(b_j-a_j)\le\beta-\alpha.$$

Заметим, что функция x на каждом из отрезков (a_j,b_j) удовлетворяет всем условиям леммы 1. Поэтому, оценивая интегралы $\int_{a_j}^{b_j}\Phi\left(|x(t)|^{p}\right)dt$ с помощью неравенства (7) и принимая во внимание определение $\varphi_{\lambda,r}(t):=\lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$, получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi\left(|x(t)|^{p}\right)dt\le\sum_j(b_j-a_j)\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/\lambda}\Phi\left(\left|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^{p}\right)dt\le$$

$$\le(\beta-\alpha)\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/\lambda}\Phi\left(\left|A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^{p}\right)dt=(\beta-\alpha)\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\Phi\left(\left|A_r\,\lambda^{-r}\,\varphi_r(s)\right|^{p}\right)ds.$$

Отсюда следует (24), если учесть, что $A_r:=\left\|x^{(r)}\right\|_{\infty}$, а λ определено равенством (27). Полагая $\Phi(t)=t^{q/p}$ в (24), получаем (25).

Осталось доказать (26). Зафиксируем произвольное $k=1,\ldots,r-1$, отрезок $[a,b]\subset\mathbf{R}$ и функцию $x\in L_{\infty}^{r}$, удовлетворяющую условию $x^{(k)}(a)=x^{(k)}(b)=0$. Применяя неравенство (25) с $p=1$ к функции $x^{(k)}\in L_{\infty}^{r-k}$, для $q\ge1$ имеем

$$\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|x^{(k)}(t)\right|^{q}dt\right)^{1/q}\le\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^{q}dt\right)^{1/q}\left(\frac{L\left(x^{(k)}\right)_1}{L(\varphi_{r-k})_1}\right)^{\frac{r-k}{r-k+1}}\left\|x^{(r)}\right\|_{\infty}^{\frac{1}{r-k+1}}. \tag{28}$$

Учитывая очевидные соотношения

$$L\left(x^{(k)}\right)_1 \le 2\left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty, \qquad L(\varphi_{r-k})_1 = 2\left\| \varphi_{r-k+1} \right\|_\infty$$

и оценивая $\left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty$ (в случае $k > 1$) с помощью неравенства Колмогорова

$$\left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty \le \left\| \varphi_{r-k+1} \right\|_\infty \left(\frac{\| x \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty} \right)^{\frac{r-k+1}{r}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{k-1}{r}},$$

из (28) получаем (26).

Теорема 3 доказана.

***Замечание* 2.** Неравенство (26) с $b - a = 2\pi$ для 2π-периодической функции $x \in L_\infty^r$ трансформируется в известное неравенство Лигуна [8]

$$\left\| x^{(k)} \right\|_{L_q[0,2\pi]} \le \left\| \varphi_{r-k} \right\|_{L_q[0,2\pi]} \left(\frac{\| x \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty} \right)^{\frac{r-k}{r}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r}.$$

1. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
2. *Бабенко В. Ф.* Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 5 – 29.
3. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm inequalities for derivatives and differences // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1992. – **1536**. – 150 p.
4. *Bojanov B., Naidenov N.* An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // J. Anal. Math. – 1999. – **78**. – P. 263 – 280.
5. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – **35**, № 2. – P. 148 – 168.
6. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
7. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
8. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Anal. Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.

Получено 22.09.08