УДК 517.95

Н. П. Процах
(Нац. лісотехн. ун-т України; Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ*

The mixed problems for a nonlinear ultraparabolic equation are considered in a bounded domain and domain unbounded in the spatial variables. Conditions for the existence and uniqueness of solutions of these problems are obtained. Some estimates of these solutions are also established.

В ограниченной и неограниченной по пространственным переменным областях рассмотрены смешанные задачи для нелинейного ультрапараболического уравнения. Получены условия существования и единственности решений этих задач, а также некоторые их оценки.

Ультрапараболічні рівняння уперше виникли при ймовірнісному моделюванні випадкових рухів фізичної системи з n ступенями вільності [1]. Пізніше вони знайшли широке застосування у фінансовій математиці, економіці, біології та фізиці [2, 3].

Задачу Коші для вироджених рівнянь типу Колмогорова, які є узагальненням рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова, розглянуто у працях С. Д. Івасишена, В. С. Дроня, Г. П. Малицької та ін. (див. [4 – 6] та наведену в них бібліографію), де побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші, отримано його властивості, на їх підставі доведено теореми про існування та єдиність розв'язків задачі Коші, встановлено їх певні оцінки та властивості. Існування та єдиність розв'язку мішаних задач для лінійних та нелінійних ультрапараболічних рівнянь доведено у працях [7 – 13]. Зокрема, у працях [7, 10, 13] рівняння містять нелінійності степеневого вигляду, а у праці [7] коефіцієнти рівняння можуть зростати.

Праці [2, 13 – 16] присвячено вивченню певних властивостей квазілінійних ультрапараболічних рівнянь. Зокрема, встановлено поведінку розв'язку при зростанні часової змінної, отримано нерівності Гарнака та оцінки розв'язку. У праці [17] встановлено умови компактності носія розв'язку мішаної задачі для параболічного рівняння у необмеженій за просторовими змінними області.

У цій статті розглянуто мішану задачу для нелінійного ультрапараболічного рівняння. Отримано умови, за яких норма розв'язку вказаної задачі спадає при зростанні часової змінної. У випадку, коли область, в якій розглянуто задачу, є необмеженою за просторовими змінними, показано, що носій розв'язку є обмеженим.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область з межею $\partial\Omega \in C^1$, $D \subset \mathbb{R}^l$ — обмежена область з межею $\partial D \in C^1$, числа $n, l \subset \mathbb{N}$, $T \in (0, \infty)$.

Введемо такі позначення: τ — довільне фіксоване число з проміжку $(0, T]$, $G = \Omega \times D$, $Q_\tau = G \times (0, \tau)$, $Q_{s,\tau} = G \times (s, \tau)$, $(s < \tau, s \in [0, T))$, $Q_T = G \times (0, T)$, $Q = G \times (0, \infty)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0, T)$, $S_T = \Omega \times \partial D \times (0, T)$, ν — зовнішня нормаль до поверхні S_T, ∂G — межа області G, $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, $y = \{y_1, \dots, y_l\}$, $x \in \Omega$, $y \in D$.

Розглянемо функції, які для довільного $T > 0$ задовольняють умови:

А) $a_i \in C(\overline{Q}) \cap L^\infty(Q)$, $a_i(x, y, t) \ge a_0$ для майже всіх $(x, y, t) \in Q$ та всіх $i \in \{1, \dots, n\}$, a_0 — додатна стала;

Р) числа p та q такі, що $q \in (1, \infty)$, $p \in (2, \infty)$;

* Частково підтримано грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених.

C) $\left\{c, c_{y_i}\right\} \subset L^\infty\big((0,T);\, L^\infty(\overline{G})\big)$, $c(x,y,t) \ge c_0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $i \in \{1,\ldots,l\}$, c_0 — додатна стала;

G) функція $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в області Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$, неперервна по ξ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$; $|g(x,y,t,\xi)| \le g^0|\xi|^{q-1}$, $(g(x,y,t,\xi) - g(x,y,t,\eta))(\xi - \eta) \ge g_0|\xi - \eta|^q$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$, де g_0, g^0 — такі сталі, що $g_0 > 0$ при $q \ge 2$, $g_0 = 0$ при $1 < q < 2$, $g^0 > 0$;

L) $\lambda_i \in C(0,\infty;\, C(D))$, $\lambda_{iy_i} \in L^\infty(Q_T)$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $i \in \{1,\ldots,l\}$;

F) $f \in L^2(Q_T)$;

U) $u_0 \in L^2(G)$.

Позначимо через S_T^1 частину поверхні S_T, на якій $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) < 0$, а через S_T^2 частину поверхні S_T, на якій $\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i) \ge 0$. Припускатимемо, що для функцій λ_i, $i \in \{1,\ldots,l\}$, виконується умова

S) існує $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{l-1}$ таке, що $\operatorname{mes}\Gamma_1 > 0$ і поверхню S_T^1 можна зобразити у вигляді $S_T^1 = \Omega \times \Gamma_1 \times (0,T)$.

В області Q_T розглянемо мішану задачу для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} - \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(x,y,t)\, |u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i}\right)_{x_i} + \\ + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t) \tag{1}$$

з крайовими

$$u|_{S_T^1} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{\Sigma_T} = 0 \tag{3}$$

та початковою

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{4}$$

умовами.

Введемо простори

$$V_1(Q_T) = \Big\{v\colon\ v \in L^q(Q_T) \cap L^2(Q_T),\, v_{x_i} \in L^p(Q_T),\, v_{y_j} \in L^2(Q_T), \\ i \in \{1,\ldots,n\},\, j \in \{1,\ldots,l\},\, v|_{S_T^1} = 0,\, v|_{\Sigma_T} = 0\Big\}$$

з нормою $\|v; V_1(Q_T)\| = \|v; L^q(Q_T)\| + \|v; L^2(Q_T)\| + \sum_{i=1}^{l} \|v_{y_i}; L^2(Q_T)\| + \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}; L^p(Q_T)\|$;

$$V_2(Q_T) = \Big\{v\colon\ v \in L^q(Q_T) \cap L^2(Q_T),\, v_{x_i} \in L^p(Q_T),\, i \in \{1,\ldots,n\},\, v|_{\Sigma_T} = 0\Big\}$$

з нормою $\|v; V_2(Q_T)\| = \|v; L^q(Q_T)\| + \|v; L^2(Q_T)\| + \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}; L^p(Q_T)\|$;

$$V_3(G) = L^p\big(D; W_0^{1,p}(\Omega)\big)$$

з нормою $\|v; V_3(G)\| = \int_G \left[|v|^p + \sum_{i=1}^{n} |v_{x_i}|^p\right] dx\, dy$;

$$V_4(G) = \left\{v\colon\ v \in L^2(G), v_{y_i} \in L^2(G), i \in \{1, \ldots, l\}, v|_{\Omega\times\Gamma_1} = 0\right\}$$

з нормою $\|v; V_4(G)\| = \left\|v; L^2(G)\right\| + \sum_{i=1}^{l}\left\|v_{y_i};\ L^2(G)\right\|$.

Позначимо через $V_3^*(G)$ простір лінійних неперервних функціоналів на $V_3(G)$ (спряжений простір до $V_3(G)$), $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — значення функціонала з простору $V_3^*(G)$ на функціях з $V_3(G)$, числа p' та q' такі, що виконуються співвідношення $1/p' + 1/p = 1$, $1/q' + 1/q = 1$.

Через $L^r(0, T; X)$ та $C([0, T]; X)$, де $r \in \{2, p, q, p', q', \infty\}$, X — банахів простір, позначимо простори функцій u, заданих на $[0, T]$, зі значеннями в X і таких, що $\|u;\ L^r(0, T;\ X)\| = \left(\int_0^T \|u(\cdot,\cdot,t);\ X\|^r\, dt\right)^{1/r}$ та $\|u;\ C([0, T];\ X)\| = \max_{[0,T]}\|u(\cdot,\cdot,t);\ X\|$ є скінченним; через $X+Y$, де X і Y — банахові простори, — простір $\{z : z = x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}$ з нормою $\|z;\ X + Y\| = \inf\limits_{x\in X, y\in Y, x+y=z} \max\{\|x; X\|; \|y; Y\|\}$.

1. Нехай область Ω є обмеженою.

Означення 1. *Функцію u з простору $V_1(Q_T) \cap C\big([0, T];\ L^2(G)\big)$, $u_t \in L^{p'}\big((0, T);\ V_3^*(G)\big) + L^{r_0}(Q_T)$ назвемо розв'язком мішаної задачі* (1) – (4), *якщо вона задовольняє умову* (4) *та рівність*

$$L(u, v, f) \equiv \int_0^T \langle u_t, v\rangle\, dt + \int_{Q_T}\left[\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x, y, t)u_{y_i}v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, y, t)\left|u_{x_i}\right|^{p-2}u_{x_i}v_{x_i} + \right.$$
$$\left. + c(x, y, t)uv + g(x, y, t, u)v - f(x, y, t)v\right]dx\,dy\,dt = 0 \qquad (5)$$

для всіх функцій $v \in V_2(Q_T)$. *Тут* $r_0 = \min\left\{2, q'\right\}$.

***Зауваження* 1.** У праці [8] розглянуто задачу (1) – (4) у випадку, коли область Q_T є обмеженою (Ω теж обмежена) та $p \in (1, 2]$. Отримано умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі.

Якщо ж $p > 2$, то аналогічно [8] доводиться наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *задовольняють умови* A, C, G, L, F, U, S *і, крім того, умови*

1) a_{iy_j}, a_{ix_i}, $c_{y_j} \subset L^\infty(Q_T)$, $f_{y_j} \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in V_4(G)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$; *якщо* $q > 2$, *то* $g_{y_j} \equiv 0$ *для всіх* $j \in \{1, \ldots, l\}$;

2) $f|_{S_T^1} = 0$;

3) *якщо* $n + l > 2$, *то* $2 < p < \dfrac{2(n+l)}{n+l-2}$, $1 < q < \dfrac{2(n+l)}{n+l-2}$, *а якщо* $n = l = 1$, *то* $2 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$.

Тоді існує розв'язок мішаної задачі (1) – (4).

***Зауваження* 2.** У теоремі 1 отримано умови розв'язності мішаної задачі (1) – (4) в області Q_T для довільного скінченного числа $T > 0$. Оскільки T — довільне скінченне додатне число, то $u \in V_{1,\mathrm{loc}}(Q) \cap C\big(0, \infty;\ L^2(G)\big)$, де $V_{1,\mathrm{loc}}(Q) = \{u : u \in V_1(Q_T)$ для довільного $T > 0\}$.

Отримаємо оцінку розв'язку задачі (1) – (4) в області Q у випадку, коли функція f дорівнює нулю.

Для функції u виконується нерівність Пуанкаре – Фрідріхса

$$\int_\Omega \int_D |u|^2\, dxdy \;\le\; C_1 \int_\Omega \int_D \sum_{i=1}^n \left|u_{x_i}\right|^2 dxdy\,,$$

в якій $C_1 = C_0^{2(n+2)/n} |\Omega|^{2/n}$, $C_0 = \max\left\{\frac{2(n-1)}{n};\ \frac{3}{2}\right\}$, а $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$.

Позначимо $|G| = \operatorname{mes} G$, $C = \dfrac{C_1^{p/2}\,(n|G|)^{(p-2)/2}}{(p-2)a_0}$.

Теорема 2. *Нехай* $p > 2$, Ω *— обмежена область в* $\mathbb{R}^n$, u *— розв'язок задачі* (1) – (4) *при* $f \equiv 0$. *Тоді*:

1) *якщо* $\left\|u_0; L^2(G)\right\| = 0$, *то* $\left\|u(\cdot,\cdot,t); L^2(G)\right\| = 0$ *для довільного* $t > 0$;

2) *якщо* $\left\|u_0; L^2(G)\right\| \ne 0$ *та*

$$\operatorname*{ess\,sup}_Q \sum_{i=1}^l \left|\lambda_{iy_i}(x,y,t)\right| \;\le\; 2\operatorname*{ess\,inf}_Q |c(x,y,t)|\,,$$

то для всіх $t > 0$ *виконується оцінка*

$$\int_D \int_\Omega |u(x,y,t)|^2\, dx\,dy \;\le$$

$$\le\; \left(C^{-1}t + \left[\int_D \int_\Omega |u(x,y,0)|^2\, dxdy\right]^{(2-p)/2}\right)^{2/(2-p)} \;<\; \left[\frac{C}{t}\right]^{2/(p-2)}.$$

Доведення. Позначимо $g(t) = \int_D \int_\Omega |u(x,y,t)|^2 dxdy$. З рівності (5) при $v = u$ для довільних $\{t_1, t_2\} \subset [0,\infty)$, $t_1 < t_2$, можна отримати рівність

$$\frac{1}{2}\int_{G_{t_2}} u^2 dxdy \;-\; \frac{1}{2}\int_{G_{t_1}} u^2 dxdy \;+\; \int_{Q_{t_1,t_2}} \left[\sum_{i=1}^l \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} u \;+\right.$$

$$\left. +\; \sum_{i=1}^n a_i(x,y,t)\left|u_{x_i}\right|^p \;+\; c(x,y,t)u^2 \;+\; g(x,y,t,u)u\right] dxdydt \;=\; 0.$$

Оскільки

$$\int_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} u dxdydt \;\ge$$

$$\ge\; \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \int_{(\partial D\setminus\Gamma_1)\times\Omega} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i)|u|^2\, dSdt \;-\; \frac{\lambda^1}{2}\int_{Q_{t_1,t_2}} |u|^2\, dxdydt\,,$$

де $\lambda^1 = \operatorname*{ess\,sup}_Q \sum_{i=1}^l \left|\lambda_{iy_i}(x,y,t)\right|$, то, використавши умови A, P, C, G, L, U, з (5) для довільних $\{t_1, t_2\} \subset [0,\infty)$, $t_1 < t_2$, отримаємо оцінку

$$\int_{G_{t_2}} |u|^2\, dxdy \;+\; \int_{t_1}^{t_2} \int_{(\partial D\setminus\Gamma_1)\times\Omega} \sum_{i=1}^l \lambda_i(x,y,t)\cos(\nu, y_i)|u|^2\, dSdt \;+$$

$$+ \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[2g_0 |u|^q + 2a_0 \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p + \left(-\lambda^1 + 2c_0\right)|u|^2 \right] dxdydt \le$$

$$\le \int\limits_{G_{t_1}} |u|^2 \, dxdy. \tag{6}$$

Розглянемо такі випадки:

1. Нехай $\left\|u_0; L^2(G)\right\| = 0$. Тоді з рівності (6) при $t_1 = 0$ за умови $\lambda^1 \le 2c_0$ знаходимо

$$\int\limits_{G_{t_2}} |u|^2 \, dxdy + \int\limits_{Q_{0,t_2}} \left[|u|^q + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p + |u|^2 \right] dxdydt \le 0.$$

Отже, $\left\|u(\cdot,\cdot,t_2); L^2(G)\right\| = 0$ для довільного $t_2 > 0$. Якщо ж $\lambda^1 > 2c_0$, то з (6) отримаємо

$$\int\limits_{G_{t_2}} |u|^2 \, dxdy + \int\limits_{Q_{0,t_2}} \left[|u|^q + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p \right] dxdydt \le \int\limits_{Q_{0,t_2}} |u|^2 dxdydt.$$

Звідси за лемою Гроноулла – Беллмана також отримуємо $\int_{Q_{0,t_2}} |u|^2 \, dxdydt \le 0$, а тому $\left\|u(\cdot,\cdot,t_2);\, L^2(G)\right\| = 0$ для довільного $t_2 > 0$.

2. Нехай $\left\|u_0; L^2(G)\right\| \ne 0$. Тоді за умови

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q} \sum_{i=1}^{l} \left|\lambda_{iy_i}(x,y,t)\right| \le 2 \operatorname*{ess\,inf}_{Q} |c(x,y,t)|$$

з (6) знаходимо оцінку

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} g'(t)\, dt + a_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_D \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p dxdydt \le 0.$$

Якщо припустити, що g — монотонно зростаюча функція, то з (6) випливатиме

$$\int\limits_{Q_{0,t_2}} \left[|u|^q + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p + |u|^2 \right] dxdydt = 0,$$

що суперечить припущенню.

Нехай g — монотонно спадна функція на $[0,\infty)$. Тоді з абсолютної неперервності функції g випливає, що $2a_0 \int_D \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p \, dxdy \le -g'(t)$ для майже всіх $t \in [t_1, t_2]$.

За допомогою нерівностей Пуанкаре – Фрідріхса та Гельдера маємо

$$g(t) \le C_1 \int_D \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \, dxdy \le C_1 |G|^{(p-2)/p} \left(\int_D \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \right)^{p/2} dxdy \right)^{2/p} \le$$

$$\le C_1 (n|G|)^{(p-2)/p} \left(\int_D \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p \, dxdy \right)^{2/p} \le \frac{C_1 (n|G|)^{(p-2)/p}}{(2a_0)^{2/p}} |g'(t)|^{2/p}. \tag{7}$$

Отже, $g(t) \le \dfrac{C_1 (n|G|)^{(p-2)/p}}{(2a_0)^{2/p}} |g'(t)|^{2/p}$. Врахувавши те, що g — спадна функція, отримаємо

$$\left(\frac{(2a_0)^{2/p}}{C_1 (n|G|)^{(p-2)/p}} \right)^{p/2} [g(t)]^{p/2} \le -g'(t).$$

Таким чином,

$$g'(t) + \frac{2a_0}{C_1^{p/2} (n|G|)^{(p-2)/2}} [g(t)]^{p/2} \le 0.$$

Розв'язуємо цю диференціальну нерівність:

$$[g(t)]^{(2-p)/2} \ge \frac{p-2}{2} \frac{2a_0}{C_1^{p/2} (n|G|)^{(p-2)/2}} t + [g(0)]^{(2-p)/2}.$$

Отже,

$$g(t) \le \left[\frac{a_0 (p-2)}{C_1^{p/2} (n|G|)^{(p-2)/2}} t + [g(0)]^{(2-p)/2} \right]^{2/(2-p)} =$$

$$= \frac{g(0)}{\left[C^{-1} t [g(0)]^{(-2+p)/2} + 1 \right]^{2/(p-2)}} < \left[\frac{C}{t} \right]^{2/(p-2)}.$$

Теорему доведено.

***Зауваження* 3.** Нехай у рівнянні (1) число $p \in (1, 2)$. Тоді правильною є наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай* $1 < p < 2$, $q > 2$, Ω — *обмежена область в* $\mathbb{R}^n$, u — *розв'язок задачі* (1) – (4) *при* $f \equiv 0$. *Тоді*:

1) *якщо* $\|u_0; L^2(G)\| = 0$, *то* $\|u(\cdot,\cdot,t); L^2(G)\| = 0$ *для довільного* $t > 0$;

2) *якщо* $\|u_0; L^2(G)\| \ne 0$ *та* $\operatorname*{ess\,sup}_Q \sum_{i=1}^{l} |\lambda_{iy_i}(x, y, t)| \le 2 \operatorname*{ess\,inf}_Q |c(x, y, t)|$, *то для всіх* $t > 0$ *виконується оцінка*

$$\int_D \int_\Omega |u(x, y, t)|^2 \, dxdy \le \left(C_2^{-1} t + \left[\int_D \int_\Omega |u(x, y, 0)|^2 \, dxdy \right]^{(2-q)/2} \right)^{2/(2-q)} <$$

$$< \left[\frac{C_2}{t} \right]^{2/(q-2)},$$

де стала $C_2 = \dfrac{|G|^{(q-2)/2}}{(q-2) g_0}$.

Доведення. Позначимо $g(t) = \int_D \int_\Omega |u(x, y, t)|^2 \, dxdy$. З теореми 1 [8] випливає, що функція g є абсолютно неперервною, для довільних $\{t_1, t_2\} \in$ $\in [0, \infty)$, $t_1 < t_2$, виконується оцінка $\dfrac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} g'(t) dt + g_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_D \int_\Omega |u|^q \, dxdydt \le 0$, тобто $2 g_0 \int_D \int_\Omega |u|^q \, dxdy \le -g'(t)$ для майже всіх $t \in [t_1, t_2]$. Звідси якщо $g(0) = 0$, то $g(t) = 0$ для довільного $t > 0$.

Нехай $g(0) \neq 0$. За допомогою нерівності Гельдера маємо

$$g(t) \ \le \ |G|^{(q-2)/q} \left(\int\limits_D \int\limits_\Omega |u|^q \, dxdy \right)^{2/q} \ \le \ \frac{|G|^{(q-2)/q}}{(2g_0)^{2/q}} |g'(t)|^{2/q}. \qquad (8)$$

Отже, $[g(t)]^{(2-q)/2} - [g(0)]^{(2-q)/q} \ge \dfrac{(q-2)g_0}{|G|^{(q-2)/2}} t$. Тому

$$g(t) \ \le \ \left[\frac{(q-2)g_0}{|G|^{(q-2)/2}} t \ + \ [g(0)]^{(2-q)/q} \right]^{2/(2-q)} \ =$$

$$= \ \frac{g(0)}{\left[C_2^{-1} t \, [g(0)]^{(-2+q)/2} \ + \ 1 \right]^{2/(q-2)}} \ < \ \left[\frac{C_2}{t} \right]^{2/(q-2)}.$$

Теорему доведено.

***Зауваження* 4.** З теорем 2, 3 випливає, що при $t \to \infty$ норма $\| u(\cdot,\cdot,t); L^2(G) \|$ прямує до нуля.

2. Нехай область Ω є необмеженою.

Означення 2. *Функцію u назвемо слабким розв'язком мішаної задачі* (1) – (4), *якщо вона є границею у просторі $V_2(Q_T) \cap C([0,T]; L_2(\bar{G}))$ послідовності функцій $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція u^k задовольняє рівність*

$$L(u, v, f^k) \ = \ 0 \qquad (9)$$

для всіх функцій $v \in V_2(Q_T)$ таких, що $\operatorname{supp} v \subset \operatorname{supp} u$, а $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до функції $f \in L^2(Q_T)$ та $u^k(x,y,0) = u_0^k(x,y)$, де $\{u_0^k\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до u_0 у просторі $L^2(G)$.

Зауважимо, що концепцію слабких розв'язків для гіперболічних рівнянь введено у [18].

Знайдемо умови існування та єдиності слабкого розв'язку задачі (1) – (4) в необмеженій за просторовими змінними області Q_T.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *для кожної обмеженої підобласті області Q_T та умови* A, C *у всій області Q_T. Тоді існує єдиний слабкий розв'язок задачі* (1) – (4).

Доведення. З теореми 1 випливає, що в кожній обмеженій області $\tilde{Q}_T = \tilde{\Omega} \times D \times (0,T)$ існує u така, що

$$u_t \ + \ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} \ - \ \sum_{i=1}^{n} \left(a_i(x,y,t) |u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} \right)_{x_i} \ +$$

$$+ \ c(x,y,t)u \ + \ g(x,y,t,u)u \ = \ \tilde{f}(x,y,t)$$

у сенсі теорії розподілів, u задовольняє умови $u|_{\tilde{S}_T^1} = 0$, $u|_{\tilde{\Sigma}_T} = 0$, $u(x,y,0) = \tilde{u}_0(x,y)$, де $\tilde{S}_T^1 = \tilde{\Omega} \times \Gamma_1 \times (0,T)$, $\tilde{\Sigma}_T = \partial\tilde{\Omega} \times D \times (0,T)$, функції

$$\tilde{f} = \begin{cases} f, & \text{якщо} \quad (x,y,t) \in \tilde{\Omega} \times D \times (0,T), \\ 0, & \text{якщо} \quad (x,y,t) \in (\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \times D \times (0,T), \end{cases}$$
$$\tilde{u}_0 = \begin{cases} u_0, & \text{якщо} \quad (x,y) \in \tilde{\Omega} \times D, \\ 0, & \text{якщо} \quad (x,y) \in (\Omega \setminus \tilde{\Omega}) \times D. \end{cases} \tag{10}$$

Розглянемо послідовність областей Q_T^k, де $k \in \{1, 2, \ldots\}$, до того ж $Q_T^k = \Omega^k \times D \times (0,T)$, а $\Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \ldots \subset \Omega^k \subset \ldots \subset \Omega$. У кожній з цих областей існує розв'язок u^k задачі (1) – (4), де права частина рівняння (1) містить функцію f^k замість f, а початковою функцією в умовах (4) є u_0^k. Зауважимо, що при $k \to \infty$ послідовності $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ збігаються у просторі $L^2(\bar{Q}_T)$ до функції f, $\left\{u_0^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ — у просторі $L^2(\bar{G})$ до u_0. Продовжимо ці розв'язки u^k нулем на $Q_T \setminus Q_T^k$ і отримаємо послідовність функцій $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$, які визначені в усій області Q_T.

Покажемо, що побудована послідовність $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до слабкого розв'язку задачі (1) – (4). Позначимо $u^{k,m} = u^k - u^m$, де $\{k,m\} \in \mathbb{N}$. Для k, $m \in \mathbb{N}$ з означення 1 випливає

$$\int_{Q_\tau} \Bigg[\frac{\alpha}{2}\left(u^{k,m}\right)^2 + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\, u_{y_i}^{k,m} u^{k,m} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)\left(\left|u_{x_i}^k\right|^{p-2} u_{x_i}^k - \left|u_{x_i}^m\right|^{p-2} u_{x_i}^m\right)\left(u^{k,m}\right)_{x_i} + c(x,y,t)\left(u^{k,m}\right)^2 +$$
$$+ \left(g\left(x,y,t,u^k\right) - g\left(x,y,t,u^m\right)\right)u^{k,m} -$$
$$-\left(f^k(x,y,t) - f^m(x,y,t)\right)u^{k,m}\Bigg] e^{-\alpha t} dxdydt + \frac{1}{2}\int_G \left(u^{k,m}\right)^2 e^{-\alpha\tau} dxdy -$$
$$- \frac{1}{2}\int_G \left(u_0^k - u_0^m\right)^2 dxdy = 0, \tag{11}$$

де $\alpha = l \max\limits_i \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} \left|\lambda_{iy_i}(x,y,t)\right| - 2c_0 + 2$.

Оцінимо кожний доданок з рівності (11):

$$\mathcal{X}_1 \equiv \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\, u_{y_i}^{k,m} u^{k,m} e^{-\alpha t} dxdydt \geq -\frac{\lambda^1 l}{2} \int_{Q_\tau} \left(u^{k,m}\right)^2 e^{-\alpha t} dxdydt +$$
$$+ \int_{S_\tau^2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) \cos(\nu, y_i)\left(u^{k,m}\right)^2 e^{-\alpha t} dSdt,$$

де $\lambda^1 = \max_i \operatorname{ess}\sup_{Q_T} \left|\lambda_{iy_i}(x,y,t)\right|$;

$$\mathcal{X}_2 \equiv \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t)\left(\left|u_{x_i}^k\right|^{p-2} u_{x_i}^k - \left|u_{x_i}^m\right|^{p-2} u_{x_i}^m\right) u_{x_i}^{k,m} e^{-\alpha t}\, dxdydt \geq$$

$$\geq a_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}^k\right|^p e^{-\alpha t}\, dxdydt,$$

$$\mathcal{X}_3 \equiv \int_{Q_\tau} \left(g(x,y,t,u^k) - g(x,y,t,u^m)\right) u^{k,m} e^{-\alpha t} dxdydt \geq$$

$$\geq g_0 \int_{Q_\tau} \left|u^{k,m}\right|^q e^{-\alpha t} dxdydt,$$

$$\mathcal{X}_4 \equiv \int_{Q_\tau} \left(f^k(x,y,t) - f^m(x,y,t)\right) u^{k,m} e^{-\alpha t} dxdydt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\delta} \int_{Q_\tau} \left(f^k - f^m\right)^2 e^{-\alpha t} dxdydt + \frac{\delta}{2} \int_{Q_\tau} \left(u^{k,m}\right)^2 e^{-\alpha t} dxdydt.$$

На підставі цих оцінок і рівності (11) отримуємо оцінку

$$\frac{1}{2} \int_G \left(u^{k,m}\right)^2 e^{-\alpha\tau} dxdy + \int_{Q_\tau} \left[\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda^1 l}{2} - \frac{\delta}{2} + c_0\right)\left(u^{k,m}\right)^2 + a_0 \sum_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}^{k,m}\right|^p + \right.$$

$$\left. + g_0 |u|^q \right] e^{-\alpha t} dxdydt + \int_{S_\tau^2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) \cos(\upsilon, y_i) \left(u^{k,m}\right)^2 e^{-\alpha t} dSdt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\delta} \int_{Q_\tau} \left(f^k - f^m\right)^2 e^{-\alpha t} dxdydt + \frac{1}{2} \int_G \left(u_0^k - u_0^m\right)^2 e^{-\alpha t} dxdydt.$$

Зауважимо, що оскільки послідовності $\left\{f^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{u_0^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ збігаються в $L^2(\bar{Q}_T)$ та $L^2(\bar{G})$ відповідно, то вони є фундаментальними в $L^2(\bar{Q}_T)$ та $L^2(\bar{G})$. Тому з урахуванням вигляду числа α для довільного заданого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $k_0 > 0$, що для всіх $k > k_0$ та $m > k_0$ виконується оцінка

$$\int_{G_\tau} \left(u^{k,m}\right)^2 e^{-\alpha\tau} dxdy + \int_{Q_\tau} \left[\left(u^{k,m}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}^{k,m}\right|^p + \left|u^{k,m}\right|^q\right] e^{-\alpha t} dxdydt \leq \varepsilon. \tag{12}$$

Отже, з (12) випливає, що $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність у $C\left([0,T];\, L^2(\bar{G})\right)$ і $V_2(Q_T)$, отже, є збіжною в цих просторах. Границя цих функцій буде слабким розв'язком задачі (1) – (4).

Доведемо єдиність слабкого розв'язку такої задачі. Нехай існують два слабкі розв'язки (u_1 і u_2) задачі (1) – (4). За означенням 2 існують послідовності $\left\{u_s^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $s \in \{1, 2\}$, які збігаються до u_s у просторі $C\left([0,T];\, L^2(Q_T)\right) \cap$ $\cap\, V_2(Q_T)$. Тоді їх різниця $u_{1,2}^k = u_1^k - u_2^k$ задовольнятиме рівність

$$\int_0^T \left\langle (u_{1,2})_t, v \right\rangle dt \; + \; \int_{Q_T} \Bigg[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) \left(u_{1,2}^k \right)_{y_i} v \; + \; \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t) \Big(\left| u_{1,x_i}^k \right|^{p-2} u_{1,x_i}^k \; -$$

$$- \; \left| u_{2,x_i}^k \right|^{p-2} u_{2,x_i}^k \Big) v_{x_i} \; + \; c(x,y,t)\, u_{1,2}^k v + \Big(g(x,y,t,u_1^k) \; -$$

$$- \; g(x,y,t,u_2^k) \Big) v - \left(f_1^k - f_2^k \right) v \Bigg] dxdydt \; = \; 0 \tag{13}$$

для довільного $v \in V_2\left(\bar{Q}_T\right)$, $\operatorname{supp} v \subset \operatorname{supp} u_s^k$, $s \in \{1, 2\}$. Виберемо в (13) функцію $v = \left(u_1^k - u_2^k \right) e^{-\alpha t}$. Тоді так само, як при доведенні оцінки (12), отримаємо оцінку

$$\int_G \left(u_{1,2}^k \right)^2 dxdy \; + \; \int_{Q_\tau} \left[\left(u_{1,2}^k \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i,1,2}^k \right|^p + \left| u_{1,2}^k \right|^q \right] dxdydt \; \le$$

$$\le \; M \left(\int_{Q_T} \left(f_1^k(x,y,t) - f_2^k(x,y,t) \right)^2 dxdydt + \int_G \left(u_{1,0}^k(x,y) - u_{2,0}^k(x,y) \right)^2 dxdy \right),$$

де стала M не залежить від k. Врахувавши збіжність при $k \to \infty$ послідовностей $\left\{ f_s^k \right\}_{k=1}^{\infty}$ та $\left\{ u_{s,0}^k \right\}_{k=1}^{\infty}$ до f та u_0 відповідно, матимемо $u_1 = u_2$.

Отримаємо оцінки слабких розв'язків задачі (1) – (4) та встановимо умови, за яких носій розв'язку є обмеженим.

Нехай Ω є необмеженою областю з простору $\mathbb{R}^n$, яка задовольняє умову

О) Ω є обмеженою хоча б за однією зі змінних x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Для визначеності припустимо, що Ω є обмеженою за змінною x_1, та позначимо $\max\{x_1 : x_1 \in \Omega\} - \min\{x_1 : x_1 \in \Omega\} = l_1$.

Нехай $p > 2$, $q > 2$. Позначимо

$$z \; = \; x_n \quad (z_0 \text{ — довільне фіксоване число}),$$

$$\Omega_{z > z_0} \; = \; \Omega \cap \{ z > z_0 \}, \qquad Q_{z - z_0, \tau} \; = \; \Omega_{z > z_0} \times D \times (0, T),$$

$$S_{n,f}(T) \; = \; \sup\{ z : \; (x,y,t) \in \operatorname{supp} f, \; t \in [0, T], \; y \in D \},$$

$$\zeta_n(T) \; = \; \sup\{ z : \; (x,y) \in \operatorname{supp} u(\cdot,\cdot,T) \}, \qquad S_n(T) \; = \; \sup\left\{ S_{n,f}(T), \, \zeta_n(0) \right\}.$$

Розглянемо задачу (1) – (4) у довільній обмеженій підобласті Q_T^k області Q_T. За умов теореми 1 її розв'язок існує. Продовжимо функцію u^k нулем в область Q_T та отримаємо рівність

$$\int_0^T \left\langle u_t^k, v \right\rangle dt \; + \; \int_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\, u_{y_i}^k v \; + \; \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t) \left| u_{x_i}^k \right|^{p-2} u_{x_i}^k v_{x_i} \; +$$

$$+ \; c(x,y,t)\, u^k v + g(x,t,u^k)\, v \Bigg] dxdydt \; = \; \int_{Q_T} f^k(x,y,t) v \, dxdydt \tag{14}$$

для всіх функцій $v \in V_2\left(Q_T\right)$ таких, що $\operatorname{supp} v \subset \operatorname{supp} u^k$.

Виберемо в (14) функцію v у вигляді $v = u^k \cdot \rho(z)\, e^{-\alpha t}$, де $\rho \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^1)$, ρ залежить тільки від z, $\rho(z) \geq 0$ та $\rho(z) = 0$ для $z \leq z_0$ [17, с. 329], а стала $\alpha = 2 - 2c_0 + \lambda^1 l$. Тоді одержимо рівність

$$\frac{1}{2}\int_D \int_{\Omega_{z>z_0}} \left(u^k(x,y,\tau)\right)^2 \rho(z)\, e^{-\alpha\tau}\, dxdy \; +$$

$$+ \int_{Q_{z>z_0,\tau}} \left[\frac{1}{2}\alpha\left(u^k\right)^2 \rho(z) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)\, u^k_{y_i}\, u^k \rho(z) \; + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t) \left|u^k_{x_i}\right|^{p-2} u^k_{x_i} \left(u^k \rho(z)\right)_{x_i} \; +$$

$$\left. + \; c(x,y,t)\left(u^k\right)^2 \rho(z) + g\left(x,t,u^k\right) u^k \rho(z) \right] e^{-\alpha t} dxdydt \; = \; 0.$$

Зінтегрувавши частинами в третьому доданку цієї рівності та врахувавши крайові умови (2), дістанемо оцінку

$$\frac{1}{2}\int_D \int_{\Omega_{z>z_0}} \left(u^k(x,y,\tau)\right)^2 \rho(z)\, e^{-\alpha\tau}\, dxdy \; +$$

$$+ \; \frac{1}{2}\int_{S^2_\tau} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) \cos(\nu, y_i)\, (u^k)^2 \rho(z)\, e^{-\alpha t} dSdt \; +$$

$$+ \int_{Q_{z>z_0,\tau}} \left[\frac{1}{2}\alpha\left(u^k\right)^2 \rho(z) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} \lambda_{iy_i}(x,y,t)\left(u^k\right)^2 \rho(z) \; + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,y,t) \left|u^k_{x_i}\right|^{p-2} u^k_{x_i} \left(u^k \rho(z)\right)_{x_i} \; +$$

$$\left. + \; c(x,y,t)\left(u^k\right)^2 \rho(z) + g\left(x,t,u^k\right) u^k \rho(z) \right] e^{-\alpha t} dxdydt \; \leq \; 0.$$

Врахувавши вигляд α, переконаємось, що для довільної функції u^k виконується оцінка

$$\frac{1}{2}\sup_{[0,T]} \int_D \int_{\Omega_{z>z_0}} (u^k)^2 \rho\, dxdy \; +$$

$$+ \int_{Q_{z>z_0,\tau}} \left[\left(u^k\right)^2 \rho + a_0 \sum_{i=1}^{n} \left|u^k_{x_i}\right|^p \rho + g_0 \left|u^k\right|^q \rho \right] dxdydt \; \leq$$

$$\leq \; a_0 e^{\alpha T} \int_{Q_{z>z_0,\tau}} \left|u^k_z\right|^{p-1} \left|u^k\right| \rho_z\, dxdydt\,. \tag{15}$$

Позначимо

$$E_s(z_0) \; = \; \int_0^T \int_D \int_{\Omega_{z>z_0}} (z - z_0)^s \sum_{i=1}^{n} \left|u^k_{x_i}\right|^p dxdydt\,,$$

$$F_s(z_0) \;=\; \sup_{t\in[0,T]} \frac{1}{2}\int_D \int_{\Omega_{z>z_0}} (z-z_0)^s \left|u^k\right|^2 dxdy\,.$$

Тоді для слабкого розв'язку задачі (1) – (4) має місце така теорема.

Теорема 5. *Нехай* $p>2,\; q>2,\; \Omega$ — *необмежена область в* $\mathbb{R}^n$, *яка задовольняє умову* O, u — *слабкий розв'язок задачі* (1) – (4), *функції* f *та* u_0 *мають обмежений носій. Тоді існує така стала* C_3, *яка залежить від* p *і не залежить від* z_0, *що виконується оцінка*

$$\int_0^T\int_D \int_{\Omega_{z>2z_0}} \sum_{i=1}^n \left|u_{x_i}\right|^p dxdydt \;\le\; e^{-z_0/C_3}\int_0^T\int_D \int_{\Omega_{z>0}} \sum_{i=1}^n \left|u_{x_i}\right|^p dxdydt\,, \quad z_0 \ge C_3.$$

Доведення. Припускатимемо, що $S_n(T)$ є скінченним для заданого $T>0$. З умови на $S_n(T)$ випливає, що існує таке $z_0\in\mathbb{R}$, що для всіх $z\ge z_0$ функції $f\equiv 0,\; u_0\equiv 0.$ Також вважатимемо, що $\{z>0\}\bigcap\Omega\neq\varnothing$ (в іншому випадку $\zeta_n(T)\le S_n(T)$ і доведення є очевидним).

Вибравши в (15) функцію

$$\rho(z) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad z\le z_0, \\ (z-z_0)^s, & \text{якщо} \quad z>z_0, \end{cases}$$

яка належить до простору $C^1(\mathbb{R}^1)$, якщо $s\ge 1$, та застосувавши нерівності Гельдера до (15), матимемо

$$g_0 \int_{Q_{z>z_0,\tau}} \left|u^k\right|^q (z-z_0)^s dxdydt \;+\; F_s(z_0) \;+\; E_s(z_0) \;\le$$

$$\le \int_{Q_{z>z_0,\tau}} \left(u^k\right)^2 (z-z_0)^s dxdydt \;+\; sa_0e^{\alpha T}\int_{Q_{z>z_0,\tau}} \left|u_z^k\right|^{p-1} |u|^k (z-z_0)^{s-1} dxdydt\,. \tag{16}$$

Зауважимо, що

$$\int_{Q_{z>z_0,\tau}} \left|u_z^k\right|^{p-1}\left|u^k\right|(z-z_0)^{s-1} dxdydt \;\le$$

$$\le \int_{Q_{z>z_0,\tau}} \left|u_z^k\right|^{p-1}(z-z_0)^{s/p'}\left|u^k\right|(z-z_0)^{s/p-1} dxdydt\,.$$

Тоді

$$a_0se^{\alpha T}\int_{Q_{z>z_0\tau}} \left|u_z^k\right|^{p-1} |u|^k (z-z_0)^{s-1} dxdydt \;\le$$

$$\le\; a_0se^{\alpha T}\left(\int_{Q_{z>z_0,\tau}} \left|u_z^k\right|^{p}(z-z_0)^{s} dxdydt\right)^{1/p'} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{Q_{z>z_0,\tau}} \left| u^k \right|^p (z - z_0)^{s-p} dxdydt \right)^{1/p} \le$$

$$\le a_0 s e^{\alpha T} (E_s(z_0))^{1/p'} \left(\int\limits_{Q_{z>z_0,\tau}} \left| u^k \right|^p (z - z_0)^{s-p} dxdydt \right)^{1/p},$$

де $s \ge p$. Звідси, врахувавши (16), матимемо

$$F_s(z_0) + E_s(z_0) \le C_4 \int\limits_{Q_{z>z_0,T}} \left(u^k \right)^2 (z - z_0)^s dxdydt +$$

$$+ s a_0 e^{\alpha T} (E_s(z_0))^{1/p'} \left(\int\limits_{Q_{z>z_0,T}} \left| u^k \right|^p (z - z_0)^{s-p} dxdydt \right)^{1/p}. \tag{17}$$

З (17) отримуємо оцінку

$$\int\limits_D \int\limits_{\Omega_{z>z_0}} \left(u^k \right)^2 (z - z_0)^s dxdy \le C_4 p \int\limits_{Q_{z>z_0,T}} \left(u^k \right)^2 (z - z_0)^s dxdydt + A,$$

де $A = \left(a_0 s e^{\alpha T} \right)^p \int_{Q_{z>z_0,T}} \left| u^k \right|^p (z - z_0)^{s-p} dxdydt$, і завдяки нерівності Гронуолла – Беллмана одержуємо $\int_{Q_{z>z_0,T}} \left(u^k \right)^2 (z - z_0)^s dxdydt \le ATe^{C_4 pT}$.

Врахувавши одержану оцінку, з (17) також знаходимо оцінку для $E_s(z_0)$:

$$E_s(z_0) \le C_5 \int\limits_{Q_{z>z_0,T}} \left| u^k \right|^p (z - z_0)^{s-p} dxdydt, \tag{18}$$

де стала C_5 залежить від a_0, s, p, T. З нерівності Фрідріхса маємо

$$\int\limits_0^T \int\limits_D \int\limits_{\Omega_{z>z_0}} (z - z_0)^{s-p} \left| u^k \right|^p dxdydt \le \frac{l_1^p}{p} E_{s-p}(z_0). \tag{19}$$

Зауважимо, що

$$\int\limits_D \int\limits_{\Omega_{z>z_0}} (z - z_0)^{s-p} \sum_{i=1}^n \left| u_{x_i}^k \right|^p dxdy =$$

$$= \int\limits_D \int\limits_{\Omega_{z>z_0}} (z - z_0)^{s-p} \sum_{i=1}^n \left| u_{x_i}^k \right|^{p(s-p)/s} \left| u_{x_i}^k \right|^{p^2/s} dxdy.$$

Тому на підставі нерівності Гельдера $E_{s-p}(z_0) \le (E_s(z_0))^{(s-p)/s} E_0(z_0)^{p/s}$. Звідси та з (18) і (19) випливає

$$E_s(z_0) \le C_3 E_s^{(s-p)/s}(z_0) (E_0(z_0))^{p/s},$$

$$(E_s(z_0))^{1-\frac{s-p}{s}} \le C_3(E_0(z_0))^{p/s},$$

$$E_s(z_0) \le C_3^{s/p} E_0(z_0).$$

За нерівністю Гельдера $E_1(z_0) \le E_s^{1/s}(z_0)(E_0(z_0))^{(s-1)/s}$. Отже, $E_1(z_0) \le$ $\le C_3^{1/p}(E_0(z_0))^{1/s+(s-1)/s} = C_3^{1/p}E_0(z_0)$. Оскільки $E_1' = -E_0$, то

$$E_1(z_0) \le -C_3^{1/p}E_1'(z_0). \tag{20}$$

Розв'язуємо нерівність (20): $E_1(z_0) \le E_1(0)\, e^{-(1/A_1)z_0}$, де $A_1 = C_3^{1/p}$.

Зауважимо, що

$$E_1(z_0) = \int_{z_0}^{\infty}(\xi - z_0)\,g(\xi)\,d\xi = \int_{z_0}^{2z_0}(\xi - z_0)\,g(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_{2z_0}^{\infty}(\xi - z_0)\,g(\xi)\,d\xi \ge z_0 E_0(2z_0).$$

Звідси $E_1(0) \le C_3E_0(0)$, $E_1(z_0) \le C_3E_0(0)e^{-z_0/C_3}$, $E_0(2z_0) \le E_0(0)e^{-z_0/C_3}$, $z_0 \ge C_3$.

Перейшовши у цій нерівності до границі при $k \to \infty$, отримаємо твердження теореми.

1. *Kolmogorov A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**. – P. 116 – 117.
2 *Citty G., Pascucci A., Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance // Different. and Integral Equat. – 2001. – **14**, № 6. – P. 701 – 738.
3. *Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S.* Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance // Nonlinear Problems in Math. Phys. and Relat. Top. II. In honour of Proff. O. A. Ladyzhenskaya (Int. Math. Ser. 2). – New York, NY: Kluwer Acad. Publ., 2002. – P. 243 – 265.
4. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1482 – 1496.
5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях задачи Коши для вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова с $2\vec{b}$ -параболической частью по основной группе переменных // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 11. – С. 1536 – 1545.
6. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.
7. *Лавренюк С. П., Оліскевич М. О.* Мішана задача для напівлінійного ультрапараболічного рівняння у необмеженій області // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 12. – С. 1661 – 1673.
8. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією // Там же. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1192 – 1210.
9. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для ультрапараболічного рівняння в необмеженій області // Там же. – 2002. – **54**, № 8. – С. 1053 – 1066.
10. *Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння // Наук. вісн. Черн. ун-ту. Математика. – 2002. – Вип. 134. – С. 97 – 103.
11. *Терсенов С. А.* Об основных краевых задачах для одного ультрапараболического уравнения // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 6. – С. 1413 – 1430.
12. *Lascialfari F., Morbidelli D.* A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Communs Part. Different. Equat. – 1998. – **23**, № 5, 6. – P. 847 – 868.

13. *Lavrenyuk S., Protsakh N.* Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain // Tatra Mt. Math. Publ. – 2007. – **38**. – P. 131 – 146.
14. *Bramanti M., Cerutti M. C., Manfredini M.* L^p estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coefficients // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – **200**. – P. 332 – 354.
15. *Kogoj A. E., Lanconelli E.* An invariant Harnack inequality for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations // Mediter. J. Math. – 2004. – **1**. – P. 51 – 80.
16. *Schonbek M. E., Süli E.* Decay of the total variation and Hardy norms of solutions to parabolic conservation laws // Nonlinear Anal. – 2001. – **45**. – P. 515 – 528.
17. *Bernis F.* Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // Houston J. Math. – 1988. – **14**. – P. 319 – 352.
18. *Lax P. D., Phillips R. S.* Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // Communs Pure and Appl. Math. – 1960. – **13**. – P. 427 – 455.

Одержано 20.08.08,
після доопрацювання — 24.03.09