УДК 517.929.8

В. М. Харьков (Одес. нац. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Asymptotic representations for a class of solutions of a second-order difference equation with power nonlinearity are established.

Встановлено асимптотичні зображення для одного класу розв'язків різницевого рівняння другого порядку зі степеневою нелінійністю.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Рассматривается разностное уравнение второго порядка

$$\Delta^2 y_n = \alpha p_n |y_n|^\sigma \operatorname{sign} y_n, \tag{1.1}$$

где $\alpha \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ и p_n положительно при $n \in \mathbb{N}$, для которого исследуется вопрос о существовании и асимптотическом представлении $P(\lambda)$-решений, определяемых следующим образом.

Определение. *Решение* $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$ *уравнения* (1.1) *будем называть* $P(\lambda)$*-решением, если имеют место соотношения*

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = y_0, \qquad y_0 = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n\Delta^2 y_n}{\Delta y_n} = \lambda. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) является дискретным аналогом известного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера, асимптотические свойства решений которого достаточно подробно изучены в работах [1 – 6]. В настоящей статье предпринята попытка перенести методику исследования из [6] на аналогичный класс разностных уравнений, дополнив при этом результаты, изложенные в [7, 8], где для уравнения вида (1.1) получены условия существования решений, асимптотически эквивалентных cn, а также принадлежащих классам функций c_0 и l_2.

Сформулируем полученные результаты в виде теорем.

Теорема 1.1. *Пусть* $\sum_{m=1}^{+\infty} m p_m = +\infty$. *Тогда для существования* $P(\lambda)$*-решений,* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$, *уравнения* (1.1) *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\alpha\lambda(1-\sigma) > 0, \qquad \left| \int\limits_B^{y_0} \frac{dy}{|y|^\sigma} \right| = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 p_n}{\sum_{m=1}^{n-1} m p_m} = (1-\sigma)(1+\lambda), \tag{1.3}$$

где B *равно* 1, *если* y_0 *отлично от* $-\infty$, *и* -1 *в противном случае. Более того, каждое положительное** $P(\lambda)$*-решение,* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$, *допускает при*

*Называя решение положительным, считаем, что оно положительно, начиная с некоторого $n' \in \mathbb{N}$.

$n \to +\infty$ асимптотические представления

$$y_n = \left(\frac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} m p_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \big[1+o(1)\big],$$
$$\Delta y_n = \frac{\lambda+1}{n}\left(\frac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} m p_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \big[1+o(1)\big]. \tag{1.4}$$

Теорема 1.2. *Пусть $\sum_{m=1}^{+\infty} m p_m < +\infty$. Тогда для существования $P(\lambda)$-решений, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0\right\}$, уравнения* (1.1) *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\alpha\lambda(1-\sigma) < 0, \qquad \left|\int\limits_B^{y_0} \frac{dy}{|y|^\sigma}\right| < +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 p_n}{\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m} = (\sigma-1)(1+\lambda). \tag{1.5}$$

Более того, каждое положительное $P(\lambda)$-решение, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0\}$, допускает при $n \to +\infty$ асимптотические представления

$$y_n = \left(\frac{-\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \big[1+o(1)\big],$$
$$\Delta y_n = \frac{\lambda+1}{n}\left(-\frac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \big[1+o(1)\big]. \tag{1.6}$$

***Замечание* 1.1.** Как следует из (1.2), любое $P(\lambda)$-решение уравнения (1.1) при $\lambda \neq 0$, начиная с некоторого момента, будет монотонным и знакоопределенным вместе со своей первой разностью. Кроме того, так как замена $v_n = -y_n$ не меняет вида исследуемого уравнения, наряду с решением одного знака будет существовать равное ему по модулю решение противоположного знака.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть последовательность $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ при $n \to +\infty$ имеет отличный от нуля конечный предел B, а последовательность $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ ограничена. Тогда найдется номер $n_0 \geq 1$ такой, что при $n \geq n_0$ имеет место неравенство*

$$\left|\prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)\sum_{k=\alpha(n_0,n)}^{\beta(n,+\infty)} \frac{a_k}{k}\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{b_s}{s}\right)^{-1}\right| \leq$$
$$\leq 3\sup\left\{\left|\frac{a_k}{b_k}\right| : k = \overline{\alpha(n_0,n), \beta(n,+\infty)}\right\}, \tag{2.1}$$

где

$$\alpha(n_0,n) = \begin{cases} n_0, & \textit{если } B<0, \\ n, & \textit{если } B>0, \end{cases} \qquad \beta(n,+\infty) = \begin{cases} n, & \textit{если } B<0, \\ +\infty, & \textit{если } B>0. \end{cases}$$

Доказательство. В качестве n_0 выберем номер, начиная с которого имеют место неравенства

$$0 < \frac{|b_n|}{n} < \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\frac{n+1+b_{n+1}}{n}\right| < 3$$

и

$$\sum_{k=n_0}^{n-1}\left|\prod_{s=k}^{n}\left(1-\frac{|b_s|}{s}\right)-\prod_{s=k+1}^{n}\left(1-\frac{|b_s|}{s}\right)\right| < 2.$$

Такой выбор возможен вследствие того, что $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$, где $B \neq 0$. Отсюда, учитывая равенства

$$-\frac{n+1+b_{n+1}}{b_{n+1}}\left(\prod_{k=n_0}^{n+1}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)^{-1}-\prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)^{-1}\right)=\prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)^{-1},$$

$$\prod_{k=s}^{n}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)-\prod_{k=s+1}^{n}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)=\frac{b_s}{s}\prod_{k=s+1}^{n}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)$$

$$\text{при} \quad s = n_0, \ldots, n-1$$

и сходимость ряда $\sum_{k=n_0}^{+\infty}\frac{a_k}{k}\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{|b_s|}{s}\right)^{-1}$, получаем:

1) при $B > 0$

$$\left|\prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{a_k}{k}\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{b_s}{s}\right)^{-1}\right| =$$

$$=\left|\prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)\right|\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{a_k}{k}\frac{k+1+b_{k+1}}{b_{k+1}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\prod_{s=n_0}^{k+1}\left(1+\frac{b_s}{s}\right)^{-1}-\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{b_s}{s}\right)^{-1}\right]\right| \le$$

$$\le \prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)\sup_{\overline{k=n,+\infty}}\left|\frac{a_k}{k}\frac{k+1+b_{k+1}}{b_{k+1}}\right|\times$$

$$\times\sum_{k=n}^{+\infty}\left|\prod_{s=n_0}^{k+1}\left(1+\frac{b_s}{s}\right)^{-1}-\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{b_s}{s}\right)^{-1}\right| \le$$

$$\le \sup_{\overline{k=n,+\infty}}\left|\frac{a_k}{b_k}\frac{b_k}{b_{k+1}}\frac{k+1+b_{k+1}}{k}\right| \le 3\sup_{\overline{k=n,+\infty}}\left|\frac{a_k}{b_k}\right|;$$

2) при $B < 0$

$$\left|\prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{b_k}{k}\right)\sum_{k=n_0}^{n}\frac{a_k}{k}\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{b_s}{s}\right)^{-1}\right| \le$$

$$\le\left|\sum_{k=n_0}^{n-1}\frac{a_k}{k}\prod_{s=k+1}^{n}\left(1+\frac{b_s}{s}\right)+\frac{a_n}{n}\right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{a_k}{b_k} \left[\prod_{s=k}^{n} \left(1 + \frac{b_s}{s} \right) - \prod_{s=k+1}^{n} \left(1 + \frac{b_s}{s} \right) \right] + \frac{a_n}{n} \right| \leq$$

$$\leq \sup_{k=\overline{n_0,n}} \left| \frac{a_k}{b_k} \right| \left(\sum_{k=n_0}^{n-1} \left| \prod_{s=k}^{n} \left(1 + \frac{b_s}{s} \right) - \prod_{s=k+1}^{n} \left(1 + \frac{b_s}{s} \right) \right| + \frac{|b_n|}{n} \right) \leq$$

$$\leq 3 \sup_{k=\overline{n_0,n}} \left| \frac{a_k}{b_k} \right| .$$

Тем самым требуемая оценка установлена.

Лемма 2.2. *Пусть в системе разностных уравнений*

$$\Delta z_n^1 = \frac{1}{n} \left[g_n^1 + P_n^{11} z_n^1 + P_n^{12} z_n^2 + R_1(n, z_n^1, z_n^2) \right],$$
$$\Delta z_n^2 = \frac{1}{n} \left[g_n^2 + P_n^{21} z_n^1 + P_n^{22} z_n^2 + R_2(n, z_n^1, z_n^2) \right] \tag{2.2}$$

последовательности g_n^i, P_n^{ij}, $i, j = 1, 2,$ *удовлетворяют предельным соотношениям*

$$\lim_{n\to+\infty} g_n^1 = \lim_{n\to+\infty} g_n^2 = \lim_{n\to+\infty} P_n^{21} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} P_n^{11} = P^{11}, \qquad \lim_{n\to+\infty} P_n^{12} = P^{12}, \tag{2.3}$$
$$\lim_{n\to+\infty} P_n^{22} = P^{22}, \qquad P^{11}P^{22} \neq 0,$$

а функции $R_i(n, z_n^1, z_n^2)$ *такие, что*

$$R_i(n, 0, 0) = 0,$$
$$\lim_{\max\{|u_1|,|u_2|,|v_1|,|v_2|\}\to 0} \frac{|R_i(n, u_1, u_2) - R_i(n, v_1, v_2)|}{|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.4}$$

Тогда система (2.2) *имеет решение* (z_n^1, z_n^2), *стремящееся к вектору* $(0, 0)$ *при* $n \to +\infty$.

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{|P_n^{22}|}{72} \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{|P_n^{11}|}{|P_n^{12}| + 1}, \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{|P_n^{11}|}{36}, \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{|P_n^{22}|}{36} \right\}$$

и для него, с учетом (2.3), (2.4), выберем $b \in (0, 1/2)$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\big| R_i(m, u^1, u^2) - R_i(m, u^3, u^4) \big| \leq \varepsilon_0 \big(|u^1 - u^3| + |u^2 - u^4| \big)$$
$$\text{при} \quad |u^j| \leq b, \quad j = \overline{1,4}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\sup_{n\geq n_0} \left\{ \left| \frac{g_n^i}{bP_n^{ii}} \right|, \left| \frac{P_n^{21}}{P_n^{22}} \right| \right\} < \min \left\{ \frac{\varepsilon_0}{\inf\limits_{n\geq n_0} |P_n^{11}|}, \frac{\varepsilon_0}{\inf\limits_{n\geq n_0} |P_n^{22}|} \right\}, \tag{2.5}$$

$$\sup_{n\geq n_0} \frac{|P_n^{12}|}{|P_n^{11}|} \inf_{n\geq n_0} \frac{|P_n^{11}|}{|P_n^{12}| + 1} < 1, \qquad \inf_{n\geq n_0} \left\{ |P_n^{ii}|, \, 1 + \frac{P_n^{ii}}{n} \right\} > 0,$$

$$\sup_{n\geq n_0}\left\{\left|\frac{n+P_n^{ii}}{n}\right|, \left|\prod_{s=n_0}^{n}\left(1-\frac{|P_s^{ii}|}{s}\right)-1+\frac{|P_n^{ii}|}{n}\right|+\frac{|P_n^{ii}|}{n}\right\}<3,$$

а также введем функции

$$\alpha_i(n_0,n)=\begin{cases} n_0, & \text{если } P^{ii}<0,\\ n, & \text{если } P^{ii}>0,\end{cases}$$

$$\beta_i(n,+\infty)=\begin{cases} n, & \text{если } P^{ii}<0,\\ +\infty, & \text{если } P^{ii}>0,\end{cases} \qquad i=1,2.$$

Тогда, согласно (2.1) и (2.5), для любых z^1, z^2 таких, что $|z^1|\leq b$ и $|z^2|\leq b$, при каждом $i=\overline{1,2}$ и $n\geq n_0$ получим

$$\left|\prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{P_k^{ii}}{k}\right)\sum_{k=\alpha_i(n_0,n)}^{\beta_i(n,+\infty)}\frac{R_i(k,z^1,z^2)}{k}\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{P_s^{ii}}{s}\right)^{-1}\right|\leq\frac{6\varepsilon_0 b}{\inf\limits_{n\geq n_0}|P_n^{ii}|},$$

$$\left|\prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{P_k^{ii}}{k}\right)\sum_{k=\alpha_i(n_0,n)}^{\beta_i(n,+\infty)}\frac{g_k^i}{k}\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{P_s^{ii}}{s}\right)^{-1}\right|<$$

$$<\min\left\{\frac{3b\varepsilon_0}{\inf\limits_{n\geq n_0}|P_n^{11}|},\ \frac{3b\varepsilon_0}{\inf\limits_{n\geq n_0}|P_n^{22}|}\right\}, \tag{2.6}$$

$$\left|\prod_{k=n_0}^{n}\left(1+\frac{P_k^{22}}{k}\right)\sum_{k=\alpha_1(n_0,n)}^{\beta_1(n,+\infty)}\frac{P_k^{21}z_k^1}{k}\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{P_s^{22}}{s}\right)^{-1}\right|<$$

$$<\min\left\{\frac{3b\varepsilon_0}{\inf\limits_{n\geq n_0}|P_n^{11}|},\ \frac{3b\varepsilon_0}{\inf\limits_{n\geq n_0}|P_n^{22}|}\right\}.$$

Пусть l_∞ — пространство ограниченных последовательностей действительных чисел, на котором задана норма

$$\|x\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|,\quad x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)\in l_\infty,$$

и S_b — подмножество тех из них, для которых $\|x\|\leq b$.

Рассмотрим оператор $F\colon S_b\to l_\infty$, определенный рекуррентным соотношением

$$F\big((x_1,x_2,\ldots,x_{2n+1},x_{2n+2},\ldots)\big)=\big(F_1(x),F_2(x),\ldots,F_{2n+1}(x),F_{2n+2}(x),\ldots\big), \tag{2.7}$$

где

$$F_1(x)=x_1,\qquad F_2(x)=x_2,$$

$$F_{2n+1}(x)=(-\operatorname{sign}P^{11})\prod_{k=n_0}^{n_0+n-1}\left(1+\frac{P_k^{11}}{k}\right)\sum_{k=\alpha_1(n_0,n_0+n)}^{\beta_1(n_0+n-1,+\infty)}\left[\frac{g_k^1}{k}+\right.$$

$$+\frac{P_k^{12}F_{2(k-n_0)+2}(x)}{k}+\frac{R_1(k,x_{2(k-n_0)+1},F_{2(k-n_0)+2})}{k}\Bigg]\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{P_s^{11}}{s}\right)^{-1},$$

$$F_{2n+2}(x)=(-\operatorname{sign}P^{22})\prod_{k=n_0}^{n_0+n-1}\left(1+\frac{P_k^{22}}{k}\right)\sum_{k=\alpha_2(n_0,n_0+n)}^{\beta_2(n_0+n-1,+\infty)}\Bigg[\frac{g_k^2}{k}+$$

$$+\frac{P_k^{21}x_{2(k-n_0)+1}}{k}+\frac{R_2(k,x_{2(k-n_0)+1},x_{2(k-n_0)+2})}{k}\Bigg]\prod_{s=n_0}^{k}\left(1+\frac{P_s^{22}}{s}\right)^{-1},$$

$$n=1,2,\ldots.$$

Принимая во внимание введенные обозначения, а также неравенства (2.6), для произвольных элементов x, y множества S_b получаем следующие оценки:

$$\|F(x)\|\le b \quad \text{и} \quad \|F(x)-F(y)\|\le\frac{3}{4}\|x-y\|.$$

Значит, во-первых, отображение F действует из пространства S_b в себя, а во-вторых, является сжимающим. Следовательно, отображение F имеет неподвижную точку $c_0=(c_{01},\ldots,c_{0n},\ldots)\in S_b$. Тем самым получаем последовательность $(c_{0\,2n-1},c_{0\,2n})_{n=1}^{+\infty}$, которая, как следует из (2.7), является решением системы уравнений (2.2). Покажем, что это решение при $n\to+\infty$ стремится к вектору $(0,0)$.

Допустим противное. Тогда

$$\limsup_{n\to+\infty}|c_{0n}|=C,\quad 0<C\le b. \tag{2.8}$$

Зафиксируем $\varepsilon=C/18$. В силу (2.8) можно выбрать n_1 так, чтобы при $n>n_1$ выполнялось неравенство

$$|c_{0n}|<C+\varepsilon.$$

Далее, из (2.6) и (2.7) следует существование такого n_2 $(n_2>n_1)$, что при $n>n_2$ имеет место оценка

$$\max_{i=\overline{1,2}}\left|F_{2n+i}(c_0)\right|\le\varepsilon+\frac{5}{6}\sup_{n\in(n_2,+\infty)}\max_{i=\overline{1,2}}|c_{02n+i}|<\varepsilon+\frac{5}{6}(C+\varepsilon).$$

С другой стороны, из (2.8) следует существование последовательности $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$, стремящейся к $+\infty$, для которой при $l\ge l_0>2$ выполняется

$$\max_{i=\overline{1,2}}|c_{02n_l+i}|>C-\varepsilon.$$

Значит, так как $(c_{0\,2n+1},c_{0\,2n+2})_{n=1}^{+\infty}$ — неподвижная точка оператора F, то при $l\ge l_0$

$$C-\varepsilon<\max_{i=\overline{1,2}}|c_{02n_l+i}|=\max_{i=\overline{1,2}}\left|F_{2n_l+i}(c_0)\right|\le\varepsilon+\frac{5}{6}(C+\varepsilon)$$

или

$$C\le 17\varepsilon=\frac{17C}{18},$$

что невозможно. Получили противоречие.

Таким образом, доказано существование решения $(c_{0\,2n+1}, c_{0\,2n+2})_{n=1}^{+\infty}$ системы (2.2), стремящегося к вектору $(0,0)$ при $n \to +\infty$.

3. Доказательства основных теорем. ***Доказательство теоремы* 1.1.** *Необходимость.* Пусть $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$ — $P(\lambda)$-решение уравнения (1.1), где $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0\right\}$. Учитывая замечание 1.1, без ограничения общности будем полагать, что $y_n > 0$ при $n \geq 1$.

Обозначим $a_n = \dfrac{\lambda \Delta y_n}{\alpha n p_n \, |y_n|^\sigma} - 1$. Тогда имеет место равенство

$$\frac{\Delta y_n}{y_n^\sigma} = \frac{\alpha n p_n}{\lambda}[1 + a_n], \tag{3.1}$$

из которого с учетом определения $P(\lambda)$-решений следуют асимптотические соотношения

$$a_n = o(1) \quad \text{и} \quad \frac{\Delta y_n}{y_n^\sigma} = \frac{\alpha n p_n}{\lambda}\big[1 + o(1)\big] \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{3.2}$$

Суммируя обе части (3.1) от 1 до $n-1$, получаем равенство

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{\Delta y_m}{y_m^\sigma} = \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{m=1}^{n-1} m p_m [1 + a_m]. \tag{3.3}$$

Покажем, что правая часть (3.3) при $n \to +\infty$ асимптотически эквивалентна выражению $\dfrac{\alpha}{\lambda} \sum_{m=1}^{n-1} m p_m$. Для этого достаточно установить справедливость соотношения

$$\frac{\sum_{m=1}^{n-1} m p_m [1 + a_m]}{\sum_{m=1}^{n-1} m p_m} = 1 + o(1) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ и $\sum_{m=1}^{+\infty} m p_m = +\infty$, существуют номера N_1, N_2 и N_3, где N_1 — номер, начиная с которого $|a_n| < \varepsilon/3$, N_2 — номер, начиная с которого

$$\left| \frac{\sum_{m=1}^{N_1} m p_m [1 + a_m]}{\sum_{m=1}^{n} m p_m} \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и N_3 — номер, начиная с которого

$$\left[1 - \frac{\varepsilon}{3}\right] \frac{\sum_{m=N_1+1}^{n-1} m p_m}{\sum_{m=1}^{n-1} m p_m} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любого $n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ имеет место двусторонняя оценка

$$1 - \varepsilon < \frac{\sum_{m=1}^{N_1} m p_m [1 + a_m] + \sum_{m=N_1+1}^{n-1} m p_m [1 + a_m]}{\sum_{m=1}^{n-1} m p_m} < 1 + \varepsilon.$$

Следовательно, установлена справедливость предельного соотношения

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n-1} mp_m[1+a_m]}{\sum_{m=1}^{n-1} mp_m}=1.$$

Используя это соотношение, переписываем (3.3) в виде

$$\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\Delta y_m}{y_m^\sigma}=\frac{\alpha}{\lambda}\big[1+o(1)\big]\sum_{m=1}^{n-1} mp_m \quad \text{при} \quad n\to+\infty, \tag{3.4}$$

откуда следует расходимость ряда $\sum_{m=1}^{+\infty}\dfrac{\Delta y_m}{y_m^\sigma}$, а значит, применяя теоремы Коши и Штольца, имеем предельные равенства

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\Delta y_n}{y_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\Delta(n\Delta y_n)}{\Delta y_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\Delta^2 y_n}{\Delta y_n}+1=\lambda+1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n^{1-\sigma}}{\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{\Delta y_k}{y_k^\sigma}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n\big((1+\Delta y_n/y_n)^{1-\sigma}-1\big)}{\Delta y_n}=1-\sigma.$$

Отсюда, учитывая соотношения (3.2), (3.4), получаем расходимость интеграла $\left|\displaystyle\int_B^{y_0}\frac{dy}{|y|^\sigma}\right|$ и следующие асимптотические представления $P(\lambda)$-решения уравнения (1.1) вместе с его первой разностью:

$$y_n=\left(\frac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} mp_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad n\to+\infty,$$

$$\Delta y_n=\frac{\alpha np_n}{\lambda}\left(\frac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} mp_m\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad n\to+\infty, \tag{3.5}$$

а также знаковое условие из (1.3).

Теперь рассмотрим выражение $\dfrac{n\Delta y_n}{y_n}$. Как следует из (3.5), это выражение асимптотически эквивалентно $\dfrac{n^2p_n}{(1-\sigma)\sum_{m=1}^{n-1} mp_m}$ при $n\to+\infty$. С другой стороны, как было отмечено выше, имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\Delta y_n}{y_n}=1+\lambda,$$

а значит,

$$\frac{n^2p_n}{\sum_{m=1}^{n-1} mp_m}=(1-\sigma)(1+\lambda)+o(1) \quad \text{при} \quad n\to+\infty,$$

$$\Delta y_n=\frac{\lambda+1}{n}\left(\frac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} mp_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Таким образом, установлены необходимость указанных в теореме условий и асимптотические представления (1.4).

Достаточность. Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$ и выполняется условие (1.3). Покажем, что существует $P(\lambda)$-решение уравнения (1.1) с асимптотическими представлениями (1.4).

С помощью замены переменных

$$y_n = \left(\frac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} mp_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}[1+u_n^1],$$
$$\Delta y_n = \frac{\lambda+1}{n}\left(\frac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} mp_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}[1+u_n^2] \tag{3.6}$$

сведем уравнение (1.1) к системе

$$\Delta u_n^1 = (F_n - 1)(1+u_n^1) + \frac{\lambda+1}{n}F_n(1+u_n^2),$$
$$\Delta u_n^2 = -(1+u_n^2)\left(1 - \frac{n+1}{n}F_n\right) + \frac{\lambda}{(\lambda+1)(1-\sigma)}G_n(1+u_n^1)^{\sigma}, \tag{3.7}$$

в которой

$$F_n = \left(1 - \frac{np_n}{\sum_{m=1}^{n} mp_m}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \qquad G_n = (n+1)p_n\frac{\left(\sum_{m=1}^{n-1} mp_m\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{m=1}^{n} mp_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}.$$

Как следует из (1.3), введенные дискретные функции F_n и G_n допускают при $n \to +\infty$ асимптотические представления

$$F_n = 1 - \frac{np_n}{(1-\sigma)\sum_{m=1}^{n} mp_m} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$G_n = \frac{(\lambda+1)(1-\sigma)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.8}$$

Перепишем теперь систему (3.7) в виде

$$\Delta u_n^1 = \frac{1}{n}\left[f_n^1 + A_n^{11}u_n^1 + A_n^{12}u_n^2\right],$$
$$\Delta u_n^2 = \frac{1}{n}\left[f_n^2 + A_n^{21}u_n^1 + A_n^{22}u_n^2 + R(n, u_n^1)\right], \tag{3.9}$$

где

$$f_n^1 = n(F_n - 1) + (\lambda+1)F_n, \qquad f_n^2 = (n+1)F_n - n + \frac{\lambda}{(\lambda+1)(1-\sigma)}nG_n,$$
$$A_n^{11} = n(F_n - 1), \qquad A_n^{12} = (\lambda+1)F_n,$$

$$A_n^{21} = \frac{\lambda\sigma}{(\lambda+1)(1-\sigma)} nG_n, \qquad A_{22}(x) = (n+1)F_n - n,$$

$$R(n, u_n^1) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)(1-\sigma)} nG_n \big[(1+u_n^1)^\sigma - 1 - \sigma u_n^1\big].$$

Из соотношений (3.8) следует

$$\begin{gathered} \lim_{n\to+\infty} f_n^1 = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n^2 = 0, \\ \lim_{n\to+\infty} A_n^{11} = -1-\lambda, \qquad \lim_{n\to+\infty} A_n^{12} = \lambda+1, \\ \lim_{n\to+\infty} A_n^{21} = \lambda\sigma, \qquad \lim_{n\to+\infty} A_n^{22} = -\lambda. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Кроме того, имеем $R(n,0) = 0$,

$$\big|R(n,u) - R(n,v)\big| \le M(u,v)|u-v| \quad \text{при} \quad \max\big\{|u|,|v|\big\} < 1, \tag{3.11}$$

где

$$M(u,v) = \sup_{n\in N}\left|\frac{\lambda\sigma}{(\lambda+1)(1-\sigma)} nG_n\right| \max_{|\xi|\le\max\{|u|,|v|\}} \big|(1+\xi)^{\sigma-1} - 1\big|,$$

$$\lim_{\max\{|u|,|v|\}\to 0} M(u,v) = 0.$$

Положим $A^0 = (A_{ij}^0)_{i,j=1}^2$, где $A_{ij}^0 = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n^{ij}$. Поскольку при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$ характеристический многочлен матрицы A^0 не имеет корней с нулевой вещественной частью, возможны лишь два случая: 1) оба корня вещественны и отличны от нуля либо 2) корни комплексно сопряжены и их вещественная часть отлична от нуля.

1. Пусть μ_1, μ_2 — собственные значения A^0 такие, что $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда существует постоянная обратимая вещественная матрица L такая, что матрица $L^{-1}A^0L$ является верхнетреугольной и на ее главной диагонали расположены числа μ_1, μ_2. Следовательно, с помощью замены переменных

$$u_n^T = Lz_n^T, \tag{3.12}$$

где $u_n = (u_n^1, u_n^2)$ и $z_n = (z_n^1, z_n^2)$, система (3.9) сведется к системе с почти треугольной линейной частью.

2. Пусть собственные значения μ_1 и μ_2 представимы в виде $\mu_{1,2} = a \pm bi$, где $a \ne 0$. Тогда существует постоянная обратимая вещественная матрица D такая, что

$$D^{-1}A^0D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Следовательно, с помощью замены переменных

$$u_n^T = T_nDz_n^T, \tag{3.13}$$

где $u_n = (u_n^1, u_n^2)$, $z_n = (z_n^1, z_n^2)$,

$$T_n = \begin{pmatrix} \cos(b\ln n) & -\sin(b\ln n) \\ \sin(b\ln n) & \cos(b\ln n) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty} n\,T_n^{-1}D^{-1}A^0DT_n = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

система (3.9) будет преобразована в систему с почти диагональной линейной частью.

Итак, в результате указанных выше преобразований система (3.9) сводится к виду

$$\begin{aligned} \Delta z_n^1 &= \frac{1}{n}\left[g_n^1 + P_n^{11}z_n^1 + P_n^{12}z_n^2 + R_1(n, z_n^1, z_n^2)\right], \\ \Delta z_n^2 &= \frac{1}{n}\left[g_n^2 + P_n^{21}z_n^1 + P_n^{22}z_n^2 + R_2(n, z_n^1, z_n^2)\right], \end{aligned} \tag{3.14}$$

причем в силу (3.10)

$$\lim_{n\to+\infty} g_n^1 = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} g_n^2 = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n^{11} = P^{11}, \qquad \lim_{n\to+\infty} P_n^{12} = P^{12},$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n^{21} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} P_n^{22} = P^{22}, \qquad R_i(n,0,0) = 0,$$

где $P^{12} \in \{0,1\}$, $P^{ii} = \mu_i$, если корни характеристического многочлена матрицы A^0 вещественны, и $P^{ii} = a$, $i = 1,2$, в противном случае. Кроме того, из (3.11) следует существование $\delta > 0$ такого, что для всех натуральных n и вещественных u_1, u_2, v_1, v_2, удовлетворяющих неравенству $\max\big\{|u_1|,|u_2|,|v_1|,|v_2|\big\} < \delta$, справедливы оценки

$$\big|R_i(n,u_1,u_2) - R_i(n,v_1,v_2)\big| \le$$

$$\le M_i(u_1,u_2,v_1,v_2)\big(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|\big), \quad i = 1,2,$$

в которых

$$\lim_{\max\{|u_1|,|u_2|,|v_1|,|v_2|\}\to 0} M_i(u_1,u_2,v_1,v_2) = 0.$$

Отсюда и из леммы 2 следует существование решения $(c_{0\,2n+1}, c_{0\,2n+2})_{n=1}^{+\infty}$ системы (3.14), стремящегося к вектору $(0,0)$ при $n \to +\infty$. Ему в силу замен (3.12), (3.13), (3.6) соответствует решение уравнения (1.1), допускающее при $n \to \to +\infty$ асимптотические представления (1.4).

Осталось показать, что полученное выше решение уравнения (1.1) будет принадлежать классу $P(\lambda)$-решений. Действительно, из (3.6) следует, что предел y_n при $n \to +\infty$ равен либо 0, либо $+\infty$ и, кроме того,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\Delta^2 y_n}{\Delta y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha n p_n y_n^\sigma}{\Delta y_n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha n p_n \left(\dfrac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} m p_m\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}{\dfrac{\lambda+1}{n}\left(\dfrac{\alpha(1-\sigma)}{\lambda}\sum_{m=1}^{n-1} m p_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda n^2 p_n}{(1+\lambda)(1-\sigma)\sum_{m=1}^{n-1} m p_m} = \lambda.$$

Теорема 1.1 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.2.** *Необходимость.* Пусть $(y_n)_{n=1}^{+\infty}$ — $P(\lambda)$-решение уравнения (1.1), где $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$. Как и при доказательстве теоремы 1.1, не ограничивая общности, будем полагать, что $y_n > 0$ при $n \geq 1$.

Далее, как и ранее, обозначим $a_n = \dfrac{\lambda \Delta y_n}{\alpha n p_n |y_n|^\sigma} - 1$. Тогда имеют место равенство (3.1) и асимптотические соотношения (3.2).

Покажем, что правая часть равенства (3.1) суммируема и справедливо соотношение

$$\frac{\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m [1 + a_m]}{\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m} = 1 + o(1) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ и $\sum_{m=1}^{+\infty} m p_m < < \infty$, существует номер N, начиная с которого $|a_n| < \min\{1, \varepsilon\}$. Тогда для любого $r \geq N$ выполняется неравенство

$$\sum_{m=N}^{r} m p_m [1 + a_m] < 2 \sum_{m=N}^{r} m p_m,$$

из которого следует сходимость ряда $\sum_{m=1}^{+\infty} m p_m [1 + a_m]$. Следовательно, для всех $n \geq N$ имеет место двусторонняя оценка

$$1 - \varepsilon < \frac{\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m [1 + a_m]}{\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m} < 1 + \varepsilon,$$

а значит, установлено предельное соотношение

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m [1 + a_m]}{\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m} = 1.$$

Используя это соотношение, из (3.1) получаем

$$\sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\Delta y_m}{y_m^\sigma} = \frac{\alpha}{\lambda} \big[1 + o(1)\big] \sum_{m=n}^{+\infty} m p_m \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \tag{3.15}$$

откуда следует сходимость ряда $\sum_{m=1}^{+\infty} \dfrac{\Delta y_m}{y_m^\sigma}$. Поэтому, применяя теоремы Коши и Штольца, имеем предельные равенства

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \Delta y_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta(n \Delta y_n)}{\Delta y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\Delta^2 y_n}{\Delta y_n} + 1 = \lambda + 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n^{1-\sigma}}{\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{\Delta y_k}{y_k^\sigma}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{y_n \big((1 + \Delta y_n / y_n)^{1-\sigma} - 1\big)}{\Delta y_n} = 1 - \sigma.$$

Отсюда, учитывая соотношение (3.15), получаем сходимость интеграла $\left| \int_B^{y_0} \frac{dy}{|y|^\sigma} \right|$ и асимптотические представления $P(\lambda)$-решения уравнения (1.1) вместе с его первой разностью

$$\begin{aligned} y_n &= \left(\frac{\alpha(\sigma-1)}{\lambda} \sum_{m=n}^{+\infty} m p_m \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \big[1+o(1)\big], \\ \Delta y_n &= \frac{\alpha n p_n}{\lambda} \left(\frac{\alpha(\sigma-1)}{\lambda} \sum_{m=n}^{+\infty} m p_m \right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \big[1+o(1)\big], \end{aligned} \tag{3.16}$$

а также знаковое условие из (1.5).

Теперь рассмотрим выражение $\frac{n\Delta y_n}{y_n}$. Как следует из (3.16), это выражение асимптотически эквивалентно $\frac{n^2 p_n}{(\sigma-1)\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m}$. С другой стороны, имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\Delta y_n}{y_n} = \lambda + 1,$$

и поэтому

$$\frac{n^2 p_n}{\sum_{m=n}^{+\infty} m p_m} = (\sigma-1)(1+\lambda) + o(1) \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\Delta y_n = \frac{\lambda+1}{n} \left(\frac{\alpha(\sigma-1)}{\lambda} \sum_{m=n}^{+\infty} m p_m \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \big[1+o(1)\big] \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, установлены необходимость указанных в теореме 1.2 условий и асимптотические представления (1.6).

Достаточность. Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$ и выполняется условие (1.5). Покажем, что существует $P(\lambda)$-решение уравнения (1.1) с асимптотическими представлениями (1.6).

С помощью замены переменных

$$\begin{aligned} y_n &= \left(\frac{\alpha(\sigma-1)}{\lambda} \sum_{m=n}^{+\infty} m p_m \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \big[1+u_n^1\big], \\ \Delta y_n &= \frac{\lambda+1}{n} \left(\frac{\alpha(\sigma-1)}{\lambda} \sum_{m=n}^{+\infty} m p_m \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \big[1+u_n^2\big] \end{aligned} \tag{3.17}$$

сведем уравнение (1.1) к системе

$$\begin{aligned} \Delta u_n^1 &= (H_n - 1)\,(1+u_n^1) + \frac{\lambda+1}{n} H_n (1+u_n^2), \\ \Delta u_n^2 &= -(1+u_n^2)\left(1 - \frac{n+1}{n} H_n\right) + \frac{\lambda}{(\lambda+1)(\sigma-1)} I_n (1+u_n^1)^\sigma, \end{aligned} \tag{3.18}$$

в которой

$$H_n = \left(1 + \frac{np_n}{\sum_{m=n+1}^{+\infty} mp_m}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \qquad I_n = \frac{(n+1)p_n\left(\sum_{m=n}^{+\infty} mp_m\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}{\left(\sum_{m=n+1}^{+\infty} mp_m\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}}.$$

Как следует из (1.5), введенные нами дискретные функции H_n и I_n при $n \to \to +\infty$ допускают асимптотические представления

$$\begin{gathered} H_n = 1 + \frac{np_n}{(1-\sigma)\sum_{m=n+1}^{+\infty} mp_m} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ I_n = \frac{(\lambda+1)(\sigma-1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{gathered} \tag{3.19}$$

Перепишем теперь систему (3.18) в виде (3.9), где

$$f_n^1 = n\left(H_n - 1\right) + (\lambda+1)\,H_n, \qquad f_n^2 = (n+1)H_n - n + \frac{\lambda}{(\lambda+1)(\sigma-1)}nI_n,$$

$$A_n^{11} = n\left(H_n - 1\right), \qquad A_n^{12} = (\lambda+1)\,H_n,$$

$$A_n^{21} = \frac{\lambda\sigma}{(\lambda+1)(\sigma-1)}nI_n, \qquad A_{22}(x) = (n+1)H_n - n,$$

$$R(n, u_n^1) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)(\sigma-1)}nI_n\left[(1+u_n^1)^\sigma - 1 - \sigma u_n^1\right].$$

Из соотношений (3.19) следует, что коэффициенты этой системы удовлетворяют предельным равенствам

$$\lim_{n\to+\infty} f_n^1 = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n^2 = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n^{11} = -1-\lambda, \qquad \lim_{n\to+\infty} A_n^{12} = \lambda+1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} A_n^{21} = \lambda\sigma, \qquad \lim_{n\to+\infty} A_n^{22} = -\lambda,$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{R(n,u)}{u} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим $A^0 = (A_{ij}^0)_{i,j=1}^2$, где $A_{ij}^0 = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n^{ij}$. Поскольку при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$ характеристический многочлен матрицы A^0 не имеет корней с нулевой вещественной частью, рассуждая далее так же, как и при доказательстве теоремы 1.1, получаем, что система (3.18) имеет решение, стремящееся к нулю при $n \to +\infty$, которому в силу замен (3.17) соответствует решение уравнения (1.1), допускающее асимптотические представления (1.6). Нетрудно проверить, что полученное решение уравнения (1.1) будет принадлежать классу $P(\lambda)$.

Теорема 1.2 доказана.

В качестве иллюстрации полученных в работе результатов рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 y_n = \alpha n^k |y_n|^\sigma \operatorname{sign} y_n, \tag{3.20}$$

где $\alpha \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1-\sigma, -(3+\sigma)/2\}$.

***Следствие* 3.1.** *Для существования $P(\lambda)$-решения, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$, уравнения* (3.20) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\alpha(k+2)(k+\sigma+1) > 0, \qquad \lambda = \frac{k+\sigma+1}{1-\sigma}. \tag{3.21}$$

Более того, каждое положительное решение из этого класса допускает при $n \to +\infty$ асимптотические представления

$$\begin{gathered} y_n = \left[\frac{\alpha(1-\sigma)^2}{(k+2)(k+\sigma+1)}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} n^{\frac{k+2}{1-\sigma}} \big[1 + o(1)\big], \\ \Delta y_n = \frac{k+2}{1-\sigma} \left[\frac{\alpha(1-\sigma)^2}{(k+2)(k+\sigma+1)}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} n^{\frac{k+\sigma+1}{1-\sigma}} \big[1 + o(1)\big]. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Доказательство. Так как для уравнения (3.20) $p_n = n^k$, $k \neq -2$, ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} m p_m$ имеет вид $\sum_{m=1}^{+\infty} m^{k+1}$ и поэтому расходится при $k > -2$ и сходится при $k < -2$.

Пусть $k > -2$. Тогда, согласно теореме 1.1, необходимые и достаточные условия существования $P(\lambda)$-решения уравнения (3.20), $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$, будут иметь вид

$$\alpha\lambda(1-\sigma) > 0,$$

$$\left|\int_B^{y_0} \frac{dy}{|y|^\sigma}\right| = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{k+2}}{\sum_{m=1}^{n-1} m^{k+1}} = (1-\sigma)(1+\lambda).$$

Отсюда, принимая во внимание имеющее место по теореме Штольца предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-k-2} \sum_{m=1}^{n-1} m^{k+1} = \frac{1}{k+2},$$

а также тот факт, что интеграл $\int_B^{y_0} \frac{dy}{|y|^\sigma}$ расходится при $\sigma > 1$, если $y_0 = 0$, и при $\sigma < 1$, если $y_0 = \pm\infty$, получаем (3.21) и представления (3.22).

В случае $k < -2$, используя теорему 1.2 и учитывая имеющее место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-k-2} \sum_{m=n}^{+\infty} m^{k+1} = -\frac{1}{k+2},$$

таким же образом, как и выше, нетрудно установить справедливость следствия 3.1.

Выводы. В настоящей работе предложен отличный от рассмотренных ранее подход, позволяющий при исследовании уравнения вида (1.1) установить асимптотические свойства класса решений, названных $P(\lambda)$-решениями. При этом были получены необходимые и достаточные условия существования $P(\lambda)$-решений, $\lambda \in \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$, уравнения (1.1), а также найдены асимптотические при $n \to \to +\infty$ формулы для выражений y_n и Δy_n.

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 431 с.
2. *Костин А. В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена – Фаулера // Докл. АН СССР. – 1971. – **200**, № 1. – С. 28 – 31.
3. *Костин А. В., Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // Там же. – 1976. – **231**, № 5. – С. 1059 – 1062.
4. *Евтухов В. М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка // Там же. – 1977. – **233**, № 4. – С. 531 – 534.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – **106**, № 3. – С. 473 – 476.
6. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. – 1992. – **324**, № 2. – С. 258 – 260.
7. *Migda M., Migda J.* Asymptotic properties of the solutions of the second order difference equation // Arch. math. – 1998. – **34**. – P. 467 – 476.
8. *Agarwal Ravi P.* Difference equations and inequalities. – Marcel Dekker, 2000. – 998 p.

Получено 17.07.07,
после доработки — 11.03.09