УДК 517.5

М. Ш. Шабозов, М. О. Акобиршоев
(Ин-т математики АН Республики Таджикистан, Душанбе)

О ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ КВАЗИПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

We establish the exact values of the Kolmogorov quasiwidth and a linear quasiwidth for some classes of differentiable periodic functions of two variables in the Hilbert space $L_2(Q)$.

Знайдено точні значення величин колмогорівського і лінійного квазіпоперечників для деяких класів диференційовних періодичних функцій двох змінних у гільбертовому просторі $L_2(Q)$.

1. Рассмотрим задачу нахождения точных значений квазипоперечников для классов дифференцируемых периодических функций двух переменных в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$, $Q = \{0 \le x,\ y \le 2\pi\}$, с нормой

$$\|f\|_{L_2(Q)} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_Q |f(x,y)|^2 dx dy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Напомним понятия и определения, необходимые нам в дальнейшем (см., например, [1 – 5]). Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m = \operatorname{span}\{u_0(x), u_1(x), \ldots, u_m(x)\},$$
$$V_n = \operatorname{span}\{v_0(y), v_1(y), \ldots, v_n(y)\}$$

— их конечномерные подпространства, $U_m \subset X$, $V_n \subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y) = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu(x)\psi_\nu(y) + \sum_{\mu=0}^{n} v_\mu(y)\varphi_\mu(x),$$

где $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^{n}$ и $\{\psi_\nu(y)\}_{\nu=0}^{m}$ — наборы произвольных функций из пространств X и Y, назовем обобщенным полиномом, порожденным подпространствами U_m и V_n. Указанные обобщенные полиномы образуют подпространство

$$G(U_m, V_n) \overset{\text{df}}{=} U_m \otimes Y + V_n \otimes X,$$

где операции $\otimes$ и $+$ обозначают соответственно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathcal{E}(f; G(U_m,V_n))_Z \overset{\text{df}}{=} \inf\left\{ \left\| f - g_{m,n}(f) \right\|_Z : g_{m,n}(f) \in G(U_m,V_n) \right\},$$
$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m,V_n))_Z \overset{\text{df}}{=} \sup\{\mathcal{E}(f; G(U_m,V_n))_Z : f \in \mathfrak{M}\}. \tag{1}$$

Величина (1) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G(U_m, V_n)$, а $\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m,V_n))_Z$ — отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $G(U_m, V_n)$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$.

Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset Z$ величину

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = \inf\left\{ \mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m,V_n))_Z : U_m \subset X,\ V_n \subset Y \right\} \tag{2}$$

называют квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ по Колмогорову [1 – 4]. Пусть Λ — линейный оператор, действующий на функции $f \in \mathfrak{M}$, образ которого принадлежит множеству $G(U_m, V_n)$.

Положим

$$e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z = \sup\left\{\|f - \Lambda(f)\|_Z : f \in \mathfrak{M}\right\},$$

$$e(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z = \inf\left\{e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z : \Lambda(f) \in G(U_m, V_n)\right\}.$$

Следуя [5], величину

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = \inf\left\{e(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z : U_m \subset X,\ V_n \subset Y\right\} \qquad (3)$$

назовем линейным квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Z. Непосредственно из приведенных определений следуют неравенства

$$e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z \geq \mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z,$$

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) \geq d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z).$$

В задачах (2) и (3) наибольший интерес представляет отыскание экстремальных подпространств $U_m^0 \subset X$, $V_n^0 \subset Y$, для которых выполняется равенство

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m^0, V_n^0))_Z = e(\mathfrak{M}; G(U_m^0, V_n^0))_Z = d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) = d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z).$$

Далее всюду полагаем, что $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ — пространства суммируемых с квадратом 2π-периодических функций $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$, $Z = L_2(Q)$.

В настоящей работе для некоторых центрально-симметричных множеств периодических функций $\mathfrak{M} \subset L_2(Q)$ вычисляются величины

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}, L_2(Q)) = \inf\left\{\mathcal{E}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_{L_2(Q)} : U_m, V_n \subset L_2[0, 2\pi]\right\},$$

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, L_2(Q)) = \inf\left\{e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_{L_2(Q)} : U_m, V_n \subset L_2[0, 2\pi]\right\}.$$

В работе [3] доказано, что если

$$U_{2m-1}^* = \operatorname{span}\{(\cos jx)_{j=0}^{m-1},\ (\sin jx)_{j=1}^{m-1}\}, \qquad V_{2n-1}^* = \operatorname{span}\{(\cos ly)_{l=0}^{n-1},\ (\sin ly)_{l=1}^{n-1}\}$$

— подпространства тригонометрических полиномов порядка $2m - 1$ по переменной x и $2n - 1$ по переменной y, то

$$\mathcal{E}\Big(f;\ G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\Big)_{L_2(Q)} = \left\{\sum_{|j|\geq m}\ \sum_{|l|\geq n} \left|c_{jl}(f)\right|^2\right\}^{1/2}, \qquad (4)$$

где

$$c_{jl}(f) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_Q f(x, y)e^{-i(jx+ly)}dxdy$$

— коффициенты Фурье формального разложения $f(x, y)$ в виде двойного ряда Фурье

$$f(x, y) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{jl}(f)e^{i(jx+ly)}. \qquad (5)$$

В частности, из (4) и (5) следует, что если $f(x, y) = \varphi(x)\cdot\psi(y)$, то

$$\mathcal{E}\Big(f;\, G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\Big)_{L_2(Q)} = \mathcal{E}\Big(\varphi,\, U^*_{2m-1}\Big)_{L_2[0,2\pi]}\,\mathcal{E}\Big(\psi,\, V^*_{2n-1}\Big)_{L_2[0,2\pi]}, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{E}\Big(g,\, G_{2p-1}\Big)_{L_2[0,2\pi]} = \inf\Big\{\big\|g - T_p(g)\big\|_{L_2[0,2\pi]} : T_p(g)\in G_{2p-1}\Big\}$$

— величина наилучшего среднеквадратического приближения функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами $G_{2p-1} = \operatorname{span}\Big\{(\cos jx)_{j=0}^{p-1},\, (\sin jx)_{j=1}^{m-1}\Big\}$ порядка $2p-1$ в пространстве $L_2[0,2\pi]$.

2. Для произвольной функции $f(x, y)\in L_2(Q)$ определим смешанный модуль непрерывности равенством

$$\omega_{k,p}(f;\, t,\, \tau)_{L_2(Q)} = \sup\Big\{\big\|\Delta^{k,p}_{u,v} f(x, y)\big\|_{L_2(Q)} : |u| \le t,\ |v| \le \tau\Big\}, \tag{7}$$

где

$$\Delta^{k,p}_{u,v} f(x, y) = \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{p}(-1)^{\nu+\mu}\binom{k}{\nu}\binom{p}{\mu} f(x+\nu u,\, y+\mu v).$$

Используя равенство Парсеваля, величину (7) записываем в виде

$$\omega^2_{k,p}(f; t, \tau)_{L_2(Q)} =$$

$$= 2^{k+p}\sup\left\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left|c_{jl}(f)\right|^2(1-\cos ju)^k(1-\cos lv)^p : |u| \le t,\ |v| \le \tau\right\}. \tag{8}$$

В частности, для функции $f_0(x, y) = \cos mx \cos ny$ из (8) имеем

$$\omega^2_{k,p}(f_0; t, \tau)_{L_2(Q)} = 2^{k+p}(1-\cos mt)^k(1-\cos n\tau)^p.$$

Условимся всюду в дальнейшем вместо $\omega_{k,k}(f; t, \tau)_{L_2(Q)}$ писать $\omega_k(f; t, \tau)$. Подразумевая под $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, обозначаем через $C^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$, множество функций $f(x, y)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные $f^{(\nu,\mu)}(x, y) = \partial^{\mu+\nu} f/\partial x^{\nu}\partial y^{\mu}$, $\nu \le r$, $\mu \le s$, а через $L_2^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$, множество функций $f(x, y)\in C^{(r-1, s-1)}(Q)$, $r, s \ge 1$, у которых частные производные $f^{(r,\mu)}(x, y)$, $\mu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\nu,s)}(x, y)$, $\nu = \overline{0, r-1}$, существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)}(x, y)\in L_2(Q)$. Отметим, что для произвольной функции $f(x, y) \in L_2^{(r,s)}(Q)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}\Big(f;\, G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\Big)_{L_2(Q)} \le m^{-r}n^{-s}\,\mathcal{E}\Big(f^{(r,s)};\, G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\Big)_{L_2(Q)},$$

которое является точным в том смысле, что для функции

$$f_0(x, y) = \cos mx \cos ny \in L_2^{(r,s)}(Q)$$

обращается в равенство. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых* $m, n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющих неравенствам* $0 < mt \le \pi/2$, $0 < n\tau \le \pi/2$, *при любом* $k\in\mathbb{N}$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \mathcal{E}\Big(f;\, G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\Big)_{L_2(Q)} \left\{\int_0^t\int_0^\tau \omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; u, v)\,du\,dv\right\}^{-k/2} =$$

$$= \frac{1}{2^k\, m^r\, n^s}\left\{\frac{mn}{(mt - \sin mt)(n\tau - \sin n\tau)}\right\}^{k/2}. \qquad (9)$$

Существует функция $f_0(x,y)\in L_2^{(r,s)}(Q)$, *для которой верхняя грань достигается в соотношении* (9).

Доказательство. Докажем, что для любой функции $f(x,y)\in L_2^{(r,s)}(Q)$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}^2\Big(f;\, G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\Big)_{L_2(Q)} - \sum_{|j|\ge m}\sum_{|l|\ge n}\left|c_{jl}(f)\right|^2(\cos ju + \cos lv - \cos ju\cos lv) \le$$

$$\le \frac{1}{4\,m^{2r/k}\,n^{2s/k}}\,\mathcal{E}^{2-2/k}\Big(f;\, G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\Big)_{L_2(Q)}\,\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};\, u,\, v). \qquad (10)$$

Действительно, замечая, что

$$\omega_k^2(f^{(r,s)}; t, \tau) =$$

$$= 4^k\sup\left\{\sum_{|j|\ge m}\sum_{|l|\ge n} j^{2r} l^{2s}\left|c_{jl}(f)\right|^2(1-\cos ju)^k(1-\cos lv)^k : |u| \le t,\ |v| \le \tau\right\},$$

и используя неравенство Гельдера для сумм, с учетом (4) имеем

$$\mathcal{E}^2\Big(f;\, G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\Big)_{L_2(Q)} - \sum_{|j|\ge m}\sum_{|l|\ge n}\left|c_{jl}(f)\right|^2(\cos ju + \cos lv - \cos ju\cos lv) =$$

$$= \sum_{|j|\ge m}\sum_{|l|\ge n}\left|c_{jl}(f)\right|^{2-2/k}\left|c_{jl}(f)\right|^{2/k}(1-\cos ju)(1-\cos lv) \le$$

$$\le \left\{\sum_{|j|\ge m}\sum_{|l|\ge n}\left|c_{jl}(f)\right|^2\right\}^{1-1/k}\left\{\sum_{|j|\ge m}\sum_{|l|\ge n}\left|c_{jl}(f)\right|^2(1-\cos ju)^k(1-\cos lv)^k\right\}^{1/k} \le$$

$$\le \mathcal{E}^{2-2/k}\Big(f;\, G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\Big)_{L_2(Q)} \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{4^k m^{2r} n^{2s}}\,4^k\sum_{|j|\ge m}\sum_{|l|\ge n} j^{2r} l^{2s}\left|c_{jl}(f)\right|^2(1-\cos ju)^k(1-\cos lv)^k\right\}^{1/k} \le$$

$$\le \frac{1}{4\,m^{2r/k}\,n^{2s/k}}\,\mathcal{E}^{2-2/k}\Big(f;\, G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\Big)_{L_2(Q)}\,\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; u, v),$$

откуда следует неравенство (10). Теперь, проинтегрировав неравенство (10) по прямоугольнику $\{0\le u\le t,\ 0\le v\le\tau\}$ и поделив обе части на $t\tau$, получим

$$\mathcal{E}^2\Big(f;\, G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\Big)_{L_2(Q)} - \sum_{|j|\ge m}\sum_{|l|\ge n}\left|c_{jl}(f)\right|^2\left(\frac{\sin jt}{jt} + \frac{\sin lv}{lv} - \frac{\sin jt}{jt}\frac{\sin lv}{lv}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{4t\tau m^{2r/k}\,n^{2s/k}}\,\mathcal{E}^{2-2/k}\Big(f;\, G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\Big)_{L_2(Q)}\int_0^t\int_0^\tau\omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; u, v)\,du\,dv. \qquad (11)$$

Легко заметить, что при $0 < mt \le \pi/2$, $0 < n\tau \le \pi/2$ справедливо равенство

$$\max\left\{\left|\frac{\sin u}{u} + \frac{\sin v}{v} - \frac{\sin u}{u}\frac{\sin v}{v}\right| : u \ge mt,\ v \ge n\tau\right\} = \frac{\sin mt}{mt} + \frac{\sin n\tau}{n\tau} - \frac{\sin mt}{mt}\frac{\sin n\tau}{n\tau}.$$

Используя это равенство, из (11) находим

$$\mathcal{E}^2\Big(f;\, G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\Big)_{L_2(Q)} \le$$

$$\le \frac{1}{4^k m^{2r} n^{2s}} \left\{\frac{mn}{(mt-\sin mt)(n\tau-\sin n\tau)}\right\}^k \left(\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; u, v)\,du\,dv\right)^k,$$

или, что то же,

$$\mathcal{E}\Big(f;\, G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\Big)_{L_2(Q)} \le$$

$$\le \frac{1}{2^k m^r n^s} \left\{\frac{mn}{(mt-\sin mt)(n\tau-\sin n\tau)}\right\}^{k/2} \left(\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; u, v)\,du\,dv\right)^{k/2}. \qquad (12)$$

Простой подсчет показывает, что для функции

$$f_0(x, y) = \cos mx \cos ny \in L_2^{(r,s)}(Q)$$

неравенство (12) обращается в равенство. Точность (12) следует из непосредственно проверяемых соотношений

$$\mathcal{E}\Big(f_0;\, G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\Big)_{L_2(Q)} \equiv 1,$$

$$\omega_k^2(f_0^{(r,s)}; u, v) = 4^k m^{2r} n^{2s} (1-\cos mu)^k (1-\cos nv)^k,$$

что и завершает доказательство теоремы.

3. При решении экстремальных задач теории приближения вместо модуля непрерывности $\omega_{k,p}(f; t, \tau)_{L_2(Q)}$ функции $f(x, y) \in L_2(Q)$ часто удобнее использовать следующую характеристику гладкости функции:

$$\Omega_{k,p}(f; t, \tau) =$$

$$= \left\{\frac{1}{h^k \eta^p}\int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \ldots \int\limits_0^\eta \left\|\Delta^{k,p}_{\overline{u},\overline{v}} f(x, y)\right\|^2 du_1 \ldots du_k\, dv_1 \ldots dv_p\right\}^{1/2}, \quad h, \eta > 0, \qquad (13)$$

где $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$, $\overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$, а $\Delta^{k,p}_{\overline{u},\overline{v}} = \Delta^1_{u_1} \circ \ldots \circ \Delta^1_{u_k} \circ \Delta^1_{v_1} \circ \ldots$ $\ldots \circ \Delta^1_{v_p}$ (см., например, [6]). Поэтому для оценки точности аппроксимации более удобной является экстремальная характеристика — естественное обобщение аналогичной характеристики в одномерном случае [7]:

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,k,p}(t, \tau) \overset{\text{df}}{=}$$

$$\overset{\text{df}}{=} \sup\left\{\frac{m^r n^s \mathcal{E}\Big(f;\, G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\Big)_{L_2(Q)}}{\Omega_{k,p}(f^{(r,s)}; t/m, \tau/n)} : f(x, y) \in L_2^{(r,s)}(Q),\ f(x, y) \ne \text{const}\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $m, n, r, s \in \mathbb{N}$. *Тогда для любых чисел* $t, \tau \in [0, \pi/2]$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,k,p}(t, \tau) = \left\{2\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-k/2}\left\{2\left(1-\frac{\sin \tau}{\tau}\right)\right\}^{-p/2}.$$

Доказательство. Используя равенство Парсеваля, из соотношения (5) для произвольной функции $f(x, y) \in L_2^{(r,s)}(Q)$ в силу ортогональности системы функций $e^{i(jx+ly)}$, $j,\ l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в области Q получаем

$$\left\| \Delta_{\overline{u},\overline{v}}^{k,p} f^{(r,s)}(x, y) \right\|^2 = \left\| \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (ij)^r (il)^s c_{jl}(f) \Delta_{\overline{u},\overline{v}}^{k,p} e^{i(jx+ly)} \right\| =$$

$$= 2^{k+p} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} j^{2r} l^{2s} \left| c_{jl}(f) \right|^2 \prod_{\nu=1}^{k} (1 - \cos ju_\nu) \prod_{\mu=1}^{p} (1 - \cos lv_\mu). \tag{14}$$

Подставляя соотношение (14) в равенство (13), с учетом определения наилучшего приближения $\mathcal{E}\left(f;\ G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\right)_{L_2(Q)}$ и того факта [8, с. 435], что

$$\max\left\{ |\sin u|/u :\ u \geq mt \right\} = \sin mt / mt, \quad 0 < mt \leq \pi/2,$$

после несложных вычислений получаем

$$\Omega_{k,p}^2(f^{(r,s)}; t, \tau) \geq 2^{k+p} \sum_{|j| \geq m} \sum_{|l| \geq n} j^{2r} l^{2s} \left| c_{jl}(f) \right|^2 \left(1 - \frac{\sin jt}{jt}\right)^k \left(1 - \frac{\sin l\tau}{l\tau}\right)^p \geq$$

$$\geq \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin mt}{mt}\right) \right\}^k \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right) \right\}^p m^{2r} n^{2s} \mathcal{E}^2\left(f;\ G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\right)_{L_2(Q)}.$$

Отсюда следует, что для любого $f(x, y) \in L_2^{(r,s)}(Q)$ выполняется неравенство

$$\frac{m^r n^s \mathcal{E}\left(f;\ G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\right)_{L_2(Q)}}{\Omega_{k,p}(f^{(r,s)}; t, \tau)} \leq \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin mt}{mt}\right) \right\}^{-k/2} \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right) \right\}^{-p/2}. \tag{15}$$

Полагая в неравенстве (15) $mt = u$, $n\tau = v$, имеем

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,k,p}(t, \tau) \leq \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) \right\}^{-k/2} \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\right) \right\}^{-p/2}. \tag{16}$$

Для получения соответствующей оценки снизу рассмотрим в $L_2(Q)$ экстремальную функцию $f_*(x, y) = \sin mx \sin ny$. Для этой функции

$$\mathcal{E}\left(f_*;\ G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\right)_{L_2(Q)} \equiv 1$$

и

$$\Omega_{k,p}\left(f_*^{(r,s)}; \frac{t}{m}, \frac{\tau}{n}\right) = m^r n^s \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) \right\}^{k/2} \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\right) \right\}^{p/2}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,k,p}(t, \tau) \geq \frac{m^r n^s \mathcal{E}\left(f_*;\ G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)\right)_{L_2(Q)}}{\Omega_{k,p}(f_*^{(r,s)}; t/m, \tau/n)} =$$

$$= \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right) \right\}^{-k/2} \left\{ 2\left(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\right) \right\}^{-p/2}. \tag{17}$$

Утверждение теоремы 2 следует из сопоставления неравенств (16) и (17).

4. Пусть $\Phi_j(t)$, $j = 1, 2;\ 0 \leq t < \infty$, — монотонно возрастающие функции, равные нулю в точке $t = 0$. Для $k, r, s \in \mathbb{N}$ и $h, \eta > 0$ введем в рассмотрение следующие классы функций:

$$\mathcal{F}\big(k, r, s;\ \Phi_1, \Phi_2\big) \overset{\text{df}}{=} \left\{ f(x,\ y) \in L_2^{(r,s)}:\ \int_0^h \int_0^\eta \omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};\ t,\ \tau)\, dt d\tau \ \le\ \Phi_1(h)\,\Phi_2(\eta) \right\},$$

$$\mathcal{F}_k^{(r,s)}(h, \eta) \overset{\text{df}}{=} \left\{ f(x,\ y) \in L_2^{(r,s)}:\ \int_0^h \int_0^\eta \omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};\ t,\ \tau)\, dt d\tau \ \le\ 1 \right\},$$

$$W^{(r,s)}\big(\Omega_{k,p};\ \Phi_1, \Phi_2\big) \overset{\text{df}}{=} \left\{ f(x, y) \in L_2^{(r,s)}:\ \Omega_{k,p}(f^{(r,s)}; h, \eta) \ \le\ \Phi_1(h)\Phi_2(\eta) \right\}.$$

Следующие ниже теоремы являются основными результатами данной работы.

Теорема 3. *Если мажоранты* $\Phi_j(u)$, $j = 1, 2$, *при любом* $q \in \mathbb{N}$ *удовлетворяют ограничениям*

$$\frac{\Phi_j(u)}{\Phi_j(\pi/2q)} \ \ge\ \frac{2}{\pi - 2} \begin{cases} qt - \sin qt, & \text{если} \quad 0 < t \le \pi/q, \\ 2qt - \pi, & \text{если} \quad t > \pi/q, \end{cases} \tag{18}$$

то для любых $m, n, r, s, k \in \mathbb{N}$ *имеют место равенства*

$$d_{2m-1,2n-1}(\mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2);\ L_2(Q)) \ =\ d'_{2m-1,2n-1}(\mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2);\ L_2(Q)) \ =$$

$$=\ \mathcal{E}(\mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2);\ G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)) \ =\ e(\mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2);\ G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)) \ =$$

$$=\ m^{-r} n^{-s} \left\{ \frac{mn}{(\pi - 2)^2} \Phi_1\!\left(\frac{\pi}{2m}\right) \Phi_2\!\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{k/2}.$$

***Следствие* 1.** *Если выполнены условия теоремы* 3, *то имеет место равенство*

$$\sup\left\{ |c_{mn}(f)| :\ f(x, y) \in \mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2) \right\} \ =\ m^{-r} n^{-s} \left\{ \frac{mn}{(\pi - 2)^2} \Phi_1\!\left(\frac{\pi}{2m}\right) \Phi_2\!\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{k/2}.$$

Теорема 4. *Пусть* $m, n, r, s, k \in \mathbb{N}$ *и для* $h, \eta > 0$ *выполнены условия* $0 < mh,\ n\eta < \pi/2$. *Тогда справедливы равенства*

$$d_{2m-1,2n-1}(\mathcal{F}_k^{r,s}(h, \eta);\ L_2) \ =\ d'_{2m-1,2n-1}(\mathcal{F}_k^{r,s}(h, \eta);\ L_2) \ =$$

$$=\ \mathcal{E}(\mathcal{F}_k^{r,s}(h, \eta);\ G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)) \ =\ e(\mathcal{F}_k^{r,s}(h, \eta);\ G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*)) \ =$$

$$=\ m^{-r} n^{-s} \left\{ \frac{mn}{4\,(mh - \sin mh)(n\eta - \sin n\eta)} \right\}^{k/2}.$$

Из теоремы 4 вытекает такое следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда*

$$\sup\left\{ |c_{mn}(f)| :\ f(x, y) \in \mathcal{F}_k^{r,s}(h, \eta) \right\} \ =$$

$$=\ m^{-r} n^{-s} \left\{ \frac{mn}{4\,(mh - \sin mh)(n\eta - \sin n\eta)} \right\}^{k/2},$$

где числа $m, n \in \mathbb{N}$ *удовлетворяют неравенствам* $m \le \pi/(2h)$, $n \le \pi/(2\eta)$.

Теорема 5. *Пусть при любом* $q \in \mathbb{N}$ *мажорирующие функции* $\Phi_j(u)$, $j = 1, 2$, *удовлетворяют ограничению*

$$\frac{\Phi_j^2(\pi u/2q)}{\Phi_j^2(\pi/2q)} \geq \left(\frac{\pi}{\pi - 2}\right)^m \begin{cases} (1 - 2\sin(\pi t/2)/(\pi t))^m, & \text{если} \quad 0 < t \leq 2, \\ 2^m(1 - 1/t)^m, & \text{если} \quad 2 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Тогда имеют место равенства

$$d_{2m-1,2n-1}\left(W^{r,s}(\Omega_{k,p}; \Phi_1, \Phi_2); L_2\right) =$$
$$= d'_{2m-1,2n-1}\left(W^{r,s}(\Omega_{k,p}; \Phi_1, \Phi_2); L_2\right) =$$
$$= \mathcal{E}\left(W^{r,s}(\Omega_{k,p}; \Phi_1, \Phi_2); G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\right) =$$
$$= e\left(W^{r,s}(\Omega_{k,p}; \Phi_1, \Phi_2); G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\right) =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right)^{(m+n)/2} \frac{1}{m^r n^s} \Phi_1\left(\frac{\pi}{2m}\right)\Phi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

5. *Доказательство теоремы* 3. Полагая в неравенстве (12) $t = \pi/(2m)$, $\tau = \pi/(2n)$, для произвольной функции $f(x, y) \in \mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2)$ записываем

$$\mathcal{E}(f; G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)} \leq m^{-r}n^{-s}\left\{\frac{mn}{(\pi-2)^2}\Phi_1\left(\frac{\pi}{2m}\right)\Phi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{k/2}.$$

Отсюда получаем оценку сверху для указанных квазипоперечников:

$$d_{2m-1,2n-1}\left(\mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2); L_2\right) \leq$$
$$\leq d'_{2m-1,2n-1}\left(\mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2); L_2\right) \leq$$
$$\leq \mathcal{E}\left(\mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2); G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\right) \leq$$
$$\leq e\left(\mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2); G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\right) \leq$$
$$\leq m^{-r}n^{-s}\left\{\frac{mn}{(\pi-2)^2}\Phi_1\left(\frac{\pi}{2m}\right)\Phi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{k/2}. \tag{19}$$

Для получения оценки снизу колмогоровского квазипоперечника будем следовать схеме рассуждений работы [5], а именно, рассмотрим пространство $L_2^{\nu}[0, 2\pi]$, состоящее из функций $g(u)$, имеющих абсолютно непрерывные производные $(\nu - 1)$-го порядка и ν-ю производную $g^{(\nu)}(u) \in L_2[0, 2\pi]$.

Введем классы функций

$$\mathcal{F}_k^r(\Phi_1) = \left\{\varphi(x) \in L_2^r : \int_0^{\pi/2m} \omega_k^{2/k}(\varphi^{(r)}; t)\,dt \leq \Phi_1\left(\frac{\pi}{2m}\right)\right\},$$

$$\mathcal{F}_k^s(\Phi_2) = \left\{\psi(y) \in L_2^s : \int_0^{\pi/2n} \omega_k^{2/k}(\psi^{(s)}; \tau)\,d\tau \leq \Phi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\},$$

с помощью которых полагаем

$$\mathcal{F}^*(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2) = \mathcal{F}_k^r(\Phi_1) \otimes \mathcal{F}_k^s(\Phi_2) =$$

$$= \left\{\varphi(x)\psi(y) : \varphi(x) \in \mathcal{F}_k^r(\Phi_1),\ \psi(y) \in \mathcal{F}_k^s(\Phi_2)\right\}.$$

Используя равенство (6), записываем

$$d_{2m-1,2n-1}\big(\mathcal{F}^*(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2);\ L_2(Q)\big) =$$

$$= d_{2m-1}\big(\mathcal{F}_k^r(\Phi_1);\ L_2[0, 2\pi]\big)\, d_{2n-1}\big(\mathcal{F}_k^s(\Phi_2);\ L_2[0, 2\pi]\big), \tag{20}$$

где $d_k(\cdot)$ — обычный колмогоровский k-поперечник. Учитывая равенство (20), включение $\mathcal{F}^*(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2) \subset \mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2)$, а также результат С. Б. Вакарчука [9]

$$d_{2p-1}\big(\mathcal{F}_k^\nu(\Phi_0);\ L_2[0, 2\pi]\big) = p^{-\nu}\left(\frac{p}{\pi - 2}\Phi_0\left(\frac{\pi}{2p}\right)\right)^{k/2},$$

полученный при выполнении ограничений (18), получаем следующую оценку снизу:

$$d_{2m-1,2n-1}\big(\mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2);\ L_2(Q)\big) \geq$$

$$\geq d_{2m-1,2n-1}\big(\mathcal{F}^*(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2);\ L_2(Q)\big) =$$

$$= m^{-r} n^{-s}\left\{\frac{mn}{(\pi - 2)^2}\Phi_1\left(\frac{\pi}{2m}\right)\Phi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{k/2}. \tag{21}$$

Сопоставляя неравенства (19) и (21), завершаем доказательство теоремы 3.

6. ***Доказательство следствия*** **1.** Учитывая очевидное равенство

$$c_{mn}(f) = \frac{1}{4\pi^2}\iint f(x, y)e^{-i(mx+ny)}dxdy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_Q \left[f(x, y) - g^*_{2m-1,\,2n-1}(f; x, y)\right]e^{-i(mx+ny)}dxdy,$$

где

$$g^*_{2m-1,\,2n-1}(f; x, y) =$$

$$= \left\{\sum_{|j|\leq m-1}\ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} - \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{|l|\leq n-1} - \sum_{|j|\leq n-1}\ \sum_{|l|\leq n-1}\right\}c_{jl}(f)e^{i(jx+ly)} \in G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1}),$$

и используя неравенство Коши – Буняковского, получаем оценку сверху

$$\sup\left\{\left|\, c_{mn}(f)\,\right| :\ f(x, y) \in \mathcal{F}\,(k, r, s;\ \Phi_1, \Phi_2)\right\} \leq \mathcal{E}\big(f, G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\big)_{L_2(Q)} \leq$$

$$\leq m^{-r} n^{-s}\left\{\frac{mn}{(\pi - 2)^2}\Phi_1\left(\frac{\pi}{2m}\right)\Phi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{k/2}.$$

Для получения оценки снизу вводим в рассмотрение функцию

$$f_1(x, y) \overset{\text{df}}{=} m^{-r} n^{-s}\left\{\frac{mn}{(\pi - 2)^2}\Phi_1\left(\frac{\pi}{2m}\right)\Phi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{k/2} e^{i(mx+ny)}.$$

Можно доказать, что $f_1(x, y) \in \mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2)$. Тогда

$$\sup\left\{\left|c_{mn}(f)\right| : f(x, y) \in \mathcal{F}(k, r, s; \Phi_1, \Phi_2)\right\} \geq$$

$$\geq \left|c_{mn}(f_1)\right| = m^{-r} n^{-s} \left\{\frac{mn}{(\pi-2)^2} \Phi_1\left(\frac{\pi}{2m}\right) \Phi_2\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{k/2}.$$

Сравнивая полученные оценки сверху и снизу, получаем требуемое равенство, что и завершает доказательство следствия 1.

Доказательства теорем 4, 5 и следствия 2 не приводятся, поскольку повторяют рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3. Отметим, что при доказательстве указанных теорем соответственно используются одномерные результаты из работ [7, 9].

1. *Вакарчук С. Б.* О приближении дифференцируемых функций многих переменных // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 3. – С. 37 – 44.
2. *Вакарчук С. Б.* Квазипоперечники функциональных классов в некоторых банаховых пространствах аналитических функций многих комплексных переменных // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1992. – № 3. – С. 26 – 31.
3. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 301 – 308.
4. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* Квазипоперечники и оптимизация методов смешанной аппроксимации многомерных сингулярных интегралов с ядрами типа Гильберта // Там же. – № 6. – С. 753 – 770.
5. *Шабозов М. Ш., Акобиршоев М. О.* Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Докл. АН России. – 2005. – **404**, № 4. – С. 460 – 464.
6. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p // Мат. сб. – 1975. – **98(140)**, № 3(11). – С. 395 – 415.
7. *Вакарчук С. Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. – 2005. – **78**, № 5. – С. 792 – 796.
8. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Там же. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433 – 438.
9. *Вакарчук С. Б.* Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Там же. – 2006. – **80**, № 1. – С. 11 – 19.

Получено 01.08.08,
после доработки — 24.12.08