УДК 517.956

Р. В. Андрусяк, Н. О. Бурдейна, В. М. Кирилич (Львів. нац. ун-т)

КЛАСИЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ З РУХОМИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Applying the method of characteristics and method of contractive mappings, the local classical solvability of problem with movable boundaries and nonlinear boundary conditions for a hyperbolic system of quasilinear equations of the first order is established. Under additional assumptions on the monotonicity and constant sign of initial data as well as under the restriction on growth of the right-hand sides of the system, sufficient conditions of the global classical solvability of the problem are formulated.

С помощью методов характеристик и сжимающих отображений установлена локальная классическая разрешимость задачи с движущимися границами с нелинейными граничными условиями для гиперболической системы квазилинейных уравнений первого порядка. При выполнении дополнительных предположений о монотонности, знакопостоянстве исходных данных, а также ограничении на рост правых частей системы изложены достаточные условия глобальной классической разрешимости задачи.

Вступ. У даній роботі розглянуто існування та єдиність локального і глобального класичних розв'язків мішаної задачі для квазілінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку. Подібні задачі виникають у багатьох прикладних проблемах, які моделюються рівняннями з частинними похідними, або як проміжні при розв'язуванні, наприклад, багатовимірних задач [1 – 6].

Стаття є продовженням досліджень [7, 8] на випадок існування єдиного гладкого локального та глобального розв'язків задачі з рухомими межами. При доведенні основних тверджень використано методику із [9, 10].

Постановка задачі. В області $G_T = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon a_1(t) < x < a_2(t),\, 0 < t < T\big\}$, де $a_k \colon [0,T] \to \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{C}^1[0,T]$, $a_k(0) = a_k^0$, $k = 1,2$, розглянемо систему квазілінійних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(x,t,u), \quad i = \overline{1,n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad u = (u_1,\ldots,u_n), \tag{1}$$

причому функції $\lambda_i,\ f_i \colon \mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є заданими.

Нехай

$$I_1 = \big\{i \mid \lambda_i(a_1^0, 0, g(a_1^0)) > a_1'(0)\big\}, \qquad I_2 = \big\{i \mid \lambda_i(a_2^0, 0, g(a_2^0)) < a_2'(0)\big\}.$$

Множини I_1 та I_2 можуть перетинатись, а $I_1 \cup I_2$ не обов'язково збігається з $\{1,\ldots,n\}$.

Задамо початкові та граничні умови

$$u(x,0) = g(x), \qquad g(x) = (g_1(x),\ldots,g_n(x)), \quad a_1^0 \le x \le a_2^0, \tag{2}$$

$$u_i(a_k(t),t) = \mu_k^i\Bigg(t, \{u_s(a_{k'}(t),t)\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\Bigg), \quad i \in I_k, \quad k = 1,2, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

де функції $\mu_k^i \colon [0,T] \times \mathbb{R}^{2n - \operatorname{card} I_1 - \operatorname{card} I_2} \to \mathbb{R}$.

Локальна розв'язність задачі. Введемо позначення

$$\|u\| = \max_i |u_i|, \qquad B_R^n = \{u \in \mathbb{R}^n \colon \|u\| \le R\}, \qquad G = \max_{[a_1^0, a_2^0]} \|g(x)\|,$$

а також клас функцій $C_L^1(G_{T_0}) = \{u \in (\mathbb{C}^1(G_{T_0}))^n \colon u_x \in (\mathrm{Lip}_x(G_{T_0}))^n\}$.

Означення. *Класичним розв'язком задачі* (1)–(3) *будемо називати набір функцій* $u(x,t) \in (\mathbb{C}^1(G_{T_0}))^n$, $T_0 \le T$, *що задовольняє систему рівнянь* (1), *початкові* (2) *і граничні* (3) *умови. Якщо* $T_0 < T$, *то такий розв'язок назвемо локальним, а при* $T_0 = T$ — *глобальним.*

Теорема 1. *Нехай*:

1) $\lambda_i(x,t,u), f_i(x,t,u) \in \mathbb{C}^{1,0,1}(G_T \times B_{G+1}^n) \cap \mathrm{Lip}(G_T \times B_{G+1}^n)$, $\{(\lambda_i)'_x, (\lambda_i)'_{u_j}, (f_i)'_x, (f_i)'_{u_j}\} \subset \mathrm{Lip}_{x,u}(G_T \times B_{G+1}^n)$, $i, j = \overline{1,n}$;

2) $g_i(x) \in \mathbb{C}^1([a_1^0, a_2^0])$, $g'_i(x) \in \mathrm{Lip}([a_1^0, a_2^0])$, $i = \overline{1,n}$;

3) $a_k(t) \in \mathbb{C}^1([0,T])$, $a'_k(t) \in \mathrm{Lip}([0,T])$, $k = 1,2$;

4) $\mu_k^i\Big(t, \{w_s^{k'}\}_{\substack{k'=1,2\\ s \notin I_{k'}}}\Big) \in \mathbb{C}^1\Big([0,T] \times B_{G+1}^{2n - \mathrm{card}\, I_1 - \mathrm{card}\, I_2}\Big)$, $\{\mu_k^i, (\mu_k^i)'_t, (\mu_k^i)'_{w_s^{k'}}\} \subset$ $\subset \mathrm{Lip}\,\big([0,T] \times B_{G+1}^{2n - \mathrm{card}\, I_1 - \mathrm{card}\, I_2}\big)$, $i \in I_k$, $k = 1,2$, $s \notin I_{k'}$, $k' = 1,2$;

5) *виконуються умови погодження нульового та першого порядків*:

$$g_i(a_k^0) = \mu_k^i\Big(0, \{g_s(a_{k'}^0)\}_{\substack{k'=1,2,\\ s \notin I_{k'}}}\Big), \quad i \in I_k, \quad k = 1,2,$$

$$(\mu_k^i)'_t\Big(0, \{g_s(a_{k'}^0)\}_{\substack{k'=1,2\\ s \notin I_{k'}}}\Big) + \sum_{\substack{k'=1,2\\ s \notin I_{k'}}} (\mu_k^i)'_{w_s^{k'}}\Big(0, \{g_s(a_{k'}^0)\}_{\substack{k'=1,2\\ s \notin I_{k'}}}\Big) \times$$

$$\times\Big[\big(a'_{k'}(0) - \lambda_s\big(a_{k'}^0, 0, g(a_{k'}^0)\big)\big) g'_s(a_{k'}^0) + f_s(a_{k'}^0, 0, g(a_{k'}^0))\Big] =$$

$$= f_i\big(a_k^0, 0, g(a_k^0)\big) + \big(a'_k(0) - \lambda_i(a_k^0, 0, g(a_k^0))\big) g'_i(a_k^0), \quad i \in I_k, \quad k = 1,2;$$

6) *виконується умова*

$$\lambda_i\big(a_k^0, 0, g(a_k^0)\big) \ne a'_k(0), \quad k = 1,2, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тоді для довільного достатньо малого T_0 *існує локальний класичний розв'язок задачі* (1)–(3) *в* G_{T_0}, *до того ж єдиний у* $C_L^1(G_{T_0})$.

Доведення. Введемо позначення:

$$\Lambda = \max_{\substack{1 \le i,j \le n\\ (x,t,u) \in G_T \times B_{G+1}^n}} \Big\{|\lambda_i(x,t,u)|,\ |(\lambda_i)'_x(x,t,u)|,\ |(\lambda_i)'_{u_j}(x,t,u)|\Big\},$$

$$F = \max_{\substack{1 \le i,j \le n\\ (x,t,u) \in G_T \times B_{G+1}^n}} \Big\{|f_i(x,t,u)|,\ |(f_i)'_x(x,t,u)|,\ |(f_i)'_{u_j}(x,t,u)|\Big\},$$

$$A = \max_{\substack{k=1,2\\ t \in [0,T]}} \{|a_k(t)|,\ |a'_k(t)|\}, \qquad G_1 = \max_{\substack{1 \le i \le n\\ x \in [a_1^0, a_2^0]}} |g'_i(x)|,$$

$$M = \max_{\substack{k=1,2, i \in I_k, k'=1,2, s \notin I_{k'},\\ t \in [0,T], w_s^{k'} \in B_{G+1}^1}} \Big\{\Big|\mu_k^i\Big(t, \{w_s^{k'}\}_{\substack{k'=1,2\\ s \notin I_{k'}}}\Big)\Big|,$$

$$\left|(\mu_k^i)'_t\left(t,\{w_s^{k'}\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\right)\right|,\ \left|(\mu_k^i)'_{w_s^{k'}}\left(t,\{w_s^{k'}\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\right)\right|\Bigg\},$$

$$\gamma=\min_{\substack{1\le i\le n\\ k=\overline{1,2}}}\left|\lambda_i(a_k^0,0,g(a_k^0))-a_k'(0)\right|.$$

Нехай λ_0 — стала Ліпшиця функцій $\lambda_i(x,t,u)$, $(\lambda_i)'_x(x,t,u)$, $(\lambda_i)'_{u_j}(x,t,u)$, $i,j=\overline{1,n}$, на множині $G_T\times B^n_{G+1}$; f_0 — стала Ліпшиця функцій $f_i(x,t,u)$, $(f_i)'_x(x,t,u)$, $(f_i)'_{u_j}(x,t,u)$, $i,j=\overline{1,n}$, на множині $G_T\times B^n_{G+1}$; a_0 — стала Ліпшиця функцій $a_k(t)$, $a_k'(t)$, $k=1,2$, на множині $[0,T]$; μ_0 — стала Ліпшиця функцій $\mu_k^i\left(t,\{w_s^{k'}\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\right)$, $(\mu_k^i)'_t\left(t,\{w_s^{k'}\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\right)$, $(\mu_k^i)'_{w_s^{k'}}\left(t,\{w_s^{k'}\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\right)$, $i\in I_k$, $s\notin I_{k'}$, $k,k'=1,2$, на множині $[0,T]\times B^{2n-\operatorname{card}I_1-\operatorname{card}I_2}_{G+1}$; g_0 — стала Ліпшиця функцій $g_i(x)$, $g_i'(x)$, $i=\overline{1,n}$, на множині $[a_1^0,a_2^0]$.

Визначимо функції $\bar g_i(x)$, $i=\overline{1,n}$:

$$\bar g_i(x)=\begin{cases} g_i(a_1^0), & \text{якщо} \quad x<a_1^0,\\ g_i(x), & \text{якщо} \quad a_1^0\le x\le a_2^0,\\ g_i(a_2^0), & \text{якщо} \quad x>a_2^0.\end{cases}$$

Введемо метричний простір $Q=Q(T_0,U,U_1,L,L_1)$, що складається з функцій $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $u_i\in\mathbb{C}^1(G_{T_0})$, які задовольняють умову (2) і наступні обмеження:

H$_1$) $\left|u_i(x,t)-\bar g_i(x)\right|\le U$, $i=\overline{1,n}$, $(x,t)\in G_{T_0}$, де $U\le1$;

H$_2$) $u_i\in\operatorname{Lip}(G_{T_0},L)$, $i=\overline{1,n}$;

H$_3$) $\left|\dfrac{\partial}{\partial x}u_i(x,t)\right|\le U_1$, $i=\overline{1,n}$, $(x,t)\in G_{T_0}$;

H$_4$) $\dfrac{\partial}{\partial x}u_i\in\operatorname{Lip}_x(G_{T_0},L_1)$, $i=\overline{1,n}$.

Нехай $\{u,v\}\subset Q$, тоді метрику на елементах простору Q визначимо як

$$\rho(u,v)=\max_{\substack{1\le i\le n\\ (x,t)\in G_{T_0}}}\left\{\left|u_i(x,t)-v_i(x,t)\right|,\ \left|\frac{\partial u_i}{\partial x}(x,t)-\frac{\partial v_i}{\partial x}(x,t)\right|\right\}.$$

Позначимо через $\varphi_i(\tau;x,t,u)$, $i=\overline{1,n}$, розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\lambda_i(\xi,\tau,u(\xi,\tau)),\quad \xi(t)=x, \tag{4}$$

що є характеристиками системи рівнянь (1), причому залежність $\varphi_i(\tau;x,t,u)$ від u є функціоналом. Ординату точки перетину функції φ_i з межею області G_{T_0} при русі в напрямі спадання аргумента τ позначимо через $\chi_i(x,t;u)$, тобто

$$\chi_i(x,t;u)=\min\{\tau\colon(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau)\in G_{T_0}\}.$$

Встановимо обмеження на параметри простору Q, при яких для $\Lambda_0>0$, $\varepsilon_0\in\left(0,\min\limits_{t\in[0,T]}|a_1(t)-a_2(t)|\right)$ виконуються нерівності

$$
\begin{aligned}
&\big|\lambda_i(x,t,u(x,t)) - a_1'(t)\big| \ge \Lambda_0, \quad t\in[0,T_0],\\
&a_1(t)\le x\le a_1(t)+\varepsilon_0, \quad u\in Q, \quad i=\overline{1,n},\\
&\big|\lambda_i(x,t,u(x,t)) - a_2'(t)\big| \ge \Lambda_0, \quad t\in[0,T_0],\\
&a_2(t)-\varepsilon_0\le x\le a_2(t), \quad u\in Q, \quad i=\overline{1,n}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Для визначеності розглянемо першу нерівність

$$
\big|\lambda_i(x,t,u) - a_1'(t)\big| = \Big|\lambda_i(x,t,u) - \lambda_i(a_1^0,0,g(a_1^0)) +
$$

$$
+\lambda_i(a_1^0,0,g(a_1^0)) - (a_1'(t) - a_1'(0) + a_1'(0))\Big| \ge
$$

$$
\ge \big|\lambda_i(a_1^0,0,g(a_1^0)) - a_1'(0)\big| - \big|\lambda_i(x,t,u) - \lambda_i(a_1^0,0,g(a_1^0))\big| - \big|a_1'(t) - a_1'(0)\big| \ge
$$

$$
\ge \gamma - \lambda_0\big(\varepsilon_0 + AT_0 + T_0 + nU + ng_0(\varepsilon_0 + AT_0)\big) - a_0T_0 \ge \Lambda_0
$$

за умови, що

$$
\lambda_0\big(\varepsilon_0 + AT_0 + T_0 + nU + ng_0(\varepsilon_0 + AT_0)\big) + a_0T_0 \le \gamma - \Lambda_0. \tag{6}
$$

Легко бачити, що при достатньо малих значеннях параметрів U та T_0 нерівність (6) виконується для деяких достатньо малого ε_0 та $\Lambda_0 < \gamma$.

Зінтегрувавши рівності (1) уздовж відповідних характеристик $\xi = \varphi_i(\tau; x, t, u)$ з використанням нерівностей (5) та умов (2), (3), отримаємо систему інтегро-функціональних рівнянь

$$
u_i(x,t) = \vartheta_i(x,t;u) + \int\limits_{\chi_i(x,t;u)}^{t} f_i\big(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau)\big)d\tau, \quad i=\overline{1,n}, \tag{7}
$$

де

$$
\vartheta_i(x,t;u) = \begin{cases} g_i(\varphi_i(0;x,t,u)), \quad \text{якщо} \quad \chi_i(x,t;u)=0,\\[2mm] \mu_k^i\bigg(\chi_i(x,t;u),\ \big\{u_s(a_{k'}(\chi_i(x,t;u)),\chi_i(x,t;u))\big\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\bigg),\\ \qquad \text{якщо} \ \ \chi_i(x,t;u)>0, \quad \varphi_i(\chi(x,t;u);x,t,u) = a_k(\chi_i(x,t;u)),\\ \qquad i\in I_k, \quad k=1,2. \end{cases}
$$

Зауважимо, що набір функцій $u \in Q$, які задовольняють систему (7), буде класичним розв'язком задачі (1) – (3).

На елементах простору Q визначимо оператор $S\colon u = \big((Su)_1,\ldots,(Su)_n\big)$ так, що

$$
(Su)_i(x,t) = \tilde\vartheta_i(x,t,u,Su) +
$$

$$
+\int\limits_{\chi_i(x,t;u)}^{t} f_i\Big(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau)\Big)d\tau, \quad i=\overline{1,n},
$$

де

$$\tilde{\vartheta}_i(x,t,u,Su) = \begin{cases} g_i(\varphi_i(0;x,t,u)), \qquad \text{якщо} \ \ \chi_i(x,t;u)=0, \\ \mu_k^i\left(\chi_i(x,t;u),\ \big\{(Su)_s(a_{k'}(\chi_i(x,t;u)),\chi_i(x,t;u))\big\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\right), \\ \qquad \text{якщо} \ \ \chi_i(x,t;u)>0, \quad \varphi_i(\chi_i(x,t;u);x,t,u)=a_k(\chi_i(x,t;u)), \\ \qquad i\in I_k, \quad k=1,2, \end{cases}$$

до того ж

$$(2A+\Lambda)T_0 \le a_2^0 - a_1^0. \tag{8}$$

Покажемо, що існує набір параметрів (T_0,U,U_1,L,L_1), при яких оператор S відображає повний метричний простір (Q,ρ), $\rho=\rho(u^1,u^2)$, в себе і є стискаючим. Для отримання відповідних оцінок доведемо наступні леми.

Лема 1. *Нехай* $(x_j,t_j)\in G_{T_0}$, $u^j\in Q$, $j=1,2$. *Тоді функція* $\varphi_i(\tau;x,t,u)$, *що є розв'язком задачі* (4), *задовольняє нерівність*

$$|\Delta_j\varphi_i(\tau;x_j,t_j,u^j)| \le (|\Delta x_j| + \Lambda|\Delta t_j| + \rho\lambda_0 T_0)e^{\lambda_0(1+nL)T_0}.$$

Доведення. Запишемо $\varphi_i(\tau;x_j,t_j,u^j)$, як розв'язок рівняння (4), у вигляді

$$\varphi_i(\tau;x_j,t_j,u^j) = x_j + \int\limits_{t_j}^{\tau} \lambda_i\big(\varphi_i(\theta;x_j,t_j,u^j),\theta,u^j(\varphi_i(\theta;x_j,t_j,u^j),\theta)\big)d\theta, \quad j=1,2.$$

З різниці цих виразів, застосовуючи до неї лему Гронуолла – Беллмана, отримуємо твердження леми 1.

Введемо множини для $v\in Q$

$$G_{T_0}^{i,v,g} = \big\{(x,t)\in G_{T_0} \mid \chi_i(x,t,v)=0\big\}, \quad i=\overline{1,n},$$

$$G_{T_0}^{i,v,a_k} = \Big\{(x,t)\in G_{T_0} \mid \chi_i(x,t,v)>0,\ \varphi_i(\chi_i(x,t,v);x,t,v)=a_k(\chi_i(x,t;v))\Big\},$$

$$i=\overline{1,n}, \quad k=1,2.$$

Лема 2. *Нехай* $\big\{(x_1,t),(x_2,t)\big\}\subset G_{T_0}^{i,u,a_k}$, $k=1,2$, $u\in Q$, *до того ж параметри* T_0 *та* U *є достатньо малими, а саме, задовольняють умови* (6) *та*

$$(\Lambda+A)T_0 \le \varepsilon_0. \tag{9}$$

Тоді виконується нерівність

$$\big|\Delta_j\chi_i(x_j,t;u)\big| \le \Lambda_0^{-1}e^{\lambda_0(1+nL)T_0}|\Delta x_j|.$$

Доведення. Нехай для визначеності $k=1$, $x_1>x_2$. Тоді $\chi_i(x_1,t;u) < \chi_i(x_2,t;u)$. Розглянемо різницю $\varphi_i(\tau;x_1,t,u)-a_1(\tau)$. За теоремою Лагранжа справджується оцінка

$$\big|\varphi_i(\chi_i(x_2,t,u);x_1,t,u) - a_1(\chi_i(x_2,t;u))\big| =$$

$$= \Big|\lambda_i(\varphi_i(\tau_0;x_1,t,u),\tau_0,u(\varphi_i(\tau_0;x_1,t,u),\tau_0)) - a_1'(\tau_0)\Big|\big|\Delta_j\chi_i(x_j,t;u)\big|.$$

Оскільки

$$\left|\varphi_i(\tau_0; x_1, t, u) - a_1(\tau_0)\right| \le (\Lambda + A)T_0 \le \varepsilon_0,$$

то отримуємо оцінку

$$\left|\varphi_i(\chi_i(x_2, t; u); x_1, t, u) - a_1(\chi_i(x_2, t; u))\right| \ge \Lambda_0 |\Delta_j \chi_i(x_j, t; u)|,$$

з якої випливає нерівність

$$\left|\Delta_j \chi_i(x_j, t; u)\right| \le \Lambda_0^{-1} |\varphi_i(\chi_i(x_2, t; u); x_1, t, u) - a_1(\chi_i(x_2, t; u))| \le$$

$$\le \Lambda_0^{-1} \left|\Delta_j \varphi_i(\chi_i(x_2, t; u); x_j, t, u)\right| \le \Lambda_0^{-1} e^{\lambda_0(1+nL)T_0} |\Delta x_j|.$$

Лему доведено.

Припустимо, що

$$\lambda_0(1 + nL)T_0 \le 1. \tag{10}$$

Тоді $e^{\lambda_0(1+nL)T_0} \le e$, що спрощує оцінки попередніх лем.

Нехай $u \in Q$, встановимо обмеження на параметри метричного простору Q, при яких Su задовольняє умови $\mathrm{H}_1 - \mathrm{H}_4$.

Дослідимо, за яких умов $(Su)_i$, $i = \overline{1, n}$, задовольняє обмеження H_1 простору Q.

Розглянемо випадок $\chi_i(x, t; u) = 0$. Оскільки

$$\left|(Su)_i(x, t) - \bar{g}_i(x)\right| \le |g_i(\varphi_i(0; x, t, u)) - \bar{g}_i(x)| +$$

$$+ \int\limits_{\chi_i(x,t,u)}^{t} |f_i(\varphi_i(\tau; x, t, u), \tau, u(\varphi_i(\tau; x, t, u), \tau)) d\tau| \le$$

$$\le g_0 |\varphi_i(0; x, t, u) - x| + F T_0 \le (g_0 \Lambda + F) T_0,$$

то необхідним є виконання нерівності

$$(g_0 \Lambda + F) T_0 \le U. \tag{11}$$

Розглянемо випадок $\chi_i(x, t, u) > 0$. Припустимо, що T_0 достатньо мале, щоб задовольнити нерівність

$$T_0 f_0 (1 + nL) \max\{1, A + \Lambda\} e \le 1. \tag{12}$$

Тоді, враховуючи оцінку

$$\left|\Delta_j \varphi_i(\tau; a_k(t_j), t_j, u)\right| \le (A + \Lambda) e |\Delta t_j|, \tag{13}$$

отримуємо

$$\left|\Delta_j (Su)_i(a_k(t_j), t_j)\right| \le ((g_0 + T_0 f_0(1 + nL))(A + \Lambda)e + F)|\Delta t_j| \le k_1 |\Delta t_j|,$$

де $k_1 = g_0(A + \Lambda)e + F + 1$.

Використовуючи встановлену оцінку, маємо

$$\left|(Su)_i(x, t) - \bar{g}_i(x)\right| \le F T_0 + \mu_0(1 + 2nk_1)T_0 + g_0(\Lambda + A)T_0.$$

Отже, якщо
$$\big[F + \mu_0(1 + 2nk_1) + g_0(\Lambda + A)\big]T_0 \le U, \tag{14}$$
то
$$\big|(Su)_i(x,t) - \bar{g}_i(x)\big| \le U, \quad (x,t) \in G_{T_0}.$$

Перейдемо до дослідження умов, за яких $(Su)_i$, $i = \overline{1,n}$, задовольняє обмеження H_2. Розглянемо випадок $\chi_i(x,t;u) = 0$, тоді
$$\big|\Delta_j(Su)_i(x_j,t)\big| \le (g_0 + T_0 f_0(1 + nL))e|\Delta x_j| \le (g_0 e + 1)|\Delta x_j|.$$
У випадку $\chi_i(x,t;u) > 0$
$$\big|\Delta_j(Su)_i(x_j,t)\big| \le (\mu_0(1 + 2nk_1)\Lambda_0^{-1}e + T_0 f_0(1 + nL)e + F\Lambda_0^{-1}e)|\Delta x_j|.$$

Отже, в будь-якому випадку справджується оцінка
$$\big|\Delta_j(Su)_i(x_j,t)\big| \le k_2|\Delta x_j|,$$
де $k_2 = \max\big\{g_0 e, \mu_0(1 + 2nk_1)\Lambda_0^{-1}e + F\Lambda_0^{-1}e\big\} + 1$. Оскільки $\big|\Delta_j(Su)_i(x,t_j)\big| \le$ $\le (F + \Lambda k_2)|\Delta t_j|$, то $(Su)_i \in \mathrm{Lip}(G_{T_0}, L)$, якщо
$$F + \max\{1, \Lambda\}k_2 \le L. \tag{15}$$

Перейдемо до перевірки умови H_3. Зауважимо, що
$$\frac{\partial(Su)_i}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial\tilde{\vartheta}_i}{\partial x}(x,t,u,Su) + (Yu)_i(x,t) + (Zu)_i(x,t),$$
де
$$\frac{\partial\tilde{\vartheta}_i}{\partial x}(x,t,u,Su) =$$
$$= \begin{cases} g_i'(\varphi_i(0;x,t,u))\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x}(0;x,t,u), \quad \text{якщо } \chi_i(x,t;u) = 0, \\ \Bigg[\bigg((\mu_k^i)_t'(\chi_i(x,t;u), \{(Su)_s(a_{k'}(\chi_i(x,t;u)), \chi_i(x,t;u))\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\bigg) + \\ \quad + \sum\limits_{\substack{s\notin I_{k'}\\ k'=1,2}} \bigg((\mu_k^i)'_{w_s^{k'}}(\chi_i(x,t;u), \big\{(Su)_s(a_{k'}(\chi_i(x,t;u)), \chi_i(x,t;u))\big\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\bigg) \times \\ \quad \times \bigg[\dfrac{\partial(Su)_s}{\partial x}(a_{k'}(\chi_i(x,t;u)), \chi_i(x,t;u))a_{k'}'(\chi_i(x,t;u)) + \\ \quad + \dfrac{\partial(Su)_s}{\partial t}(a_{k'}(\chi_i(x,t;u)), \chi_i(x,t;u))\bigg]\Bigg]\dfrac{\partial\chi_i}{\partial x}(x,t;u), \\ \quad \text{якщо } \chi_i(x,t;u) > 0, \\ \varphi_i(\chi(x,t;u);x,t,u) = a_k(\chi_i(x,t;u)), \quad i \in I_k, \quad k = 1,2, \end{cases}$$

$$(Yu)_i(x,t) =$$

$$= \begin{cases} 0, \qquad \text{якщо} \;\; \chi_i(x,t;u)=0, \\ -f_i\big(a_k(\chi_i(x,t;u)),\chi_i(x,t;u),u(a_k(\chi_i(x,t;u)),\chi_i(x,t;u))\big)\dfrac{\partial\chi_i}{\partial x}(x,t;u), \\ \qquad \text{якщо} \quad \chi_i(x,t;u)>0, \quad \varphi_i(\chi(x,t;u);x,t,u)=a_k(\chi_i(x,t;u)), \\ \qquad i\in I_k, \quad k=1,2, \end{cases}$$

$$(Zu)_i(x,t) = \int\limits_{\chi_i(x,t;u)}^{t} \Bigg((f_i)'_x(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(f_i)'_{u_j}(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau))\times$$

$$\times\frac{\partial u_j}{\partial x}(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau)\Bigg)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t,u)d\tau.$$

Крім того, якщо $\chi_i(x,t;u)=0$, то

$$\frac{\partial(Su)_i}{\partial t}(x,t) = g_i'\big(\varphi_i(0;x,t,u)\big)\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(0;x,t,u) + f_i(x,t,u(x,t)) +$$

$$+\int\limits_0^t \Bigg((f_i)_x\big(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau)\big) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(f_i)'_{u_j}\big(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau,u(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau)\big)\times$$

$$\times\frac{\partial u_j}{\partial x}(\varphi_i(\tau;x,t,u),\tau)\Bigg)\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(\tau;x,t,u)d\tau.$$

Зазначимо, що виконуються рівності

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t,u) = \exp\int\limits_\tau^t \Bigg\{ -\Bigg((\lambda_i)'_x\big(\varphi_i(\theta;x,t,u),\theta,u(\varphi_i(\theta;x,t,u),\theta)\big) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i)'_{u_j}\big(\varphi_i(\theta;x,t,u),\theta,u(\varphi_i(\theta;x,t,u),\theta)\big)\frac{\partial u_j}{\partial x}(\varphi_i(\theta;x,t,u),\theta)\Bigg)\Bigg\}d\theta,$$

$$\frac{\partial\chi_i}{\partial x}(x,t;u) =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\chi_i(x,t;u);x,t,u)}{a_k'(\chi_i(x,t;u)) - \lambda_i(a_k(\chi_i(x,t;u)),\chi_i(x,t;u),u(a_k(\chi_i(x,t;u)),\chi_i(x,t;u)))},$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(\tau;x,t,u)=$$

$$=-\lambda_i(x,t,u(x,t))\exp\int_\tau^t\Bigg\{-\Bigg((\lambda_i)'_x(\varphi_i(\theta;x,t,u),\theta,u(\varphi_i(\theta;x,t,u),\theta))+$$

$$+\sum_{j=1}^n(\lambda_i)'_{u_j}\big(\varphi_i(\theta;x,t,u),\theta,u(\varphi_i(\theta;x,t,u),\theta)\big)\frac{\partial u_j}{\partial x}(\varphi_i(\theta;x,t,u),\theta)\Bigg)\Bigg\}d\theta.$$

Нехай $\chi_i(x,t;u)=0$ і

$$\Lambda(1+nU_1)T_0\le 1, \tag{16}$$

тоді мають місце оцінки

$$\left|\frac{\partial(Su)_i}{\partial x}(x,t)\right|\le G_1e+T_0F(1+nU_1)e,$$

$$\left|\frac{\partial(Su)_i}{\partial t}(x,t)\right|\le G_1\Lambda e+F+T_0F(1+nU_1)\Lambda e,$$

або

$$\left|\frac{\partial(Su)_i}{\partial x}(x,t)\right|\le G_1e+1,$$

$$\left|\frac{\partial(Su)_i}{\partial t}(x,t)\right|\le G_1\Lambda e+F+1,$$

якщо

$$T_0F(1+nU_1)\max\{1,\Lambda\}e\le 1. \tag{17}$$

При $\chi_i(x,t;u)>0$

$$\left|\frac{\partial(Su)_i}{\partial x}(x,t)\right|\le\Big(M+2nM((G_1e+1)A+(G_1\Lambda e+F+1))\Big)e\Lambda_0^{-1}+Fe\Lambda_0^{-1}+1.$$

Таким чином, ми можемо забезпечити виконання нерівності

$$\left|\frac{\partial(Su)_i}{\partial x}(x,t)\right|\le U_1,\quad (x,t)\in G_{T_0},$$

якщо

$$\max\Big\{\big[M+F+2nM((G_1e+1)A+(G_1\Lambda e+F+1))\big]e\Lambda_0^{-1},G_1e\Big\}+1\le U_1. \tag{18}$$

Розглянемо умову H_4, тобто переконаємося, що $\dfrac{\partial(Su)_i}{\partial x}\in\mathrm{Lip}(G_{T_0},L_1)$, $i=\overline{1,n}$.

Лема 3. *Нехай* $(x_j,t)\in G_{T_0}$, $j=1,2$, $u\in Q$. *Тоді справджується оцінка*

$$\left|\Delta_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x_j,t,u)\right|\le k_3|\Delta x_j|,$$

де $k_3=e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}T_0\big(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1)+n\Lambda L_1\big)e^{\lambda_0(1+nL)T_0}$.

Доведення. Застосувавши нерівність $|e^a - e^b| \leq e^c|a-b|$, де $c \in (a,b)$, та провівши відповідні оцінки, отримаємо твердження леми 3.

В умовах теореми 1 $k_3 \leq T_0(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1)+n\Lambda L_1)e^2$, тому, припускаючи виконання нерівності

$$T_0\Big(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1)+n\Lambda L_1\Big)e^2 \leq 1, \tag{19}$$

отримуємо оцінку $k_3 \leq 1$.

Лема 4. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}$, $\tau_j \in [\chi_i(x,t;u),t]$, $j=1,2$, $u \in Q$. *Тоді*

$$\left|\Delta_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\tau_j;x,t,u)\right| \leq e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)|\Delta\tau_j|.$$

Доведення з незначними змінами повторює доведення леми 3.

Із припущень теореми 1 отримаємо

$$\left|\Delta_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\tau_j;x,t,u)\right| \leq \Lambda(1+nU_1)e|\Delta\tau_j|.$$

Лема 5. *Нехай* $(x_j,t) \in G_{T_0}$, $j=1,2$, $u \in Q$, *а також виконуються умови леми* 2. *Тоді*

$$\left|\Delta_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x}(x_j,t;u)\right| \leq \Big(\Lambda_0^{-1}(k_3 + e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)\Lambda_0^{-1}e^{\lambda_0(1+nL)T_0}) +$$
$$+\, e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda_0^{-2}(a_0+\lambda_0(1+nL)(A+1))\Lambda_0^{-1}e^{\lambda_0(1+nL)T_0}\Big)|\Delta x_j|.$$

Доведення безпосередньо випливає з означень відповідних функцій та попередніх оцінок.

Позначимо $k_4 = \Lambda_0^{-1}(1+e^2\Lambda(1+nU_1)\Lambda_0^{-1}) + e^2\Lambda_0^{-3}(a_0+\lambda_0(1+nL)(A+1))$, тоді, враховуючи припущення, маємо

$$\left|\Delta_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x}(x_j,t;u)\right| \leq k_4|\Delta x_j|.$$

Нехай $\chi_i(x,t;u)=0$, тоді

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su)_i}{\partial x}(x_j,t)\right| \leq \Big(G_1 + g_0e^2 + T_0(f_0(1+nL)(1+nU_1)+nFL_1)e^2 +$$
$$+T_0F(1+nU_1)\Big)|\Delta x_j|.$$

Якщо

$$T_0\Big[(f_0(1+nL)(1+nU_1)+nFL_1)e^2 + F(1+nU_1)\Big] \leq 1, \tag{20}$$

то

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su)_i}{\partial x}(x_j,t)\right| \leq (G_1+g_0e^2+1)|\Delta x_j|.$$

Для випадку $\chi_i(x,t;u)>0$ також наведемо оцінки, сформульовані у вигляді наступних двох лем.

Лема 6. *Нехай* $t_j \in [0, T_0]$, $j = 1, 2, u \in Q$. *Тоді*

$$\left|\Delta_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\tau; a_k(t_j), t_j, u)\right| \leq$$

$$\leq (T_0 e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} e^{\lambda_0(1+nL)T_0}(A+\Lambda)(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1) +$$

$$+ n\Lambda L_1) + e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1))|\Delta t_j|.$$

Зауважимо, що якщо

$$T_0 e^2 (A+\Lambda)(\lambda_0(1+nU_1)(1+nL) + n\Lambda L_1) \leq 1, \tag{21}$$

то

$$\left|\Delta_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\tau; a_k(t_j), t_j, u)\right| \leq k_5 |\Delta t_j|,$$

де $k_5 = 1 + e\Lambda(1 + nU_1)$.

Лема 7. *Нехай* $t_j \in [0, T_0]$, $j = 1, 2$, $u \in Q$, *а також виконуються умови леми* 2. *Тоді*

$$\left|\Delta_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\tau; a_k(t_j), t_j, u)\right| \leq$$

$$\leq \Big(\lambda_0(1+nL)(A+1)e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} + \Lambda(T_0 e^{\Lambda(1+nU_1)T_0} \times$$

$$\times e^{\lambda_0(1+nL)T_0}(A+\Lambda)(\lambda_0(1+nL)(1+nU_1) +$$

$$+ n\Lambda L_1) + e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1))\Big)|\Delta t_j|.$$

Доведення цих лем безпосередньо випливають з означень функцій $\varphi_i(\tau; x, t, u)$, $i = \overline{1, n}$.

Позначимо $k_6 = \lambda_0(1 + nL)(A + 1)e + \Lambda k_5$. Тоді

$$\left|\Delta_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\tau; a_k(t_j), t_j, u)\right| \leq k_6 |\Delta t_j|.$$

На основі цих оцінок маємо

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su)_i}{\partial x}(a_k(t_j), t_j)\right| \leq \Big[g_0(A+\Lambda)e^2 + G_1 k_5 + F(1+nU_1)e + T_0(f_0(1+nL)\times$$

$$\times(1+nU_1) + nFL_1)e^2(A+\Lambda) + T_0 F(1+nU_1)k_5\Big]|\Delta t_j|.$$

Якщо ж

$$T_0\Big((f_0(1+nL)(1+nU_1) + nFL_1)e^2(A+\Lambda) + F(1+nU_1)k_5\Big) \leq 1, \tag{22}$$

то

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su)_i}{\partial x}(a_k(t_j), t_j)\right| \leq \Big[g_0(A+\Lambda)e^2 + G_1 k_5 + F(1+nU_1)e + 1\Big]|\Delta t_j| = k_7 |\Delta t_j|.$$

Перейдемо до оцінки різниці

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su)_i}{\partial t}(a_k(t_j), t_j)\right| \leq$$

$$\leq \Big[g_0(A+\Lambda)e^2\Lambda + G_1k_6 + f_0(1+nL)(A+1) + \Lambda eF(1+nU_1) +$$

$$+ T_0(f_0(1+nL)(A+\Lambda)e(1+nU_1) + nFL_1(A+\Lambda)e)e\Lambda + T_0F(1+nU_1)k_6\Big]|\Delta t_j|.$$

Зазначимо, що якщо має місце нерівність

$$T_0\Big((f_0(1+nL)(1+nU_1) + nFL_1)(A+\Lambda)e^2\Lambda + F(1+nU_1)k_6\Big) \leq 1, \qquad (23)$$

то

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su)_i}{\partial t}(a_k(t_j), t_j)\right| \leq$$

$$\leq \Big[g_0(A+\Lambda)e^2\Lambda + G_1k_6 + f_0(1+nL)(A+1) + \Lambda eF(1+nU_1) + 1\Big]|\Delta t_j| =$$

$$= k_8|\Delta t_j|.$$

Легко бачити, що виконується нерівність

$$\left|\frac{\partial (Su)_i}{\partial x}(a_k(t), t)a_k'(t) + \frac{\partial (Su)_i}{\partial t}(a_k(t), t)\right| \leq (G_1e+1)A + G_1\Lambda e + F + 1 = k_9.$$

Повернемось до перевірки умови H$_4$ при $\chi_i(x,t;u) > 0$, тобто

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su)_i}{\partial x}(x_j, t)\right| \leq$$

$$\leq \Big[\mu_0(1+2nk_1)(1+2nk_9) + 2nM(k_7A + (G_1e+1)a_0 + k_8)\Lambda_0^{-2}e^2 +$$

$$+ M(1+2nk_9)k_4 + f_0(A+1)(1+nL)e^2\Lambda_0^{-2} + Fk_4 + 1 + F(1+nU_1)e^2\Lambda_0^{-1}\Big]|\Delta x_j|.$$

Отже, $\dfrac{\partial (Su)_i}{\partial x} \in \mathrm{Lip}(G_{T_0}, L_1)$, $i = \overline{1,n}$, якщо

$$\max\Big\{\mu_0(1+2nk_1)(1+2nk_9) + 2nM(k_7A + (G_1e+1)a_0 + k_8)\Lambda_0^{-2}e^2 +$$

$$+ M(1+2nk_9)k_4 + f_0(A+1)(1+nL)e^2\Lambda_0^{-2} + Fk_4 +$$

$$+ F(1+nU_1)e^2\Lambda_0^{-1}, G_1 + g_0e^2\Big\} + 1 \leq L_1. \qquad (24)$$

Тепер дослідимо стискаючі властивості оператора S у просторі Q. Для цього нам знадобляться оцінки, сформульовані у наступних лемах.

Лема 8. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}$, $u^j \in Q$, $j = 1, 2$, *а параметри* U *та* T_0 *задовольняють умови леми* 2. *Тоді виконується нерівність*

$$\left|\Delta_j \chi_i(x,t;u^j)\right| \leq \Lambda_0^{-1}e^{\lambda_0(1+nL)T_0}\lambda_0T_0\rho.$$

Доведення. Нехай $k = 1$ і $\chi_i(x,t;u^1) > \chi_i(x,t;u^2)$. Розглянемо різницю $\varphi_i(\tau;x,t,u^2) - a_1(\tau)$. За теоремою Лагранжа має місце оцінка

$$\left|\varphi_i(\chi_i(x,t;u^1);x,t,u^2) - a_1(\chi_i(x,t;u^1))\right| =$$

$$= \left|\lambda_i(\varphi_i(\tau_0;x,t,u^2),\tau_0,u^2(\varphi_i(\tau_0;x,t,u^2),\tau_0)) - a_1'(\tau_0)\right| |\Delta_j\chi_i(x_j,t;u)| \geq$$

$$\geq \Lambda_0|\Delta_j\chi_i(x,t;u^j)|.$$

На підставі леми 1 маємо

$$\left|\Delta_j\chi_i(x,t;u^j)\right| \leq \Lambda_0^{-1}|\Delta_j\varphi_i(\chi_i(x,t;u^1);x,t,u^j)| \leq \Lambda_0^{-1}e^{\lambda_0(1+nL)T_0}\lambda_0T_0\rho.$$

Лему 8 доведено.

При виконанні припущень теореми 1 оцінка з цієї леми дещо спроститься:

$$|\Delta_j\chi_i(x,t;u^j)| \leq \Lambda_0^{-1}e\lambda_0T_0\rho.$$

Лема 9. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{i,u^1,a_k} \cap G_{T_0}^{i,u^2,g}$, $u^j \in Q$, $j = 1,2$, *а параметри* U *та* T_0 *задовольняють умови леми* 2. *Тоді виконується нерівність*

$$\left|\varphi_i(0;x,t,u^2) - a_k^0\right| \leq e^{\lambda_0(1+nL)T_0}\lambda_0T_0\rho.$$

Доведення. Нехай $\varphi_i(\chi_i(x,t;u^1);x,t,u^1) = a_1(\chi_i(x,t;u^1))$. Розглянемо функцію

$$\Phi(\tau) = \lambda_i(\varphi_i(\tau;x,t,u^2),\tau,u^2(\varphi_i(\tau;x,t,u^2),\tau)) - a_1'(\tau).$$

Легко бачити, що $\Phi(t) \geq \Lambda_0$. З рівномірної неперервності $\Phi(\tau)$ на $[0,t]$ випливає існування такого $\delta > 0$, що як тільки $\Phi(\tau_0) \geq \Lambda_0$, $\tau_0 \in [0,t]$, то $\Phi(\tau) \geq \Lambda_0/2$, $\tau \in [\tau_0 - \delta, \tau_0]$. Тому $\Phi(\tau) \geq \Lambda_0/2 > 0$, $\tau \in [t-\delta,t]$, а отже, різниця $\varphi_i(\tau;x,t,u^2) - a_1(\tau)$, $\tau \in [t-\delta,t]$, монотонно зростає при збільшенні τ.

Таким чином, $|\varphi_i(t-\delta;x,t,u^2) - a_1(t-\delta)| \leq |x - a_1(t)| \leq \varepsilon_0$, а тому $\Phi(t-\delta) \geq \Lambda_0$. Продовжуючи наведені вище міркування, отримуємо $\Phi(\tau) \geq \Lambda_0/2 > 0$, $\tau \in [t-2\delta,t-\delta]$, а отже, різниця $\varphi_i(\tau;x,t,u^2) - a_1(\tau)$, $\tau \in [t-2\delta,t-\delta]$, монотонно зростає при збільшенні τ. Тоді $\left|\varphi_i(t-2\delta;x,t,u^2) - a_1(t-2\delta)\right| \leq \varepsilon_0$, звідки $\Phi(t-2\delta) \geq \Lambda_0$. За скінченне число кроків отримаємо $\Phi(\tau) \geq \Lambda_0 > 0$, $\tau \in [0,t]$, а отже, монотонність різниці $\varphi_i(\tau;x,t,u^2) - a_1(\tau)$, $\tau \in [0,t]$.

Використовуючи теорему Лагранжа та зазначену монотонність, маємо оцінку

$$\left|\varphi_i(0;x,t,u^2) - a_1^0\right| \leq \left|\varphi_i(\chi_i(x,t;u^1);x,t,u^2) - a_1(\chi_i(x,t;u^1)\right| \leq$$

$$\leq |\Delta_j\varphi_i(\chi_i(x,t;u^1);x,t,u^j)| \leq e^{\lambda_0(1+nL)T_0}\lambda_0T_0\rho.$$

Лему 9 доведено.

Лема 10. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}^{i,u^1,a_k} \cap G_{T_0}^{i,u^2,g}$, $u^j \in Q$, $j = 1,2$, *до того ж параметри* U *та* T_0 *задовольняють умови леми* 2. *Тоді виконується нерівність*

$$\chi_i(x,t;u^1) \leq \Lambda_0^{-1}e^{\lambda_0(1+nL)T_0}\lambda_0T_0\rho.$$

Доведення. Нехай для визначеності $\varphi_i(\chi_i(x,t;u^1);x,t,u^1) = a_1(\chi_i(x,t;u^1))$. Повторивши ті ж міркування, що й при доведенні леми 8, розглянемо різницю $\varphi_i(\tau;x,t,u^2) - a_1(\tau)$. Використавши теорему Лагранжа та монотонність вказаної різниці, одержимо

$$\Big|\varphi_i(\chi_i(x,t;u^1);x,t,u^2) - a_1(\chi_i(x,t;u^1))\Big| \geq$$

$$\geq \Big|(\varphi_i(\chi_i(x,t;u^1);x,t,u^2) - a_1(\chi_i(x,t;u^1))) - (\varphi_i(0;x,t,u^2) - a_1^0)\Big| =$$

$$= \Big|\lambda_i(\varphi_i(\tau_0;x,t,u^2),\tau_0,u^2(\varphi_i(\tau_0;x,t,u^2),\tau_0)) - a_1'(\tau_0)\Big|\chi_i(x,t;u^1) \geq$$

$$\geq \Lambda_0\chi_i(x,t;u^1).$$

Отже,

$$\chi_i(x,t;u^1) \leq \Lambda_0^{-1}\big|\varphi_i(\chi_i(x,t;u^1);x,t,u^2) - a_1(\chi_i(x,t;u^1))\big| \leq$$

$$\leq \Lambda_0^{-1}e^{\lambda_0(1+nL)T_0}\lambda_0T_0\rho.$$

Лему 10 доведено.

Лема 11. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}$, $u^j \in Q$, $j = 1,2$. *Тоді*

$$\left|\Delta_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t,u^j)\right| \leq k_{10}T_0\rho,$$

де

$$k_{10} = \Big(\lambda_0((1+nL)T_0\lambda_0e^{\lambda_0(1+nL)T_0} + n)\times$$

$$\times(1+nU_1) + n\Lambda(L_1\lambda_0T_0e^{\lambda_0(1+nL)T_0} + 1)\Big)e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}.$$

Доведення є очевидним.

Враховуючи попередні умови, а також припущення

$$L_1\lambda_0T_0e \leq 1, \tag{25}$$

маємо

$$\left|\Delta_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}(\tau;x,t,u^j)\right| \leq k_{11}T_0\rho,$$

де $k_{11} = \big[\lambda_0(e+n)(1+nU_1) + 2n\Lambda\big]e$.

Введемо іншу метрику

$$\rho_0(u,v) = \max_{\substack{(x,t)\in G_{T_0}\\ 1\leq i\leq n}}\big|u_i(x,t) - v_i(x,t)\big|$$

і позначимо $\rho_0 = \rho_0(u^1,u^2)$. Тоді наступні очевидні оцінки сформулюємо також у вигляді двох лем.

Лема 12. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}$, $u^j \in Q$, $j = 1,2$. *Тоді*

$$\left|\Delta_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}(\tau;x,t,u^j)\right| \leq k_{10}\Lambda T_0\rho + \lambda_0ne^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\rho_0.$$

Лема 13. *Нехай* $(x,t) \in G_{T_0}$, $u^j \in Q$, $j = 1,2$. *Тоді*

$$\left|\Delta_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x}(x,t;u^j)\right| \le$$
$$\le \Lambda_0^{-1}(k_{10} + e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda(1+nU_1)\Lambda_0^{-1}\lambda_0 e^{\lambda_0(1+nL)T_0})T_0\rho +$$
$$+ e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda_0^{-3}(a_0 + \lambda_0(A+1)(1+nL))\lambda_0 e^{\lambda_0(1+nL)T_0}T_0\rho +$$
$$+ \lambda_0 e^{\Lambda(1+nU_1)T_0}\Lambda_0^{-2} n\rho_0.$$

Безпосередньо з припущень теореми 1 випливає, що

$$\left|\Delta_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\tau;x,t,u^j)\right| \le k_{11}\Lambda T_0\rho + \lambda_0 ne\rho_0,$$
$$\left|\Delta_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x}(x,t;u^j)\right| \le k_{12}T_0\rho + \lambda_0 e\Lambda_0^{-2} n\rho_0,$$

де $k_{12} = \Lambda_0^{-1}(k_{11} + e^2\Lambda(1+nU_1)\Lambda_0^{-1}\lambda_0) + e^2\Lambda_0^{-3}(a_0 + \lambda_0(A+1)(1+nL))\lambda_0$.

Перейдемо до оцінки різниці $\left|\Delta_j(Su^j)_i(x,t)\right|$. Нехай $(x,t) \in G_{T_0}$, $u^j \in Q$, $j = 1,2$. Припустивши виконання нерівності

$$2(A+\Lambda)T_0 \le a_2^0 - a_1^0, \tag{26}$$

розглянемо різні випадки поведінки характеристик $\varphi_i(\tau;x,t,u^j)$, $j = 1,2$:

1) $\chi_i(x,t;u^j) = 0$, $j = 1,2$; тоді

$$\left|\Delta_j(Su^j)_i(x,t)\right| \le g_0\lambda_0 T_0 e\rho + T_0 f_0(1+nL)\lambda_0 T_0 e\rho + T_0 f_0 n\rho \le k_{13}T_0\rho,$$

де $k_{13} = g_0\lambda_0 e + f_0(e+n)$;

2) $\chi_i(x,t;u^j) > 0$, $j = 1,2$; зауважимо, що тоді характеристики $\varphi_i(\tau;x,t,u^j)$, $j = 1,2$, перетинають одну із меж $a_k(t)$, $k = 1,2$, тому з $\varphi_i(\chi_i(x,t;u^j);x,t,u^j) = a_1(\chi_i(x,t;u^j))$, $j = 1,2$, випливає оцінка

$$\left|\Delta_j(Su^j)_i(x,t)\right| \le$$
$$\le \mu_0(1+2nk_1)\Lambda_0^{-1}\lambda_0 eT_0\rho + 2n\mu_0 k_{13}T_0\rho +$$
$$+ F\Lambda_0^{-1}\lambda_0 eT_0\rho + T_0 f_0(1+nL)\lambda_0 eT_0\rho + T_0 f_0 n\rho \le$$
$$\le \Big(\mu_0(1+2nk_1)\Lambda_0^{-1}\lambda_0 e + 2n\mu_0 k_{13} + F\Lambda_0^{-1}\lambda_0 e + f_0(e+n)\Big)T_0\rho;$$

3) $\chi_i(x,t;u^1) > 0$, $\chi_i(x,t;u^2) = 0$; для визначеності вважаємо, що $\varphi_i(\chi_i(x,t;u^1);x,t,u^1) = a_1(\chi_i(x,t;u^1))$, тоді

$$\left|\Delta_j(Su^j)_i(x,t)\right| \le g_0|\varphi_i(0;x,t,u^2) - a_1^0| + \mu_0(1+2nk_1)\chi_i(x,t;u^1) +$$
$$+ T_0 f_0(1+nL)\lambda_0 T_0 e\rho + T_0 f_0 n\rho + F\chi_i(x,t;u^1) \le k_{14}T_0\rho,$$

де $k_{14} = g_0\lambda_0 e + (\mu_0(1+2nk_1) + F)\Lambda_0^{-1}\lambda_0 e + f_0(e+n)$.

Таким чином, в будь-якому із цих випадків має місце оцінка

$$|\Delta_j (Su^j)_i(x,t)| \le (k_{14} + 2n\mu_0 k_{13}) T_0 \rho.$$

Тому

$$\rho_0(Su^1, Su^2) \le (k_{14} + 2n\mu_0 k_{13}) T_0 \rho = K_1 T_0 \rho.$$

Тепер оцінимо $\left|\Delta_j \dfrac{\partial}{\partial x}(Su^j)_i(x,t)\right|$ при наведених випадках поведінки характеристик. Нехай $\chi_i(x,t;u^j) = 0$, $j = 1,2$. Тоді

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su^j)_i}{\partial x}(x,t)\right| \le$$

$$\le g_0\lambda_0 e^2 T_0\rho + G_1 k_{11} T_0 \rho + T_0[f_0(1+nL)\lambda_0 e(1+nU_1)T_0\rho +$$

$$+ f_0(1+nU_1)\rho n + nFL_1\lambda_0 e T_0\rho + nF\rho]e + T_0 F(1+nU_1)k_{11}T_0\rho \le k_{15}T_0\rho,$$

де $k_{15} = g_0\lambda_0 e^2 + (G_1+1)k_{11} + f_0(1+nU_1)(e+n)e + 2neF$. Наведемо ще одну оцінку для цього випадку, яка буде потрібною у подальшому:

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su^j)_i}{\partial t}(x,t)\right| \le$$

$$\le g_0\lambda_0 e^2 T_0\rho\Lambda + G_1 k_{11} T_0\rho\Lambda + G_1\lambda_0 n e\rho_0 + f_0 n\rho_0 +$$

$$+ T_0\Big[f_0(1+nL)\lambda_0 e T_0\rho(1+nU_1) + f_0(1+nU_1)n\rho + nFL_1\lambda_0 T_0 e\rho + nF\rho\Big]e\Lambda +$$

$$+ T_0 F(1+nU_1)(k_{11}\Lambda T_0\rho + \lambda_0 n e\rho_0) \le$$

$$\le k_{16}T_0\rho + k_{17}\rho_0,$$

де $k_{16} = g_0\lambda_0 e^2\Lambda + \Lambda(G_1+1)k_{11} + \big[f_0(1+nU_1)(e+n) + 2nF\big]e\Lambda$, $k_{17} = (G_1 + {} + 1)\lambda_0 n e + f_0 n$.

У випадку $\chi_i(x,t;u^j) > 0$, $j = 1,2$, покладемо для визначеності $\varphi_i(\chi_i(x,t;u^j); x,t,u^j) = a_1(\chi_i(x,t;u^j))$, $j = 1,2$. Тоді

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su^j)_i}{\partial x}(x,t)\right| \le$$

$$\le \Big[(\mu_0(1+2nk_1)\Lambda_0^{-1}\lambda_0 T_0 e\rho + 2n\mu_0 k_{13}T_0\rho)(1+2nk_9) +$$

$$+ 2nM((k_7 A + a_0(G_1 e + 1) + k_8)\Lambda_0^{-1}\lambda_0 T_0 e\rho +$$

$$+ Ak_{15}T_0\rho + k_{16}T_0\rho + k_{17}\rho_0)\Big]e\Lambda_0^{-1} +$$

$$+ M(1+2nk_9)(k_{12}T_0\rho + \lambda_0 e\Lambda_0^{-2}n\rho_0) +$$

$$+ (f_0(A+1)(1+nL)\Lambda_0^{-1}\lambda_0 T_0 e\rho + f_0 n\rho_0)e\Lambda_0^{-1} +$$

$$+ F(k_{12}T_0\rho + \lambda_0 e\Lambda_0^{-2}n\rho_0) + F(1+nU_1)e\Lambda_0^{-1}\lambda_0 T_0 e\rho +$$

$$+ T_0 e(f_0(1+nL)\lambda_0 T_0 e\rho(1+nU_1) + f_0 n(1+nU_1)\rho +$$

$$+ nFL_1\lambda_0 T_0 e\rho + nF\rho) + T_0 F(1 + nU_1)k_{11}T_0\rho \leq$$

$$\leq k_{18}T_0\rho + k_{19}\rho_0,$$

де

$$k_{18} = \Big[(\mu_0(1 + 2nk_1)\Lambda_0^{-1}\lambda_0 e + 2n\mu_0 k_{13})(1 + 2nk_9) +$$

$$+ 2nM((k_7 A + a_0(G_1 e + 1) + k_8)\Lambda_0^{-1}\lambda_0 e + Ak_{15} + k_{16})\Big]e\Lambda_0^{-1} +$$

$$+ k_{12}M(1 + 2nk_9) + f_0(A + 1)e^2(1 + nL)\Lambda_0^{-2}\lambda_0 + Fk_{12} +$$

$$+ F(1 + nU_1)e^2\Lambda_0^{-1}\lambda_0 + f_0 e(1 + nU_1)(e + n) + 2enF + k_{11},$$

$$k_{19} = \Big[2nMk_{17} + (F + M(1 + 2nk_9))\Lambda_0^{-1}\lambda_0 n + f_0 n\Big]e\Lambda_0^{-1}.$$

В останньому випадку $\chi_i(x, t; u^1) > 0$, $\chi_i(x, t; u^2) = 0$ нехай $\varphi_i(\chi_i(x, t; u^1); x, t, u^1) = a_1(\chi_i(x, t; u^1))$. Встановимо попередньо наступну оцінку:

$$\left| g_i'(\varphi_i(0; x, t, u^2))\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(0; x, t, u^2) - (a_1'(0) - \lambda_i(a_1^0, 0, g(a_1^0)))g_i'(a_1^0)\frac{\partial \chi_i}{\partial x}(x, t; u^1) \right| =$$

$$= \left| \frac{a_1'(\chi_i(x,t;u^1)) - \lambda_i(a_1(\chi_i(x,t;u^1)), \chi_i(x,t;u^1), u^1(a_1(\chi_i(x,t;u^1)), \chi_i(x,t;u^1)))}{a_1'(\chi_i(x,t;u^1)) - \lambda_i(a_1(\chi_i(x,t;u^1)), \chi_i(x,t;u^1), u^1(a_1(\chi_i(x,t;u^1)), \chi_i(x,t;u^1)))} \times \right.$$

$$\times g_i'\big(\varphi_i(0; x, t, u^2)\big)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(0; x, t, u^2) -$$

$$\left. - \frac{(a_1'(0) - \lambda_i(a_1^0, 0, g(a_1^0)))g_i'(a_1^0)\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\chi_i(x,t;u^1); x, t, u^1)}{a_1'(\chi_i(x,t;u^1)) - \lambda_i(a_1(\chi_i(x,t;u^1)), \chi_i(x,t;u^1), u^1(a_1(\chi_i(x,t;u^1)), \chi_i(x,t;u^1)))} \right| \leq$$

$$\leq \Big[\Lambda_0^{-1}e^2(A + \Lambda)g_0\lambda_0 + \Lambda_0^{-2}e^2 G_1(A + \Lambda)\Lambda(1 + nU_1)\lambda_0 +$$

$$+ \Lambda_0^{-1}G_1(A + \Lambda)k_{11} + \Lambda_0^{-2}e^2 G_1(a_0 + \lambda_0(A + 1)(1 + nL))\lambda_0\Big]T_0\rho =$$

$$= k_{20}T_0\rho.$$

З отриманих оцінок маємо

$$\left| \Delta_j \frac{\partial (Su^j)_i}{\partial x}(x, t) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x}(x, t, u^2, Su^2) - (a_1'(0) - \lambda_i(a_1^0, 0, g(a_1^0)))g_i'(a_1^0)\frac{\partial \chi_i}{\partial x}(x, t; u^1) \right| +$$

$$+ \left| \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x}(x, t, u^1, Su^1) - \left((\mu_k^i)_t' \left(0, \{g_s(a_{k'}^0)\}_{\substack{k'=1,2 \\ s \notin I_{k'}}} \right) + \right. \right.$$

$$+ \sum_{\substack{k'=1,2 \\ s \notin I_{k'}}} (\mu_k^i)_{w_s^{k'}}' \left(0, \{g_s(a_{k'}^0)\}_{\substack{k'=1,2 \\ s \notin I_{k'}}} \right) \Big[(a_{k'}'(0) - \lambda_s(a_{k'}^0, 0, g(a_{k'}^0)))g_s'(a_{k'}^0) +$$

$$+f_s(a_{k'}^0, 0, g(a_{k'}^0))\Big] \frac{\partial \chi_i}{\partial x}(x,t;u^1)\Big)\Big| +$$

$$+\left|(Yu^1)_i(x,t) + f_i(a_1^0, 0, g(a_1^0))\frac{\partial \chi_i}{\partial x}(x,t;u^1)\right| + |\Delta_j (Zu^j)_i(x,t)| \leq$$

$$\leq (k_{18} + k_{20})T_0\rho.$$

Таким чином, у будь-якому із випадків поведінки характеристик системи (1) справджується оцінка

$$\left|\Delta_j \frac{\partial (Su^j)_i}{\partial x}(x,t)\right| \leq (k_{15} + k_{18} + k_{20})T_0\rho + k_{19}\rho_0 = K_2 T_0 \rho + k_{19}\rho_0.$$

Отже, узагальнюючи попередні результати, отримуємо

$$\rho(Su^1, Su^2) \leq \max\{K_1, K_2\}T_0\rho + k_{19}\rho_0.$$

Легко бачити, що оператор (Su) не є стискаючим. Розглянемо його квадрат

$$\rho(S^2u^1, S^2u^2) \leq \max\{K_1, K_2\}T_0\rho(Su^1, Su^2) + k_{19}\rho_0(Su^1, Su^2) \leq$$

$$\leq \max\{K_1, K_2\}T_0(\max\{K_1, K_2\}T_0\rho + k_{19}\rho) + k_{19}K_1T_0\rho = K_3T_0\rho.$$

Звідси видно, що якщо T_0 задовольняє нерівність

$$K_3 T_0 < 1,$$

то відображення $S^2\colon Q \to Q$ буде стискаючим.

Зазначимо, що сукупність усіх накладених умов є сумісною. Справді, зафіксуємо достатньо малі U, T_0, щоб виконувалась нерівність (6) для деяких ε_0 та Λ_0. Виберемо тепер достатньо великий параметр L, щоб виконувалась нерівність (15), а потім зафіксуємо U_1 згідно з (18). Далі за допомогою (24) визначаємо L_1 та зменшуємо T_0, щоб задовольнити нерівності (8) – (12), (14), (16), (17), (19) – (23), (25), (26).

Нехай усі зазначені обмеження виконуються. Тоді за теоремою Банаха про стискаючі відображення існує єдина нерухома точка оператора S у просторі Q, яка і буде класичним розв'язком задачі (1) – (3).

Покажемо, що розв'язок єдиний не тільки в Q, а і в $C_L^1(G_{T_0})$. Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що існують два розв'язки задачі $\{v^1, v^2\} \subset \subset C_L^1(G_{T_0})$. Позначимо

$$\Upsilon = \{t \in [0, T_0]\colon v^1(x,t) \neq v^2(x,t)\}, \quad t_0 = \inf \Upsilon.$$

Очевидно, $t_0 \notin \Upsilon$, тобто $v^1(x,t_0) = v^2(x,t_0), x \in [a_1(t_0), a_2(t_0)]$. Перенесемо початок відліку часу в точку t_0 і розглянемо задачу (1) – (3) з початковими умовами

$$u(x,t_0) = g_0(x), \qquad a_1(t_0) \leq x \leq a_2(t_0),$$

де $g_0(x) = v^1(x,t_0) = v^2(x,t_0)$. Згідно із доведеним вище, можемо гарантувати існування єдиного розв'язку отриманої задачі в $Q(T_1, L^1, L_1^1, U^1, U_1^1)$ при деяких фіксованих параметрах T_1, L^1, L_1^1, U^1, U_1^1. Вибравши достатньо великі значення

L^1, L_1^1, U_1^1 і достатньо мале T_1, забезпечимо при $t_0 \le t \le t_0 + T_1$ належність обох розв'язків простору $Q(T_1, L^1, L_1^1, U^1, U_1^1)$, що є суперечністю. Отже, в $C_L^1(G_{T_0})$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3).

Теорему 1 доведено.

Глобальна розв'язність задачі.

Теорема 2. *Нехай:*

1) $\mu_i^k\Big(t, \{w_s^{k'}\}_{\substack{k'=1,2\\ s\notin I_{k'}}}\Big) \in \mathrm{Lip}_w([0,T]\times\mathbb{R}^{2n-\mathrm{card}\,I_1-\mathrm{card}\,I_2})$, $i\in I_k$, $k=1,2$;

2) $2n\mu_0^w < 1$, *де* μ_0^w — *стала Ліпшиця функції* μ_i^k *по* $w_s^{k'}$;

3) *існує неперервна неспадна функція* $\psi\colon \mathbb{R}_+\cup\{0\}\to\mathbb{R}_+$, *причому* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{du}{\psi(u)} = \infty$, *така, що*

$$\big|f_i(x,t,u)\big| \le \psi(\|u\|), \quad (x,t,u)\in G_T\times\mathbb{R}^n;$$

4) *виконуються умови* 1–5 *теореми* 1, *причому в формулюванні умов* 1–4 *множини* B_{G+1}^n *і* $B_{G+1}^{2n-\mathrm{card}\,I_1-\mathrm{card}\,I_2}$ *замінено відповідно множинами* B_{P+1}^n *та* $B_{P+1}^{2n-\mathrm{card}\,I_1-\mathrm{card}\,I_2}$, *де стала* P *визначається із рівності*

$$\int\limits_{\frac{\max\{M_1,G\}}{1-2n\mu_0^w}}^{P} \frac{du}{\psi(u)} = \frac{1}{1-2n\mu_0^w}T, \qquad M_1 = \max_{\substack{t\in[0,T]\\ k=1,2,\,i\in I_k}} \big|\mu_k^i(t,\{0\})\big|,$$

$\{0\}$ — *набір* $2n-\mathrm{card}\,I_1-\mathrm{card}\,I_2$ *нулів*;

5) *має місце співвідношення*

$$\lambda_i(a_k(t),t,u) \ne a_k'(t), \quad t\in[0,T], \quad u\in B_{P+1}^n, \quad i=\overline{1,n}, \quad k=1,2;$$

6) *виконуються нерівності*

$$2nM(A+\Lambda) < 1, \qquad \max\{R_1,R_2\} \le 1,$$

де

$$R_1 = \max\{1,\Lambda\}\max\{1, 2n\mu_0(A+\Lambda)\Lambda_0^{-1}\},$$

$$R_2 = \max\Big\{1, 2n\mu_0(A+\Lambda)(1+2n(P_1A+A+P_1\Lambda+F+1))+$$
$$+2nM\big((A+\Lambda)^2 + nR_1(A+1)(P_1\lambda_0+f_0)\big)\Lambda_0^{-2}+$$
$$+M(1+2n(P_1A+A+P_1\Lambda+F+1))\Lambda_0^{-3}\lambda_0 nR_1(A+1)+$$
$$+f_0(A+1)nR_1\Lambda_0^{-2} + F\Lambda_0^{-3}\lambda_0 nR_1(A+1)\Big\},$$

сталі Λ, F, M, λ_0, f_0, μ_0 *визначаються, як і в доведенні теореми* 1, *причому множини* B_{G+1}^n *та* $B_{G+1}^{2n-\mathrm{card}\,I_1-\mathrm{card}\,I_2}$ *замінено відповідно множинами* B_{P+1}^n *та* $B_{P+1}^{2n-\mathrm{card}\,I_1-\mathrm{card}\,I_2}$, *а*

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2}\min_{\substack{t\in[0,T],u\in B_{P+1}^n\\ i=\overline{1,n},k=1,2}} \big|\lambda_i(a_k(t),t,u) - a_k'(t)\big|,$$

$$P_1 = \frac{\max\{G_1, M+2nMF\Lambda_0^{-1}+F\Lambda_0^{-1}\}+FT}{1-2nM(A+\Lambda)} e^{\frac{nF}{1-2nM(A+\Lambda)}T};$$

7) *виконуються умови монотонності та знакосталості функцій у відповідних областях визначення:* $g_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, *не спадають,* $\lambda_i(x,t,u)$, $f_i(x,t,u)$, $i = \overline{1,n}$, *не спадають за змінними* x *та* u, $f_i(x,t,u) \geq 0$, $i \in I_1$, $f_i(x,t,u) \leq 0$, $i \in I_2$, μ_1^i, $i \in I_1$, *не зростають по* t, μ_2^i, $i \in I_2$, *не спадають по* t, *а також виконується одна з чотирьох можливостей*:

a) $\lambda_i \geq 0$, $f_i \leq 0$, $i \notin (I_1 \cup I_2)$,

b) $\lambda_i \leq 0$, $f_i \geq 0$, $i \notin (I_1 \cup I_2)$,

c) $\lambda_i \geq 0$, $f_i \leq 0$, $i \in I_1$, $\lambda_i \leq 0$, $f_i \geq 0$, $i \in I_2$,

d) $\lambda_i \leq 0$, $f_i \geq 0$, $i \in I_1$, $\lambda_i \geq 0$, $f_i \leq 0$, $i \in I_2$,

при яких відповідно

A) $a_k(t), k = 1,2$, *не зростають,* μ_1^i, $i \in I_1$, *не спадають по* $\{w_s^{k'}\}$, $k' = 1,2$, $s \notin I_{k'}$, μ_2^i, $i \in I_2$, *не зростають по* $\{w_s^{k'}\}$, $k' = 1,2$, $s \notin I_{k'}$,

B) $a_k(t)$, $k = 1,2$, *не спадають,* μ_1^i, $i \in I_1$, *не зростають по* $\{w_s^{k'}\}$, $k' = 1,2$, $s \notin I_{k'}$, μ_2^i, $i \in I_2$, *не спадають по* $\{w_s^{k'}\}$, $k' = 1,2$, $s \notin I_{k'}$,

C) $a_1(t)$ *не зростає,* $a_2(t)$ *не спадає,* μ_1^i, $i \in I_1$, *не спадають по* $\{w_s^1\}$, $s \notin I_1$, *і не зростають по* $\{w_s^2\}$, $s \notin I_2$, μ_2^i, $i \in I_2$, *не зростають по* $\{w_s^1\}$, $s \notin I_1$, *і не спадають по* $\{w_s^2\}$, $s \notin I_2$,

D) $a_1(t)$ *не спадає,* $a_2(t)$ *не зростає,* μ_1^i, $i \in I_1$, *не зростають по* $\{w_s^1\}$, $s \notin I_1$, *і не спадають по* $\{w_s^2\}$, $s \notin I_2$, μ_2^i, $i \in I_2$, *не спадають по* $\{w_s^1\}$, $s \notin I_1$, *і не зростають по* $\{w_s^2\}$, $s \notin I_2$.

Тоді існує глобальний класичний розв'язок задачі (1) – (3) *в* G_T, *до того ж єдиний у* $C_L^1(G_T)$.

Доведення. Введемо підпростір $\widetilde{Q}(T_0, U, U_1, L, L_1)$ в $Q(T_0, U, U_1, L, L_1)$, наклавши додатково на функцію $u = (u_1, \ldots, u_n)$ умову, що $u(x,t)$ є неспадною за змінною x на множині G_{T_0}.

Умови 7 теореми 2 забезпечують включення $S\widetilde{Q} \subset \widetilde{Q}$, тому з припущень теореми 1 та умови 7 теореми 2 випливає існування та єдиність розв'язку задачі (1) – (3) у просторі $\widetilde{Q}$.

Позначимо

$$U(t) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq t_1 \leq t \\ a_1(t_1) \leq x_1 \leq a_2(t_1)}} |v_i(x_1, t_1)|, \quad W(t) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq t_1 \leq t \\ a_1(t_1) \leq x \leq a_2(t_1)}} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x}(x_1, t_1) \right|.$$

Оскільки $P > G$, то умови теореми 1 виконуються, а тому існує локальний класичний розв'язок $v \in \widetilde{Q}(T_0^1,\, U, U_1,\, L^1,\, L_1^1)$ (тут параметри T_0^1, L^1, L_1^1 дорівнюють відповідно параметрам T_0, L, L_1, що визначені в попередньому пункті) задачі (1) – (3) на часовому проміжку $[0, T_0^1]$. На підставі припущень 2, 3 теореми 2 цей розв'язок задовольняє наступні співвідношення при різних випадках поведінки характеристик:

$$|v_i(x,t)| \leq \begin{cases} G + \displaystyle\int_0^t \psi(U(\tau))d\tau, & \text{якщо } \chi_i(x,t;u) = 0, \\ 2n\mu_0^w U(t) + M_1 + \displaystyle\int_0^t \psi(U(\tau))d\tau, & \text{якщо } \chi_i(x,t;u) > 0. \end{cases}$$

Об'єднуючи ці випадки, маємо

$$U(t) \leq 2n\mu_0^w U(t) + \max\{M_1, G\} + \int\limits_0^t \psi(U(\tau))d\tau.$$

Останню нерівність перепишемо у вигляді

$$U(t) \leq \frac{\max\{M_1, G\}}{1 - 2n\mu_0^w} + \frac{1}{1 - 2n\mu_0^w} \int\limits_0^t \psi(U(\tau))d\tau. \tag{27}$$

Звідси на основі леми 2.1 [10, с. 36] випливає обмеженість розв'язку

$$U(t) \leq P, \quad t \in [0, T_0^1].$$

Врахувавши монотонність функцій λ_i, $i = \overline{1, n}$, та розв'язку v за відповідними аргументами, отримаємо оцінку

$$\frac{\partial \varphi_i(\tau; x, t, u)}{\partial x} \leq 1.$$

Для похідної розв'язку також встановимо оцінки, проаналізувавши можливу поведінку характеристик:

$$\left|\frac{\partial v_i}{\partial x}(x,t)\right| \leq \begin{cases} G_1 + \int_0^t (F + nFW(\tau))d\tau, \quad \text{якщо } \chi_i(x,t;u) = 0, \\ M + 2nM\big(W(t)A + F + \Lambda W(t)\big)\Lambda_0^{-1} + F\Lambda_0^{-1} + \\ \qquad + \int_0^t (F + nFW(\tau))d\tau, \quad \text{якщо } \chi_i(x,t;u) > 0. \end{cases}$$

Об'єднавши ці випадки та врахувавши означення функції $W(t)$, будемо мати

$$W(t) \leq \max\left\{G_1, M + 2nMF\Lambda_0^{-1} + F\Lambda_0^{-1}\right\} +$$

$$+ 2nM(A + \Lambda)W(t) + FT + nF\int\limits_0^t W(\tau)d\tau.$$

Останню нерівність перепишемо у вигляді співвідношення

$$W(t) \leq \frac{\max\left\{G_1, M + 2nMF\Lambda_0^{-1} + F\Lambda_0^{-1}\right\} + FT}{1 - 2nM(A + \Lambda)} +$$

$$+ \frac{nF}{1 - 2nM(A + \Lambda)} \int\limits_0^t W(\tau)d\tau, \tag{28}$$

з якого, згідно з лемою Гронуолла – Беллмана, випливає оцінка

$$W(t) \leq \frac{\max\{G_1, M + 2nMF\Lambda_0^{-1} + F\Lambda_0^{-1}\} + FT}{1 - 2nM(A + \Lambda)} e^{\frac{nF}{1 - 2nM(A+\Lambda)}T} = P_1.$$

Для зручності в наступних міркуваннях перепишемо умови на параметри T_0^1, U, U_1, L^1, L_1^1 простору $\widetilde{Q}$.

На підставі умови 5 теореми 2, яка є посиленням умови 6 теореми 1, співвідношення (6) дещо спрощується і не містить параметра U:

$$\lambda_0 \varepsilon \leq \Lambda_0. \tag{29}$$

Тому зафіксуємо $U \leq 1$. Значення параметра U_1 зафіксуємо відповідно до умови (18), причому компоненту G_1 у цій умові замінимо константою P_1. З нерівностей (15) і (24) отримуємо умови для вибору L^1, L^1_1:

$$L^1 \geq R_3 + R_1 g_0, \tag{30}$$

де $R_3 = F + \max\{1, \Lambda\}(\mu_0(1 + 2n(F+1))\Lambda_0^{-1}e + F\Lambda_0^{-1}e + 1)$,

$$L^1_1 \geq R_4 + R_2 g_0, \tag{31}$$

а

$$\begin{gathered} R_4 = \max\Big\{P_1, \mu_0(1 + 2n(F+1))(1 + 2n((P_1 e + 1)A + P_1\Lambda e + F + 1)) + \\ +2nM((P_1(1 + e\Lambda(1 + nU_1)) + F(1 + nU_1)e + 1)A + (P_1 e + 1)a_0 + \\ +P_1\big(\lambda_0(1 + nR_1)(A+1)e + \Lambda(1 + e\Lambda(1 + nU_1))\big) + f_0(1 + nR_1)(A+1) + \\ +\Lambda e F(1 + nU_1) + 1)\Lambda_0^{-2}e^2 + M\big(1 + 2n((P_1 e + 1)A + P_1\Lambda e + F + 1)\big) \times \\ \times \big(\Lambda_0^{-1}(1 + e^2\Lambda(1 + nU_1)\Lambda_0^{-1}) + e^2\Lambda_0^{-3}(a_0 + \lambda_0(1 + nR_1)(A+1))\big) + \\ +f_0(A+1)(1 + nR_1)e^2\Lambda_0^{-2} + F\big(\Lambda_0^{-1}(1 + e^2\Lambda(1 + nU_1)\Lambda_0^{-1}) + \\ +e^2\Lambda_0^{-3}\big(a_0 + \lambda_0(1 + nR_1)(A+1)\big)\big) + F(1 + nU_1)e^2\Lambda_0^{-1}\Big\} + 1. \end{gathered}$$

Насамкінець перепишемо обмеження на параметр T^1_0:

$$T^1_0 \leq \Lambda_0(2\lambda_0(\Lambda + A))^{-1} \equiv R_5, \qquad T^1_0 \leq (2\lambda_0(1 + nR_3))^{-1} \equiv R_6,$$

$$T^1_0 \leq \frac{(2\lambda_0 n R_1)^{-1}}{g_0} \equiv \frac{R_7}{g_0}, \qquad T^1_0 \leq \frac{U}{2F} \equiv R_8, \qquad T^1_0 \leq \frac{U/2\Lambda}{g_0} \equiv \frac{R_9}{g_0},$$

$$T^1_0 \leq (2ef_0 \max\{1, A + \Lambda\}(1 + nR_3))^{-1} \equiv R_{10},$$

$$T^1_0 \leq \frac{(2enf_0 \max\{1, A + \Lambda\}R_1)^{-1}}{g_0} \equiv \frac{R_{11}}{g_0},$$

$$T^1_0 \leq U(2(F + \mu_0(1 + 2n(F+1))))^{-1} \equiv R_{12},$$

$$T^1_0 \leq \frac{U(2(2n\mu_0 e + 1)(A + \Lambda))^{-1}}{g_0} \equiv \frac{R_{13}}{g_0},$$

$$T^1_0 \leq (\Lambda(1 + nU_1))^{-1} \equiv R_{14}, \qquad T^1_0 \leq (F\max\{1, \Lambda\}e(1 + nU_1))^{-1} \equiv R_{15},$$

$$T^1_0 \leq (2e^2(\lambda_0(1 + nR_3)(1 + nU_1) + n\Lambda R_4))^{-1} \equiv R_{16},$$

$$T^1_0 \leq \frac{(2e^2 n(\lambda_0 R_1(1 + nU_1) + \Lambda R_2))^{-1}}{g_0} \equiv \frac{R_{17}}{g_0},$$

$$T_0^1 \le R_{18}, \qquad T_0^1 \le \frac{(2e^2 n(f_0 R_1(1+nU_1)+FR_2))^{-1}}{g_0} \equiv \frac{R_{19}}{g_0},$$

де $R_{18} = \bigl(2((f_0(1+nR_3)(1+nU_1)+nFR_4)e^2 + F(1+nU_1))\bigr)^{-1}$;

$$T_0^1 \le R_{20}, \qquad T_0^1 \le \frac{R_{21}}{g_0},$$

де $R_{20} = \bigl(2e^2(A+\Lambda)(\lambda_0(1+nU_1)(1+nR_3)+n\Lambda R_4)\bigr)^{-1}$, $R_{21} = \bigl(2e^2 n(A+\Lambda)(\lambda_0(1+ + nU_1)R_1 + \Lambda R_2)\bigr)^{-1}$;

$$T_0^1 \le R_{22}, \qquad T_0^1 \le \frac{R_{23}}{g_0},$$

де $R_{22} = \bigl(2((f_0(1+nR_3)(1+nU_1)+nFR_4)e^2(A+\Lambda) + F(1+nU_1)(1+e\Lambda(1+ + nU_1)))\bigr)^{-1}$, $R_{23} = \bigl(2(f_0R_1(1+nU_1)+FR_2)e^2 n(A+\Lambda)\bigr)^{-1}$;

$$T_0^1 \le R_{24}, \qquad T_0^1 \le \frac{R_{25}}{g_0},$$

де $R_{24} = \bigl(2(e^2(A+\Lambda)\Lambda(f_0(1+nR_3)(1+nU_1)+nFR_4) + F(1+nU_1)(\lambda_0(A+ +1)e(1+nR_3)+\Lambda(1+e\Lambda(1+nU_1)))))\bigr)^{-1}$, $R_{25} = \bigl(2ne(e(A+\Lambda)\Lambda(f_0R_1(1+nU_1)+ + FR_2) + F(1+nU_1)\lambda_0 R_1(A+1))\bigr)^{-1}$;

$$T_0^1 \le (2\lambda_0 e R_4)^{-1} \equiv R_{26}, \qquad T_0^1 \le \frac{(2\lambda_0 e R_2)^{-1}}{g_0} \equiv \frac{R_{27}}{g_0},$$

$$T_0^1 \le \frac{\min\limits_{t\in[0,T]} |a_2(t)-a_1(t)|}{2(A+\Lambda)} \equiv R_{28}.$$

Із вказаних обмежень на T_0^1 випливають відповідно нерівності (9)–(12), (14), (16), (17), (19)–(23), (25), (26).

Не зменшуючи загальності будемо вважати $g_0 \ge 1$. Тоді всі наведені співвідношення виконуються, якщо

$$T_0^1 = \frac{\Omega}{g_0},$$

де $\Omega = \min\limits_{k=\overline{5,28}} \{R_k\}$.

Розглянемо нашу задачу при $t \ge T_0^1$, тобто задачу (1)–(3) з початковою умовою

$$u_i(x, T_0^1) = g_i^1(x), \qquad a_1(T_0^1) \le x \le a_2(T_0^1), \tag{32}$$

де $g_i^1(x) = v_i(x, T_0^1)$.

Якщо задача (1), (3), (32) має розв'язок v, визначений на проміжку $[T_0^1, T_0^1 + T_0^2]$, то, об'єднуючи розв'язки цих двох задач, отримуємо розв'язок задачі (1)–(3) на проміжку $[0, T_0^1 + T_0^2]$. При цьому можна знову розглянути задачу при $t \ge T_0^1 + T_0^2$, замінивши відповідним чином початкову умову. Продовжуючи ці дії, встановлюємо існування розв'язку задачі (1)–(3) на дещо більшому часовому проміжку.

Нехай задача (1)–(3) має розв'язок $v \in C_L^1\bigl(G_{\sum_{k=1}^m T_0^k}\bigr)$ на часовому проміжку $\Bigl[0, \sum_{k=1}^m T_0^k\Bigr]$, до того ж на ньому виконуються нерівності (27), (28). Тому

$$U(t) \le P, \qquad W(t) \le P_1, \qquad t \in [0, \sum_{k=1}^{m} T_0^k].$$

Розглянемо задачу (1), (3) при $t \ge \sum_{k=1}^{m} T_0^k$ з початковою умовою

$$u_i\left(x, \sum_{k=1}^{m} T_0^k\right) = g_i^m(x), \qquad a_1\left(\sum_{k=1}^{m} T_0^k\right) \le x \le a_2\left(\sum_{k=1}^{m} T_0^k\right), \tag{33}$$

де $g_i^m(x) = v_i\big(x, \sum_{k=1}^{m} T_0^k\big)$. Легко бачити, що умови теореми 1 для задачі (1), (3), (33) справджуються, а тому існує локальний класичний розв'язок $v \in \widetilde{Q}\big(T_0^{m+1}, U, U_1, L^{m+1}, L_1^{m+1}\big)$ задачі на часовому проміжку $\left[\sum_{k=1}^{m} T_0^k, \sum_{k=1}^{m+1} T_0^k\right]$. При цьому значення параметрів U та U_1 визначено раніше, а

$$L^{m+1} = R_3 + R_1 \max\{L^m, L_1^m\},$$

$$L_1^{m+1} = R_4 + R_2 \max\{L^m, L_1^m\},$$

де сталі L^m та L_1^m такі, що $v_i \in \mathrm{Lip}\left(G_{\sum_{k=1}^{m} T_0^k}, L^m\right)$, $\dfrac{\partial v_i}{\partial x} \in \mathrm{Lip}_x\left(G_{\sum_{k=1}^{m} T_0^k}, L_1^m\right)$, $i = \overline{1,n}$, а $T_0^{m+1} = \dfrac{\Omega}{\max\{L^m, L_1^m\}}$.

Залишилось встановити нерівності (27) та (28) на проміжку $\left[\sum_{k=1}^{m} T_0^k, \sum_{k=1}^{m+1} T_0^k\right]$. Розглянемо два можливих випадки.

Якщо $\chi_i(x,t;v) = 0$, то

$$|v_i(x,t)| \le U\left(\sum_{k=1}^{m} T_0^k\right) + \int\limits_{\sum_{k=1}^{m} T_0^k}^{t} \psi(U(\tau))d\tau \le$$

$$\le 2n\mu_0^w U\left(\sum_{k=1}^{m} T_0^k\right) + \max\{M_1, G\} + \int\limits_{0}^{\sum_{k=1}^{m} T_0^k} \psi(U(\tau))d\tau + \int\limits_{\sum_{k=1}^{m} T_0^k}^{t} \psi(U(\tau))d\tau \le$$

$$\le 2n\mu_0^w U(t) + \max\{M_1, G\} + \int\limits_0^t \psi(U(\tau))d\tau,$$

а якщо $\chi_i(x,t;v) > 0$, то

$$|v_i(x,t)| \le 2n\mu_0^w U(t) + M_1 + \int\limits_0^t \psi(U(\tau))d\tau.$$

Підсумовуючи, отримуємо нерівність (27). Співвідношення (28) встановлюємо за тією ж схемою.

Отже, за допомогою методу математичної індукції доведено існування класичного розв'язку задачі (1)–(3) на часовому проміжку $[0,T] \cap \left[0, \sum_{m=1}^{\infty} T_0^m\right]$. Враховуючи умову 6 теореми 2, маємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} T_0^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Omega}{\max\{L^{m-1}, L_1^{m-1}\}} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Omega}{\max\{R_3, R_4\} + \max\{L^{m-2}, L_1^{m-2}\}} \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Omega}{(m-1)\max\{R_3, R_4\} + g_0} \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty.$$

Тому задача (1)–(3) має розв’язок на проміжку $[0, T]$, де T є як завгодно великим. Єдиність отриманого глобального розв’язку випливає з єдиності локальної розв’язності задачі.

Теорему 2 доведено.

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
2. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 278 с.
3. *Czlapinski T., Kamont Z.* Generalized solutions of quasi-linear hyperbolic systems of partial differential-functional equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1993. – **171**, № 2. – P. 353 – 370.
4. *Turo I.* Classical solutions to nonlinear hyperbolic functional partial differential equations // An. şti. Univ. Iaşi. – 1998. – **44**, № 2. – P. 403 – 417.
5. *Баландин А. В., Весницкий А. И., Уткин Г. А.* О периодических решениях одномерного волнового уравнения с однородными условиями на движущихся границах // Дифференц. и интегр. уравнения. – Горький, 1980. – № 4. – С. 84 – 90.
6. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для области с подвижной границей // Дифференц. уравнения и их приложения в физике. – Днепропетровск, 1980. – С. 4 – 16.
7. *Turo I.* Generalized solutions to functional partial differential equations of the first order // Zes. nauk. PGdán. Mat. – 1988. – **14**. – P. 1 – 99.
8. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* О глобальной непрерывной разрешимости смешанной задачи для одномерных гиперболических систем квазилинейных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2008. – **44**, № 3. – С. 394 – 407.
9. *Андрусяк Р. В., Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Локальная и глобальная разрешимости квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой // Там же. – 2006. – **42**, № 4. – С. 489 – 503.
10. *Андрусяк Р. В.* Задача Стефана для одновимірних гіперболічних систем: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2006. – 153 с.

Одержано 04.11.08