УДК 517.9

О. Є. Гентош (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ІНТЕГРОВНА ЗА ЛАКСОМ ІЄРАРХІЯ ЛАБЕРЖЕ – МАТЬЄ СУПЕРСИМЕТРИЧНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ЇЇ СКІНЧЕННОВИМІРНА РЕДУКЦІЯ ТИПУ НЕЙМАНА

The compatibly bi-Hamiltonian Laberge – Mathieu hierarchy of supersymmetric nonlinear dynamical systems is obtained by using the relationship for the Casimir functionals of the centrally extended Lie algebra of superconformal even vector fields of two anticommuting variables. Its matrix Lax representation is found via a property of the gradient of monodromy supermatrix supertrace for the corresponding matrix spectral problem. For the supersymmetric Laberge – Mathieu hierarchy, the method for reducing upon a nonlocal finite-dimensional invariant subspace of a Neumann type is developed. The existence of a canonical even supersymplectic structure on this subspace as well as the Lax – Liouville integrability of reduced commuting vector fields generated by the hierarchy are proved.

С помощью соотношения для функционалов Казимира центрального расширения алгебры Ли суперконформных четных векторных полей двух антикоммутативных переменных получена согласованно бигамильтонова иерархия Лаберже – Матье суперсимметричных нелинейных динамических систем. Ее матричное изображение Лакса найдено на основании свойства градиента суперследа суперматрицы монодромии для соответствующей матричной спектральной задачи. Для суперсимметричной иерархии Лаберже – Матье развит метод редуцирования на нелокальное конечномерное инвариантное подпространство типа Неймана. Доказаны существование канонической четной суперсимплектической структуры на этом подпространстве и интегрируемость по Лаксу – Лиувиллю редуцированных коммутирующих векторных полей, порожденных иерархией.

1. Вступ. В останні два десятиліття за допомогою Лі-алгебраїчних підходів отримано суперсиметричні узагальнення деяких відомих інтегровних за Лаксом [1 – 4] нелінійних динамічних систем на функціональні супермноговиди однієї та двох антикомутуючих незалежних змінних [4, 5]. У межах підходів, в основу яких покладено $\mathcal{R}$-операторний метод [6 – 8], зображення Лакса для суперсиметричних нелінійних динамічних систем виникають як гамільтонові потоки на спряжених просторах до алгебри Лі суперінтегро-диференціальних операторів [9, 10] або центрального розширення алгебри рядів Лорана над напівпростою матричною супералгеброю Лі [11, 12]. Для цих систем *a priori* існує нескінченна множина локальних законів збереження, інволютивних відносно пари узгоджених дужок Пуассона [13, 14].

У роботах [15, 16] запропоновано інший Лі-алгебраїчний підхід до конструювання узгоджено бігамільтонових суперузагальнень інтегровних за Лаксом нелінійних динамічних систем Кортевега – де Фріза і Каупа – Броера, який ґрунтується на використанні центральних розширень алгебри рядів Лорана над алгеброю Лі $g := \mathrm{Vect}(\mathbb{S}^{1|1})$ суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|1} \simeq \mathbb{S} \times \Lambda_1$ (Λ_1 — підалгебра непарних елементів алгебри Грассмана $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ над полем $\mathbb{C}$) та її напівпрямою сумою $g \ltimes C^\infty(\mathbb{S}; \mathbb{R}^{1|1})$. Такі суперузагальнення не є інваріантними відносно суперсиметричного перетворення [17, 18]. Однак Д. А. Лейтесом і Б. Л. Фейгіним [17] встановлено, що існують нетривіальні центральні розширення алгебри Лі суперконформних векторних полів на суперколах $\mathbb{S}^{1|2}$ та $\mathbb{S}^{1|3}$. Саме з ними пов'язані супераналоги рівняння Кортевега – де Фріза, які є інваріантними відносно суперсиметричних перетворень однієї та двох антикомутативних змінних відповідно.

У пункті 2, застосувавши $\mathcal{R}$-операторний метод [3, 6, 16, 19], покажемо, що на орбіті поліноміального типу коприєднаної дії співвідношення для функціоналів Казіміра у випадку центрального розширення алгебри рядів Лорана $\tilde{\mathcal{G}} := \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}(\lambda, \lambda^{-1})$ над алгеброю Лі $\mathcal{G}$ суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|2} \simeq \mathbb{S} \times \Lambda_1^2$ редукується до рівняння, на основі якого за допомогою пари узгоджених суперімплектичних операторів [4] можна отримати нескінченну послідовність градієнтів локальних законів збереження суперсиметричної ієрархії Лаберже – Матьє [20] як суперузагальнення ієрархії Кортевега – де Фріза. На підставі того факту, що градієнт суперсліду суперматриці монодромії для періодичної матричної спектральної задачі також задовольняє це рівняння, в алгебрі рядів Лорана над напівпростою супералгеброю Лі $\mathrm{osp}(2|2)$ буде знайдено матричне зображення Лакса цієї ієрархії.

У роботах [3, 4, 19, 21 – 26] розвинено метод редукування нелінійної динамічної системи на функціональному многовиді або супермноговиді комутуючої незалежної змінної, для якої існують еквівалентне матричне зображення Лакса, що залежить від інваріантного відносно еволюцій спектрального параметра, та пара узгоджених дужок Пуассона, на підпростори критичних точок скінченних лінійних комбінацій її локальних законів збереження та власних значень асоційованої спектральної задачі. В результаті редукування виникають гамільтонові скінченновимірні динамічні системи відносно точних симплектичних та парних суперсимплектичних структур, які можна отримати за допомогою диференціального співвідношення Гельфанда – Дікого [3, 27] на відповідних функціональних многовидах та супермноговидах. Редуковані на підпростори критичних точок рівняння Новікова – Марченка [2, 28] для матриці монодромії відповідної спектральної задачі задають для таких систем матричні зображення Лакса, за допомогою яких можна знайти повні набори інволютивних функціонально незалежних законів збереження та довести інтегровність за Ліувіллем [29 – 31] редукованих систем.

У пункті 3 досліджуються диференціально-геометричні властивості інваріантних редукцій типу Неймана [19, 22, 30] суперсиметричної ієрархії Лаберже – Матьє [20]. За допомогою аналога диференціального співвідношення Гельфанда – Дікого [3, 27] для функціонала Лагранжа на розширеному фазовому просторі буде доведено існування канонічної парної суперсимплектичної структури [4, 32, 33] на її інваріантному скінченновимірному підпросторі типу Неймана та гамільтоновість редукованих комутуючих векторних полів. На основі згаданої вище властивості градієнта суперсліду суперматриці монодромії для асоційованої періодичної матричної спектральної задачі буде знайдено відповідні зображення Лакса та повні набори інволютивних функціонально незалежних парних законів збереження.

2. Алгебра Лі суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|2}$ та суперсиметрична ієрархія Лаберже – Матьє. У випадку двох антикомутативних змінних θ_1 і θ_2 ($\theta_1^2 = 0$, θ_2^2 та $\theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1$) суперконформну групу Лі [17] утворюють гладкі перетворення суперкола $\mathbb{S}^{1|2} \simeq (\mathbb{S} \times \Lambda_1^2)$:

$$\mathbb{S}^{1|2} \ni (x, \theta_1, \theta_2) \mapsto (\bar{x}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2),$$

які задовольняють умову

$$D_{\theta_i} = (D_{\theta_i}\bar{\theta}_1)D_{\bar{\theta}_1} + (D_{\theta_i}\bar{\theta}_2)D_{\bar{\theta}_2}, \quad i = 1, 2,$$

де $D_{\theta_i} := \dfrac{\partial}{\partial\theta_i} + \theta_i \dfrac{\partial}{\partial x}$ — непарна суперпохідна за змінною θ_i така, що $D_{\theta_i}^2 = \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Ці перетворення породжують алгебру Лі $\mathcal{G}$ суперконформних парних векторних полів на $\mathbb{S}^{1|2}$:

$$\mathcal{G} := \Big\{ K_F = F\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}(D_{\theta_1}F)D_{\theta_1} + \frac{1}{2}(D_{\theta_2}F)D_{\theta_2} \colon$$

$$F := F(x,\theta_1,\theta_2) = f_0(x) + \theta_1\alpha_1(x) + \theta_2\alpha_2(x) + \theta_1\theta_2 f_2(x),$$

$$\pi(f_0) = \pi(f_2) = 0, \ \ \pi(\alpha_1) = \pi(\alpha_2) = 1 \Big\}$$

($\pi(.)$ — функція парності на алгебрі Грассмана Λ), комутатор яких визначають за правилом

$$\begin{gathered}[K_F, K_Q] = K_{[F,Q]}, \quad K_F,\ K_Q \in \mathcal{G}, \\ [F,Q] = F\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}(D_{\theta_1}F)(D_{\theta_1}Q) + \frac{1}{2}(D_{\theta_2}F)(D_{\theta_2}Q).\end{gathered} \tag{1}$$

Тобто алгебра Лі $\mathcal{G}$ ізоморфна до простору парних 2π-періодичних функцій $C^\infty(\mathbb{S}^{1|2};\mathbb{R}^{1|0})$ з комутатором (1), а спряжений простір $\mathcal{G}^*$ алгебри Лі $\mathcal{G}$ відносно скалярного добутку на $C^\infty(\mathbb{S}^{1|2};\mathbb{R}^{1|1})$

$$\langle l, F\rangle = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta_1\, d\theta_2 lF, \qquad l \in \mathcal{G}^*, \quad F \in \mathcal{G},$$

ізоморфний до простору парних 2π-періодичних функцій $C^\infty(\mathbb{S}^{1|2};\mathbb{R}^{1|0})$.

Алгебра Лі $\tilde{\mathcal{G}} := \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}(\lambda,\lambda^{-1})$ рядів Лорана над алгеброю $\mathcal{G}$ розкладається у пряму суму $\tilde{\mathcal{G}} := \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-$ таких підалгебр Лі:

$$\tilde{\mathcal{G}}_+ := \left\{ \tilde{F}(x,\theta;\lambda) = \sum_{k\ge 0}^{<<\infty} F_k(x,\theta)\lambda^k \colon F_k \in \mathcal{G},\ \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_- := \left\{ \tilde{Q}(x,\theta;\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{N}} Q_j(x,\theta)\lambda^{-j} \colon Q_j \in \mathcal{G},\ \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

у зв'язку з чим крім комутатора (1) на ній можна ввести ще один комутатор у вигляді

$$[\tilde{F},\tilde{Q}]_{\mathcal{R}} = [\mathcal{R}\tilde{F},\tilde{Q}] + [\tilde{F},\mathcal{R}\tilde{Q}], \quad \tilde{F},\ \tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{G}},$$

де $\mathcal{R} = 1/2(P_+ - P_-)$, P_+, P_- — проектори на підалгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}_+$ та $\tilde{\mathcal{G}}_-$ відповідно.

Існує нескінченна множина спарювань [6]

$$(\tilde{l},\tilde{F})_p = \operatorname{res}_{\lambda\in\mathbb{C}} \lambda^p \langle \tilde{l},\tilde{F}\rangle, \quad p \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

на $\tilde{\mathcal{G}}_0^* \times \tilde{\mathcal{G}}$ ($\tilde{\mathcal{G}}_0^*$ — спряжений простір до алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ відносно $(.,.)_0$), кожне з яких породжує суперкососиметричну білінійну форму

$$\omega_p(\tilde{F},\tilde{Q}) := \left(\tilde{F}, D_{\theta_1} D_{\theta_2}\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x}\right)_p, \tag{3}$$

де $\omega_0(.,.)$ — 2-коцикл Гельфанда – Фукса [17].

За допомогою 2-коциклів (3) побудуємо центральні розширення алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ до просторів $\hat{\mathcal{G}}_p := \tilde{\mathcal{G}} \oplus_p \mathbb{R} \simeq \hat{\mathcal{G}}_0$ з відповідними комутаторами [3, 6, 16, 19]:

$$\operatorname{ad}_p \hat{F}(\hat{Q}) := [\hat{F},\hat{Q}]_p = \begin{pmatrix} [\tilde{F},\tilde{Q}] \\ \omega_p(\tilde{F},\tilde{Q}) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\hat{F} := (\tilde{F}, a)^\top, \quad \hat{Q} := (\tilde{Q}, b)^\top \in \hat{\mathcal{G}}_0, \quad a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Комутатори, деформовані оператором $\mathcal{R}$, набирають вигляду

$$\operatorname{ad}_{p,\mathcal{R}} \hat{F}(\hat{Q}) := [\hat{F},\hat{Q}]_{p,\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} [\tilde{F},\tilde{Q}]_{\mathcal{R}} \\ \omega_{p,\mathcal{R}}(\tilde{F},\tilde{Q}) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

де $\omega_{p,\mathcal{R}}(\tilde{F},\tilde{Q}) = \omega_p(\mathcal{R}\tilde{F},\tilde{Q}) + \omega_p(\tilde{F},\mathcal{R}\tilde{Q})$ для будь-якого $p \in \mathbb{Z}$.

На спряженому просторі $\hat{\mathcal{G}}_0^*$ алгебри Лі $\hat{\mathcal{G}}_0$ за допомогою спарювань

$$(\hat{l},\hat{F})_p = (\tilde{l},\tilde{F})_p + ca, \quad \hat{l} = (\tilde{l}, c) \in \hat{\mathcal{G}}_0^*, \quad \tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}_0^*, \quad c,\ a \in \mathbb{R},$$

комутатори (5) генерують ієрархію узгоджених за Магрі [13] дужок Лі – Пуассона

$$\{\gamma,\mu\}_p(\tilde{l}) = (\tilde{l}, [\nabla_{l,p}\gamma(\tilde{l}), \nabla_{r,p}\mu(\tilde{l})]_{\mathcal{R}})_p + c\omega_p(\nabla_{l,p}\gamma(\tilde{l}), \nabla_{r,p}\mu(\tilde{l})) =:$$
$$=: (\nabla_{l,0}\gamma(\tilde{l}), \vartheta_p \nabla_{r,0}\mu(\tilde{l}))_0, \tag{6}$$

де $\gamma,\ \mu \in D(\tilde{\mathcal{G}}_0^*)$, $\nabla_{l,p}$, $\nabla_{r,p}$ — оператори лівого та правого градієнта відносно спарювання (2), а $\vartheta_p\colon \tilde{\mathcal{G}} \to \tilde{\mathcal{G}}_0^*$ — суперімплектичні оператори на $\tilde{\mathcal{G}}_0^*$.

Функціонали Казіміра $\gamma \in I(\mathcal{G}_0^*)$, які задовольняють рівняння

$$\operatorname{ad}_0^* (\nabla_{l,p}\gamma(\tilde{l}), a)(\hat{l}) = 0, \quad p \in \mathbb{Z}, \ \ a \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $\hat{l} \in \mathcal{G}_0^*$, ad_0^* — оператор коприєднаної дії алгебри Лі $\hat{\mathcal{G}}_0$ з комутатором (4) відносно спарювання $(.,.)_0$ на $\hat{\mathcal{G}}_0^* \times \hat{\mathcal{G}}_0$, перебувають в інволюції відносно дужок Лі – Пуассона (6) і задають гамільтонові потоки

$$\frac{d\hat{l}}{d\tau_p} = \operatorname{ad}_0^* \big(\mathcal{R}\nabla_{l,p}\gamma(\tilde{l}), a\big)(\hat{l}) = (\{\gamma,\tilde{l}\}_p(\tilde{l}), 0)$$

для будь-яких $p \in \mathbb{Z}$ й $a \in \mathbb{R}$. У випадку $p = -1$ рівняння (7) еквівалентне співвідношенню

$$-c\left(D_{\theta_1} D_{\theta_2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{l}\Phi) + \frac{1}{2}(D_{\theta_1}\tilde{l})(D_{\theta_1}\Phi) + \frac{1}{2}(D_{\theta_2}\tilde{l})(D_{\theta_2}\Phi) = 0, \tag{8}$$

де $\Phi(\tilde{l}) := \nabla_{l,-1}\gamma(\tilde{l}) \in \lambda\tilde{\mathcal{G}}_-$.

Редукуємо співвідношення (8) на орбіту поліноміального типу коприєднаної дії $\operatorname{ad}_{-1,\mathcal{R}}^*$ алгебри $\hat{\mathcal{G}}_0$. Якщо

$$\tilde{l} := \tilde{l}(x, \theta_1, \theta_2; \lambda) = W(x, \theta_1, \theta_2) - \lambda \in \mathcal{G}_0^*,$$

де $W(x, \theta_1, \theta_2) = a(x, \theta_1) + \theta_2 w(x, \theta_1)$, $(a, w)^\top \in M^{1|1} \subset C^\infty(\mathbb{S}^{1|1}; \mathbb{R}^{1|1})$, і $c = \dfrac{1}{2}$, то співвідношення, які задають зв'язок лівого градієнта функціонала $\gamma \in I(\mathcal{G}_0^*)$ відносно спарювання $(.,.)_{-1}$ з лівим градієнтом функціонала $\bar{\gamma} := := \gamma|_{M^{1|1}} = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta_1\, d\theta_2\, \gamma[a, w; \lambda]$, набирають вигляду

$$\delta\gamma(\tilde{l}) := (\delta\tilde{l}, \Phi(\tilde{l}))_{-1} = (\delta(a + \theta_2 w), \Phi_0 + \theta_2 \Phi_1) =$$

$$= \Big(\big\langle (\delta a, \delta w)^\top, \varphi(x, \theta_1; \lambda) \big\rangle \Big),$$

де $\Phi(x, \theta_1, \theta_2; \lambda) = \Phi_0(x, \theta_1; \lambda) + \theta_2 \Phi_1(x, \theta_1; \lambda)$, $\pi(\Phi_0) = 0$, $\pi(\Phi_1) = 1$, а $\varphi(x, \theta_1; \lambda) := \nabla_l \bar{\gamma}[a, w; \lambda] = (\Phi_1, \Phi_0)^\top \in T^*(M^{1|1})$ задовольняє рівняння

$$\vartheta\, \varphi(x, \theta_1; \lambda) = \lambda\, \eta\, \varphi(x, \theta_1; \lambda), \tag{9}$$

в якому $\varphi(x; \lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \varphi_j \lambda^{-j}$ при $|\lambda| \to \infty$, $\varphi_j = \nabla_l \bar{\gamma}_j[a, w]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, та $\varphi_0 \in \operatorname{Ker} \eta$, з узгодженою парою суперімплектичних операторів $\eta, \vartheta \colon T^*(M^{1|1}) \to \to T(M^{1|1})$:

$$\eta = -\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix},$$

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-D_\theta^3 + w) & -\partial a + \frac{1}{2}(D_\theta a) D_\theta \\ -a\partial - \frac{1}{2} a_x + \frac{1}{2}(D_\theta a) D_\theta & \frac{1}{2} D_\theta^5 - \partial w - \frac{1}{2} w \partial - \frac{1}{2}(D_\theta w) D_\theta \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\partial := \frac{\partial}{\partial x}, \quad \theta_1 := \theta.$$

З рівняння (9) отримуємо нескінченну множину градієнтів функціоналів $\bar{\gamma}_j \in \in D(M^{1|1})$, $j \in \mathbb{Z}_+$:

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_1 = \begin{pmatrix} w \\ a \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(D_\theta a_x) + 2aw \\ \frac{1}{2}(D_\theta w) + a^2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} w_{xx} + \frac{3}{4} w (D_\theta w) + 3a^2 w - \frac{3}{2} a (D_\theta a_x) - \frac{3}{4} a_x (D_\theta a) \\ -\frac{1}{4} a_{xx} + a^3 + \frac{3}{2} a (D_\theta w) - \frac{3}{4} w (D_\theta a) \end{pmatrix},$$

. . . .

Відповідна послідовність локальних функціоналів

$$\bar{\gamma}_0 = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta\, w, \qquad \bar{\gamma}_1 = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta\, aw,$$

$$\bar{\gamma}_2 = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta\, \left(-\frac{1}{4}a(D_\theta a_x) + \frac{1}{4}w(D_\theta w) + a^2 w\right), \tag{11}$$

$$\bar{\gamma}_3 = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta\, \left(-\frac{1}{4}aw_{xx} + a^3 w + \frac{3}{4}aw(D_\theta w) + \frac{3}{4}aa_x(D_\theta a)\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

за допомогою пари суперімплектичних операторів (10) породжує нескінченну ієрархію узгоджено бігамільтонових нелінійних динамічних систем на 2π-періодичному функціональному супермноговиді $M^{1|1}$:

$$\left(\frac{da}{dt_j}, \frac{dw}{dt_j}\right)^\top = -\eta\, \nabla_l\, \bar{\gamma}_{j+1}[a, w] = -\vartheta\, \nabla_l\, \bar{\gamma}_j[a, w], \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

де $\nabla_l \colon T(M^{1|1}) \to T^*(M^{1|1})$ — оператор лівого градієнта на супермноговиді $M^{1|1}$.

При $j = 1$ рівняння (12) задає суперсиметричний аналог рівняння Кортевега – де Фріза [1]:

$$\frac{da}{dt_1} = \left(-\frac{1}{4}a_{xx} + a^3 + \frac{3}{2}a(D_\theta w) - \frac{3}{4}w(D_\theta a)\right)_x,$$

$$\frac{dw}{dt_1} = \left(-\frac{1}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w(D_\theta w) + 3a^2 w - \frac{3}{2}a(D_\theta a_x) - \frac{3}{4}a_x(D_\theta a)\right)_x,$$

вперше отриманий Лаберже – Матьє [18, 20].

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Суперсиметрична ієрархія нелінійних динамічних систем Лаберже – Матьє* (12) *на* 2π*-періодичному функціональному супермноговиді* $M^{1|1} \subset C^\infty(\mathbb{S}^{1|1}; \mathbb{R}^{1|1})$ *має нескінченну послідовність законів збереження* (11), *інволютивних відносно дужок Лі – Пуассона* $\{.,.\}_\eta$ *та* $\{.,.\}_\vartheta$, *породжених узгодженими суперімплектичними операторами* $\eta = \vartheta_0|_{M^{1|1}}$ *та* $\vartheta = \vartheta_{-1}|_{M^{1|1}}$.

Отже, встановлено, що нескінченна послідовність інволютивних локальних законів збереження для ієрархії Лаберже – Матьє суперсиметричних нелінійних динамічних систем (11) є редукцією на орбіту коприєднаної дії алгебри Лі суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|2}$ відповідних функціоналів Казіміра. Ці закони збереження перебувають в інволюції відносно редукованих на ці орбіти дужок Лі – Пуассона (6).

Слід зауважити, що за допомогою співвідношення (8) можна отримати достатньо широкий клас багатокомпонентних узгоджено бігамільтонових узагальнень [16] суперсиметричної ієрархії Лаберже – Матьє, пов'язаних з орбітами елементів

$$\tilde{l} := \sum_{q=0}^{N_1 - 1} W_q(x, \theta_1, \theta_2)\lambda^q - \lambda^{N_1} \in \mathcal{G}_0^* \tag{13}$$

та

$$\tilde{l} := \sum_{r=0}^{N_2} \bar{W}_r(x,\theta_1,\theta_2)\lambda^{-r} - \lambda \ \in \ \mathcal{G}_0^*, \tag{14}$$

де $W_q(x,\theta_1,\theta_2) = a_q(x,\theta_1) + \theta_2 w_q(x,\theta_1)$, $(a_q, w_q)^\top \in M^{1|1} \subset C^\infty(\mathbb{S}^{1|1};\mathbb{R}^{1|1})$, $q = \overline{0, N_1 - 1}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $W_r(x,\theta_1,\theta_2) = a_r(x,\theta_1) + \theta_2 w_r(x,\theta_1)$, $(a_r, w_r)^\top \in M^{1|1} \subset$ $\subset C^\infty(\mathbb{S}^{1|1};\mathbb{R}^{1|1})$, $r = \overline{0, N_2}$, $N_2 \in \mathbb{Z}_+$.

Розвинений А. К. Прикарпатським [3, 14] градієнтно-голономний алгоритм передбачає існування матричного зображення Лакса для ієрархії нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах, яка має узгоджену пару імплектичних операторів. Для нелінійної динамічної системи із суперсиметричної ієрархії Лаберже – Матьє таке зображення Лакса можна знайти у вигляді умови сумісності лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$D_\theta Y = AY \tag{15}$$

та

$$\frac{dY}{dt_j} = B_j Y, \tag{16}$$

де $A, B \in C^\infty(\mathbb{S}^{1|1}; \mathrm{sl}(m|n))$, $A := A[a,w;\lambda]$ і $B_j := B[a,w;\lambda]$ — відповідно непарна і парна суперматриці порядку (m,n), $m,n \in \mathbb{N}$, що залежать від функцій $(a,w)^\top \in M^{1|1} \subset C^\infty(\mathbb{S}^{1|1};\mathbb{R}^{1|1})$, їх суперпохідних, а також інваріантного відносно еволюцій (16) спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, $Y := Y(x,\theta;\lambda) \in L_\infty(\mathbb{S}^{1|1};\mathbb{C}^{m|n})$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Для спектральної задачі (15) можна ввести поняття суперматриці монодромії $S := S(x,\theta;\lambda)$ як фундаментального розв'язку $\mathbf{Y}(x,x,\theta;\lambda) \in L_\infty(\mathbb{S}^{1|1}; \mathrm{gl}(m|n))$ рівняння (15), що задовольняє умову

$$\mathbf{Y}(x,x,\theta) = \mathbf{1}, \qquad \mathbf{1} = \mathrm{diag}\,\Big(\underbrace{1,\ldots,1}_{m+n}\Big),$$

таким чином:

$$S(x,\theta;\lambda) = \mathbf{Y}(x+2\pi, x, \theta; \lambda).$$

При цьому градієнт суперсліду $\Delta(x,\theta;\lambda) := \mathrm{str}\, S(x,\theta;\lambda)$ суперматриці монодромії спектральної задачі (15), для якого має місце рівність (9), породжує нескінченну послідовність градієнтів локальних законів збереження (11) для ієрархії Лаберже – Матьє.

У випадку, коли $A = A(a,w;\lambda)$, зв'язок градієнта суперсліду суперматриці монодромії S з її елементами можна записати так:

$$\varphi(x,\theta;\lambda) := \nabla_l\, \Delta(x,\theta;\lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{str}((ISI)A_a) \\ \mathrm{str}(SA_w) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

де $I = \mathrm{diag}\,\Big(\underbrace{1,\ldots,1}_{m}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{n}\Big)$.

Тому у випадку лінійної залежності матриці A від функцій $(a, w)^\top \in M^{1|1}$ та спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$A = a\mathcal{A}_1 + w\mathcal{A}_2 + \lambda\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_5,$$

де $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_5$ — деякі сталі суперматриці порядку (m, n), серед яких $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_5$ — непарні, $\mathcal{A}_2$ — парна, з урахуванням формул

$$D_\theta \Phi_1 = \operatorname{str} S[IA_aI, A]_1,$$

$$D_\theta^2 \Phi_1 = -\operatorname{str} S[B_0, IA_aI],$$

$$D_\theta^3 \Phi_1 = \operatorname{str} S\Big\{ -[B_0, [IA_aI, A]_1] + [IA_aI, A_x]_1 \Big\},$$

$$D_\theta \Phi_0 = \operatorname{str} S[A_w, A]_1,$$

$$D_\theta^2 \Phi_0 = -\operatorname{str} S[B_0, A_w],$$

$$D_\theta^5 \Phi_0 = \operatorname{str} S\Big\{ \big[B_0, [B_0, [A_w, A_x]_1]\big] - 2\big[B_0, [A_w, A_x]_1\big] - \\ - \big[B_{0,x}, [A_w, A]_1\big] + \big[A_w, A_{xx}\big]_1 \Big\},$$

в яких $\varphi(x, \theta; \lambda) := (\Phi_1, \Phi_0)^\top$, $B_0 := (D_\theta A) - (IAI)A$, $A_a = \mathcal{A}_1$, $A_w = \mathcal{A}_2$, а також $[P, Q]_1 := PQ - IQPI$ для будь-яких суперматриць $P, Q \in \mathrm{gl}(m|n)$, із співвідношень (10) отримуємо

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}[B_0, [IA_aI, A]_1] - [IA_aI, A_x]_1 + \frac{1}{2}wA_a - a_xA_w + \\ + a[B_0, A_w] + \frac{1}{2}(D_\theta a)I[B_0, A_w]I = \lambda[B_0, A_w], \\ a[B_0, IA_aI] - \frac{1}{2}a_x(IA_aI) + \frac{1}{2}(D_\theta a)I[IA_aI, A]_1I - w_x(IA_wI) + \\ + \frac{3}{2}wI[B_0, A_w]I - \frac{1}{2}(D_\theta w)[A_w, A]_1 + \frac{1}{2}\{[B_0, [B_0, [A_w, A_x]_1]] - \\ - 2[B_0, [A_w, A_x]_1] - [B_{0,x}, [A_w, A]_1] + [A_w, A_{xx}]_1\} = \\ = \lambda[B_0, IA_aI]. \end{gathered} \tag{18}$$

При встановленні порядку суперматриці A у рівнянні (15) слід врахувати, що

$$(m+n)^2 - 1 = 8 + \kappa, \quad m^2 + n^2 - 1 = 4 + \kappa_1, \quad \kappa,\ \kappa_1 \in \mathbb{Z}_+.$$

Суперматрицю $A \in C^\infty(\mathbb{S}^{1|1}; \mathrm{sl}(m|n))$ у рівнянні (15) будемо шукати як елемент суперaлгебри Лі $\mathrm{osp}(2|2)$, взявши до уваги той факт, що супераналог рівняння Кортевега – де Фріза [15, 16], отриманий за допомогою алгебри Лі суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|1}$, пов'язаний з алгеброю Лі $\mathrm{osp}(2|1)$. У цьому випадку з рівностей (18) знаходимо

$$A_1 = -A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Суперсиметрична ієрархія нелінійних динамічних систем Лаберже – Матьє* (12) *має матричне зображення Лакса у вигляді умови сумісності лінійних диференціальних рівнянь першого порядку* (15) *та* (16) *із суперматрицями* $A,\ B \in C^{\infty}(\mathbb{S}^{1|1}; \mathrm{osp}(2|2))$, *що залежать від спектрального параметра* $\lambda \in \mathbb{C}$, *у вигляді*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ w & 0 & 0 & a-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(a-\lambda) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_j = (\lambda^{j+1} S)_+, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

де нижній індекс „+” позначає поліноміальну частину відповідного виразу, $S :=$ $:= S(x, \theta; \lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} S_j \lambda^{-j}$ *— асимптотичний розклад суперматриці монодромії рівняння* (15), *у якому*

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо у лінійному диференціальному рівнянні (15) вибрати $Y = (f, g, \psi, \phi)^{\top} \in$ $\in L_{\infty}(\mathbb{S}^{1|1}; \mathbb{C}^{m|n})$, то його можна замінити еквівалентним спектральним співвідношенням

$$(D_{\theta_1} D_{\theta_2} + W)\bar{y} = \lambda \bar{y},$$

де $W := W(x, \theta_1, \theta_2)$, $\bar{y} := \bar{y}(x, \theta_1, \theta_2) = f(x, \theta_1) + \theta_2 \phi(x, \theta_1)$, яке задається самоспряженим оператором $L = D_{\theta_1} D_{\theta_2} + W$ у просторі 2π-періодичних функцій $\bar{y} \in L_{\infty}(\mathbb{S}^{1|2}; \mathbb{C}^{1|0})$.

3. Інваріантні редукції типу Неймана суперсиметричної ієрархії Лаберже – Матьє. Наявність матричного зображення Лакса (15), (16) з інваріантним відносно еволюцій $\dfrac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, спектральним параметром $\lambda \in \mathbb{R}$ та нескінченної послідовності інволютивних локальних законів збереження (11) дозволяє розвинути для суперсиметричної ієрархії Лаберже – Матьє (12) метод редукування на нелокальні інваріантні підпростори та звести знаходження її часткових розв'язків до інтегрування в квадратурах нелінійних динамічних систем на скінченновимірних симплектичних супермноговидах.

Далі будемо вважати, що існують $N \in \mathbb{N}$ різних власних значень $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in$ $\in \mathbb{R}$ спектральної задачі (15) з відповідними власними вектор-функціями $Y_i =$

$= (f_i, g_i, \psi_i, \phi_i)^\top \in \mathcal{W} := L_\infty(\mathbb{S}^{1|1}; \mathbb{R}^{2|2})$, $i = \overline{1, N}$. Слід зауважити, що у цьому випадку кожна вектор-функція $\bar{Y}_i = (-g_i, f_i, -\psi_i, -\phi_i)^\top \in \mathcal{W}$ є власною для спряженої до (15) спектральної задачі і відповідає її власному значенню $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Розглядаючи ці власні значення як гладкі за Фреше функціонали на супермноговиді $M^{1|1}$, дослідимо диференціально-геометричні властивості векторних полів $\dfrac{d}{dx}$ та $\dfrac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$, редукованих на їх інваріантний підпростір $M_N^{1|1} \subset M^{1|1}$:

$$M_N^{1|1} := \left\{ (a, w)^\top \in M^{1|1} \colon \nabla_l \, \mathcal{L}_N[a, w] = 0 \right\}, \tag{19}$$

в якому функціонал Лагранжа $\mathcal{L}_N$ має вигляд

$$\mathcal{L}_N = -\frac{1}{2}\gamma_0 + \textstyle\sum_{i=1}^N c_i \lambda_i,$$

де $c_i \in \Lambda_0 \supset \mathbb{R}$ — деякі константи.

Підпростір (19) можна описати явно, обчисливши за допомогою спектральної задачі (15) ліві градієнти власних значень $\lambda_i \in D(M^{1|1})$, $i = \overline{1, N}$:

$$\nabla_l \, \lambda_i = \frac{1}{\mu_i} \left(f_i \phi_i, \frac{1}{2} f_i^2 \right),$$

де $\mu_i := \displaystyle\int_0^{2\pi} \int d\theta \, f_i \phi_i$, $\mu_i \in D(M^{1|1} \times \mathcal{W}^N)$, $i = \overline{1, N}$, — нормуючі множники, які є інваріантами векторних полів $\dfrac{d}{dx}$ та $\dfrac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$.

У випадку $\mu_i = c_i$, $i = \overline{1, N}$, умова (19) набирає вигляду обмежень типу Неймана [19, 22, 30]:

$$\sum_{i=1}^N f_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=1}^N f_i g_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^N f_i \psi_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^N f_i \phi_i = 0. \tag{20}$$

Із спектральної задачі (15) можна отримати співвідношення для функцій $(a, w)^\top \in$ $\in M^{1|1}$ та описати підпростір $M_N^{1|1}$ еквівалентним чином:

$$M_N^{1|1} = \left\{ (a, w)^\top \in M^{1|1} \colon a = \sum_{i=1}^N (\lambda_i f_i^2 - \phi_i \psi_i), \; w = \sum_{i=1}^N (\lambda_i f_i \phi_i - g_i \psi_i) \right\}. \tag{21}$$

Тобто розв'язки суперсиметричної ієрархії Лаберже – Матьє (12) на підпросторі (21) можна виразити через координати власних вектор-функцій Y_i, $i = \overline{1, N}$. Цей факт використаємо для введення координат на підпросторі $M_N^{1|1} \subset M^{1|1}$.

Розглянемо на фазовому просторі $\tilde{M}^{1|1} := M^{1|1} \times \mathcal{W}^N$ ієрархії спарених динамічних систем (12), (16) з параметром $\lambda = \lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, N}$, функціонал Лагранжа $\tilde{\mathcal{L}}_N := \displaystyle\int_0^{2\pi} \int d\theta \, \tilde{\mathcal{L}}_N[a, w, \mathcal{Y}]$:

$$\tilde{\mathcal{L}}_N := -\frac{1}{2}\bar{\gamma}_0 + \sum_{j=1}^N \lambda_i' + \sum_{i=1}^N s_i \mu_i,$$

де $\lambda_i^{'} := \int_0^{2\pi}\int d\theta\bigg((D_\theta f_i)g_i + af_i\phi_i - g_i\psi_i + \dfrac{1}{2}((D_\theta\phi_i)\phi_i + (D_\theta\psi_i)\psi_i + wf_i^2)\bigg)$, $s_i \in \in \Lambda_0 \supset \mathbb{R}$, $i = \overline{1,N}$, — деякі константи, $\mathcal{Y} := (Y_1, Y_2, \ldots, Y_N)$. Умова $\nabla_l\,\tilde{\mathcal{L}}_N[a,w,\mathcal{Y}] = 0$ задає інваріантний підпростір $\tilde{M}_N^{1|1} \subset \tilde{M}^{1|1}$ цих ієрархій.

За допомогою аналога диференціального співвідношення Гельфанда – Дікого [3, 27] для функціонального супермноговиду $\tilde{M}^{1|1}$:

$$d\tilde{\mathcal{L}}_N[a,w,\mathcal{Y}] = \Big\langle (da, dw, d\mathcal{Y})^\top,\, \nabla_l\,\tilde{\mathcal{L}}_N[a,w,\mathcal{Y}]\Big\rangle + D_\theta\alpha^{(1)},$$

де символом $\langle\,,\,\rangle$ позначено звичайний скалярний добуток в $\mathbb{R}^{(2N+1)|(2N+1)}$, $(a,w,\mathcal{Y})^\top \in \tilde{M}_N^{1|1}$, знаходимо точну парну 2-форму $\omega^{(2)} = d\alpha^{(1)}$, яка набирає вигляду

$$\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^{N}\bigg(df_i\wedge dg_i - \frac{1}{2}d\phi_i\wedge d\phi_i - \frac{1}{2}d\psi_i\wedge d\psi_i\bigg). \tag{22}$$

Ця 2-форма є виродженою на $\tilde{M}_N^{1|1} \subset \tilde{M}^{2|2}$, але задає канонічну парну суперсимплектичну структуру [4, 32, 33] на підпросторі $M_N^{1|1}$, який можна вкласти в $\tilde{M}_N^{1|1}$, врахувавши співвідношення (21). Існування такої структури доводить дифеоморфність підпростору $M_N^{1|1} \subset M^{1|1}$, заданого умовою (19), та скінченновимірного супермноговиду $T^*(\mathbb{S}^{N-1})\otimes H^{N-2}\otimes H^{N-2} \subset \mathbb{R}^{2N|2N}$, де $T^*(\mathbb{S}^{N-1})$ — кодотичний простір до сфери $\mathbb{S}^{N-1}$, а H^{N-2} — проективна $(N-2)$-вимірна гіперповерхня у просторі $\mathbb{R}^{0|N}$, із суперсимплектичною структурою (22).

Оскільки

$$\frac{d\mathcal{L}_N}{dx} = 0, \qquad \frac{d\mathcal{L}_N}{dt_j} = 0, \quad j\in\mathbb{N},$$

то існують функції $\tilde{h}^{(x)}$, $\tilde{h}^{(t_j)} \in D(\tilde{M}^{1|1})$, які задовольняють співвідношення

$$\bigg\langle\bigg(\frac{da}{dx}, \frac{dw}{dx}, \frac{d\mathcal{Y}}{dx}\bigg)^\top,\ \nabla_l\,\tilde{\mathcal{L}}_N[a,w,\mathcal{Y}]\bigg\rangle = D_\theta\tilde{h}^{(x)}, \tag{23}$$

$$\bigg\langle\bigg(\frac{da}{dt_j}, \frac{dw}{dt_j}, \frac{d\mathcal{Y}}{dt_j}\bigg)^\top,\ \nabla_l\,\tilde{\mathcal{L}}_N[a,w,\mathcal{Y}]\bigg\rangle = D_\theta\tilde{h}^{(t_j)}. \tag{24}$$

Можна показати, що для таких функцій на підпросторі $\tilde{M}_N^{1|1} \subset \tilde{M}^{1|1}$ мають місце рівності

$$i_{d/dx}\omega^{(2)} = -d\tilde{h}^{(x)}, \qquad i_{d/dt_j}\omega^{(2)} = -d\tilde{h}^{(t_j)}, \quad j\in\mathbb{N}, \tag{25}$$

де $i_{d/dx}$, i_{d/dt_j} — внутрішні диференціювання за векторними полями $\dfrac{d}{dx}\colon \tilde{M}_N^{1|1} \to \to T(\tilde{M}_N^{1|1})$ та $\dfrac{d}{dt_j}\colon \tilde{M}_N^{1|1} \to T(\tilde{M}_N^{1|1})$, $j\in\mathbb{N}$, відповідно в алгебрі Грассмана диференціальних форм на $\mathbb{R}^{(2N+1)|(2N+1)}$.

При редукуванні на підпростір $M_N^{1|1} \subset \tilde{M}_N^{1|1}$ рівності (25) зберігаються, а отже, функції $h^{(x)}$, $h^{(t_j)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2N|2N};\mathbb{R}^{1|0})$:

$$h^{(x)} := \tilde{h}^{(x)}\big|_{M_N^{1|1}}, \qquad h^{(t_j)} := \tilde{h}^{(t_j)}\big|_{M_N^{1|1}}, \quad j\in\mathbb{N},$$

є гамільтоніанами векторних полів $\dfrac{d}{dx}$ та $\dfrac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$, відповідно на підпросторі $M_N^{1|1} \subset M^{1|1}$ за умови, що параметри $s_i \in \Lambda_0 \supset \mathbb{R}$, $i = \overline{1,N}$, вибрано таким чином:

$$s_i = -\lambda_i, \quad i = \overline{1,N}.$$

Наприклад, для векторного поля $\dfrac{d}{dx} := \dfrac{d}{dt_0}$ на підпросторах $\tilde{M}_N^{1|1} \subset \tilde{M}^{1|1}$ та $M_N^{1|1} \subset M^{1|1}$ з формули (23) отримуємо

$$\tilde{h}^{(x)} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} g_i^2 + \sum_{i=1}^{N}(a-\lambda_i)^2 f_i^2 - (D_\theta w)\left(\sum_{i=1}^{N} f_i^2 - 1\right)\right) +$$

$$+ (D_\theta a)\sum_{i=1}^{N} f_i\phi_i - w\sum_{i=1}^{N} f_i\psi_i - \sum_{i=1}^{N}(a-\lambda_i)\phi_i\psi_i,$$

$$h^{(x)} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}(g_i^2 + \lambda_i f_i^2 - 2\lambda_i\phi_i\psi_i) - \left(\sum_{k=1}^{N}(\lambda_k f_k^2 - \phi_k\psi_k)\right)^2\right).$$

Векторне поле $\dfrac{d}{dx}$, редуковане на $M_N^{1|1} \simeq T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes H^{N-2} \subset \mathbb{R}^{2N|2N}$, можна розглядати як гамільтоновий супераналог осциляторної динамічної системи типу Неймана [19, 22, 30].

Аналогічно можна знайти гамільтоніани $h^{(t_j)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2N|2N}; \mathbb{R}^{1|0})$ векторних полів $\dfrac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$, на підпросторі $M_N^{1|1} \subset M^{1|1}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 3. *Суперсиметрична ієрархія Лаберже – Матьє* (12) *допускає інваріантну редукцію на підпростір $M_N^{1|1} \subset M^{1|1}$, дифеоморфний до скінченновимірного супермноговиду $T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes H^{N-2} \subset \mathbb{R}^{2N|2N}$ з канонічною парною суперсимплектичною структурою $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2N|2N})$ у вигляді* (22). *На цьому супермноговиді векторні поля $\dfrac{d}{dx}$ та $\dfrac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$, породжені ієрархією* (12), *є гамільтоновими відносно суперсимплектичної структури* (22). *Відповідні функції Гамільтона $h^{(x)}$, $h^{(t_j)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2N|2N}; \mathbb{R}^{1|0})$, $j \in \mathbb{N}$, є редукціями функцій $\tilde{h}^{(x)}$, $\tilde{h}^{(t_j)} \in D(\tilde{M}^{1|1})$, що задовольняють рівності* (23), (24), *на підпростір $M_N^{1|1} \subset \subset \tilde{M}_N^{1|1}$. Співвідношення* (21) *описують усі періодичні розв'язки ієрархії* (12) *на підпросторі $M_N^{1|1}$.*

Для доведення інтегровності гамільтонових векторних полів $\dfrac{d}{dx}$ та $\dfrac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$, на $M_N^{1|1}$ для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ знайдемо їх матричне зображення Лакса, залежне від спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, редукувавши суперматрицю монодромії спектральної задачі (15) на цей підпростір.

Теорема 4. *Для гамільтонових векторних полів $\dfrac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, на скінченновимірному симплектичному супермноговиді $M_N^{1|1} \simeq T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes H^{N-2} \subset \subset \mathbb{R}^{2N|2N}$ існують матричні зображенням Лакса*

$$\frac{dS_N}{dt_j} = [B_{j,N}, S_N], \tag{26}$$

де $B_{j,N} := B_{j,N}(\mathcal{Y};\lambda) = B_j[a,w;\lambda]|_{M_N^{1|1}}, j \in \mathbb{Z}_+,$ *— проекції відповідних суперматриць на* $M_N^{1|1}$, *а суперматриця* $S_N := S_N(\mathcal{Y};\lambda) = S(x,\theta;\lambda)|_{M_N^{1|1}}$ *має вигляд*

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_i} \begin{pmatrix} -f_i g_i & f_i^2 & f_i\psi_i & f_i\phi_i \\ -g_i^2 & f_i g_i & g_i\psi_i & g_i\phi_i \\ -g_i\psi_i & f_i\psi_i & 0 & \psi_i\phi_i \\ -g_i\phi_i & f_i\phi_i & \phi_i\psi_i & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^{N}(\lambda_i f_i^2 - 2\phi_i\psi_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доведення. Матричне зображення Лакса для векторного поля $\frac{d}{dx} := \frac{d}{dt_0}$ на $M_N^{1|1}$ можна отримати, використавши властивість градієнта суперсліду $\Delta(x,\theta;\lambda) := \operatorname{str} S(x,\theta;\lambda)$ суперматриці монодромії

$$S := S(x,\theta;\lambda) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & -S_{11} & S_{23} & S_{24} \\ -S_{23} & S_{13} & 0 & S_{34} \\ -S_{24} & S_{14} & -S_{34} & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{osp}(2|2)$$

для спектральної задачі (15) породжувати градієнти локальних законів збереження (11) для суперсиметричної ієрархії Лаберже – Матьє (12) за допомогою співвідношення (9), у якому враховано умови (17). Зв'язок цього градієнта з елементами суперматриці монодромії S, який набирає вигляду

$$\varphi(x,\theta;\lambda) = \begin{pmatrix} 2S_{14} \\ S_{12} \end{pmatrix},$$

та співвідношення для градієнтів власних значень

$$\vartheta \, \nabla_l \, \lambda_i = \lambda_i \, \eta \, \nabla_l \, \lambda_i, \quad i = \overline{1,N},$$

дозволяють встановити вигляд елементів S_{12} та S_{14} на підпросторі $M_N^{1|1}$. За допомогою аналога рівняння Новікова – Марченка [2, 28]

$$D_\theta S = AS - (ISI)A \tag{27}$$

знаходимо інші елементи суперматриці S на $M_N^{1|1}$.

Із співвідношення (27) отримуємо рівняння

$$\frac{dS}{dx} = [B_{0,N}, S],$$

$$B_0 = (D_\theta A) - (IAI)A,$$

яке на підпросторі $M_N^{1|1}$ задає зображення Лакса (26) для векторного поля $\frac{d}{dx}$.

Відповідні зображення Лакса (26) для векторних полів $\frac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$, на $M_N^{1|1}$ виникають з умови сумісності диференціальних рівнянь (15) і (16)

$$\frac{dA}{dt_j} - (D_\theta B_j) = (IB_jI)A - AB_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Теорему доведено.

Редукована на підпростір $M_N^{1|1}$ суперматриця монодромії S задає відображення Ю. Мозера [22] $S(x, \theta; \lambda) \mapsto S_N(\mathcal{Y}; \lambda)$.

Наслідком з теореми 4 є інваріантність функціоналів $\operatorname{str} S_N^n$, $n \in \mathbb{N}$, відносно векторних полів $\frac{d}{dx}$ та $\frac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$, на підпросторі $M_N^{1|1} \subset M^{1|1}$. При цьому коефіцієнти $\sigma_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{2N|2N}; \mathbb{R}^{1|0})$, $i = \overline{1, N}$, розкладу функціонала

$$-\frac{1}{2} \operatorname{str} S_N := \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_i}{\lambda - \lambda_i},$$

де

$$\sigma_i = \sum_{k=1, k\neq i}^N \frac{(f_i g_k - g_i f_k + \psi_i \psi_k + \phi_i \phi_k)^2}{\lambda_i - \lambda_k} + \lambda_i f_i^2 -$$
$$-2\phi_i \psi_i - f_i^2 \left(\sum_{p=1}^N (\lambda_p f_p^2 - 2\phi_p \psi_p) \right),$$

утворюють множину $N \in \mathbb{N}$ функціонально незалежних законів збереження цих векторних полів на $M_N^{1|1} \simeq T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes H^{N-2} \subset \mathbb{R}^{2N|2N}$. Функції σ_i, $i = \overline{1, N}$, перебувають в інволюції відносно породженої парною суперсимплектичною структурою (22) дужки Пуассона на $\in C^\infty(\mathbb{R}^{2N|2N}; \mathbb{R}^{1|0})$:

$$\{F, G\}_{\omega^{(2)}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial g_i} \frac{\partial G}{\partial f_i} - \frac{\partial F}{\partial f_i} \frac{\partial G}{\partial g_i} + \frac{\partial_r F}{\partial \psi_i} \frac{\partial_l G}{\partial \psi_i} + \frac{\partial_r F}{\partial \phi_i} \frac{\partial_l G}{\partial \phi_i} \right),$$

де F, $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{2N|2N}; \mathbb{R}^{1|0})$, $\frac{\partial_l}{\partial \beta}$ та $\frac{\partial_r}{\partial \beta}$ — оператори лівої і правої похідних відповідно за антикомутативною змінною β, і забезпечують інтегровність за Ліувіллем векторних полів $\frac{d}{dx}$ та $\frac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$, на дійсному базовому многовиді $M_N \subset \mathbb{R}^{2N}$ симплектичного супермноговиду $M_N^{1|1}$, а згідно з дослідженнями В. Н. Шандера [31] і на $M_N^{1|1} \subset M^{1|1}$.

Для знаходження розв'язків інтегровних за Ліувіллем динамічних систем на скінченновимірному симплектичному супермноговиді $M_N^{1|1} \simeq T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes H^{N-2} \subset \mathbb{R}^{2N|2N}$ необхідно розвинути метод інтегрування в квадратурах динамічних систем на скінченновимірних симплектичних многовидах за допомогою перетворень Гамільтона – Якобі [25, 29, 30].

4. Висновки. У статті запропоновано Лі-алгебраїчний опис ієрархії Лаберже – Матьє узгоджено бігамільтонових та інтегровних за Лаксом суперсиметричних нелінійних динамічних систем на функціональному супермноговиді $M^{1|1} \subset C^\infty(\mathbb{S}^{1|1}; \mathbb{R}^{1|1})$ як гамільтонових потоків на спряженому просторі центрально-розширеної алгебри рядів Лорана над супералгеброю Лі суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|2} \simeq \mathbb{S} \times \Lambda_1^2$ на основі $\mathcal{R}$-операторного методу [6, 16, 19] та процедури редукування на орбіту поліноміального типу відповідної коприєднаної дії. За допомогою редукованого на цю орбіту співвідношення для функціоналів Казіміра (9) у випадку суперсліду суперматриці монодромії асоційованої спектральної задачі (15) як породжуючого функціонала локальних законів збереження знайдено матричне зображення Лакса для ієрархії Лаберже – Матьє в алгебрі рядів Лорана над напівпростою супералгеброю Лі $\mathrm{osp}(2|2)$. Використовуючи розвинений у статті Лі-алгебраїчний підхід до конструювання узгоджено бігамільтонових та інтегровних за Лаксом суперсиметричних нелінійних динамічних систем, можна отримати багатокомпонентні узагальнення [16] суперсиметричної ієрархії Лаберже – Матьє (12) на орбітах коприєднаної дії вигляду (13) та (14).

Існування матричного зображення Лакса з інваріантним відносно еволюцій спектральним параметром та узгодженої пари дужок Пуассона дозволило розвинути для суперсиметричної ієрарахії Лаберже – Матьє метод редукування на інваріантний підпростір типу Неймана (20) та звести знаходження її часткових розв'язків до інтегрування в квадратурах динамічних систем на скінченновимірному симплектичному супермноговиді. Зокрема, показано, що цей підпростір дифеоморфний до скінченновимірного супермноговиду $T^*(\mathbb{S}^{N-1}) \otimes H^{N-2} \otimes H^{N-2} \subset \subset \mathbb{R}^{2N|2N}$ з точною канонічною парною суперсимплектичною структурою [4, 32, 33], а редуковані на нього векторні поля $\dfrac{d}{dx}$ та $\dfrac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{N}$, є гамільтоновими та інтегровними за Лаксом – Ліувіллем динамічними системами. Описану в статті схему редукування можна застосувати для отримання *a priori* гамільтонових та інтегровних за Лаксом – Ліувіллем динамічних систем на скінченновимірних супермноговидах як інваріантних редукцій суперсиметричних ієрархій, заданих на періодичних функціональних супермноговидах однієї антикомутативної незалежної змінної, з матричним зображенням Лакса (15), (16) на підпростори розв'язків, породжені локальними законами збереження та власними значеннями відповідної спектральної задачі. У зв'язку з цим виникає необхідність розвинути для інтегровних за Ліувіллем динамічних систем на скінченновимірних симплектичних супермноговидах метод інтегрування за допомогою перетворень Гамільтона – Якобі, запропонований у монографії [25].

1. *Lax P.* Periodic solutions of the Korteweg – de Vries equation // Communs Pure and Appl. Math. – 1975. – **28**, № 2. – P. 85 – 96.
2. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский А. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
3. *Prykarpatsky A., Mykytiuk I.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. – 554 p.
4. *Гентош О., Притула М., Прикарпатський А.* Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах. – Львів: Львів. нац. ун-т, 2006. – 408 с.
5. *Прикарпатський А. К., Філь Б. М.* Категорія топологічних джет-многовидів та деякі застосування в теорії нелінійних нескінченновимірних динамічних систем // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1242 – 1256.
6. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
7. *Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А.* Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход. – М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003. – 352 с.

8. *Oevel W.* $\mathcal{R}$-structures, Yang – Baxter equations and related involution theorems // J. Math. Phys. – 1989. – **30**, № 5. – P. 1140 – 1149.
9. *Manin Yu. I., Radul A. O.* A supersymmetric extension of the Kadomtsev – Petviashvili hierarchy // Communs Math. Phys. – 1985. – **98**. – P. 65 – 77.
10. *Oevel W., Popowicz Z.* The bi-Hamiltonian structure of fully supersymmetric Korteweg-de Vries systems // Ibid. – 1991. – **139**. – P. 441 – 460.
11. *Morosi C., Pizzocchero L.* On the bi-Hamiltonian structure of the supersymmetric KdV hierarchies. A Lie superalgebraic approach // Ibid. – 1993. – **158**. – P. 267 – 288.
12. *Morosi C., Pizzocchero L.* $osp(3,2)$ and $gl(3,3)$ supersymmetric KdV hierarchies. A Lie superalgebraic approach // Phys. Lett. A. – 1994. – **185**. – P. 241 – 252.
13. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equation // J. Math. Phys. – 1978. – **19**. – P. 1156 – 1162.
14. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Под ред. О. С. Парасюка. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
15. *Кулиш П. П.* Аналог уравнения Кортевега – де Фриза для суперконформной алгебры // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **155**. – С. 142 – 148.
16. *Гентош О. Є.* Узгоджено бігамільтонові суперконформні аналоги інтегровних за Лаксом нелінійних динамічних систем // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 887 – 900.
17. *Лейтес Д. А., Фейгин Б. Л.* Новые супералгебры Ли струнных теорий // Теоретико-групповые методы в физике. – М.: Наука, 1983. – **1**. – С. 269 – 278.
18. *Mathieu P.* Supersymmetric extension of the Korteweg – de Vries equation // J. Math. Phys. – 1988. – **29**, № 11. – P. 2499 – 2506.
19. *Prykarpatsky A., Hentosh O., Kopych M., Samuliak R.* Neumann – Bogoliubov – Rosochatius oscillatory dynamical systems and their integrability via dual moment maps. I // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2**, № 2. – P. 98 – 113.
20. *Laberge C.-A., Mathieu P.* $N = 2$ superconformal algebra and integrable $O(2)$ fermionic extensions of the Korteweg – de Vries equation // Phys. Lett. B. – 1988. – **215**, № 4. – P. 718 – 722.
21. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.* О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач // Функцион. анализ и его прил. – 1976. – **10**, № 1. – С. 9 – 13.
22. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемости гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 5. – С. 109 – 151.
23. *Prykarpatsky A. K., Hentosh O. E., Blackmore D. L.* The finite-dimensional Moser type reductions of modified Boussinesq and super-Korteweg – de Vries Hamiltonian systems via the gradient-holonomic algorithm and the dual moment maps. I // J. Nonlinear Math. Phys. – 1997. – **4**, № 3-4. – P. 455 – 469.
24. *Blaszak M.* Multi-Hamiltonian theory of dynamical systems. – New York: Springer, 1998. – 350 p.
25. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 237 с.
26. *Гентош О. Є.* Гамільтонові скінченновимірні редукції осциляторного типу інтегровних за Лаксом суперконформних ієрархій // Нелінійні коливання. – 2006. – **58**, № 7. – С. 887 – 900.
27. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Интегрируемые нелинейные уравнения и теорема Лиувилля // Функцион. анализ и его прил. – 1979. – **13**, № 1. – С. 8 – 20.
28. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
29. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
30. *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. – М.: Наука, 1990. – 240 с.
31. *Шандер В. Н.* О полной интегрируемости обыкновенных дифференциальных уравнений на супермногообразиях // Функцион. анализ и его прил. – 1983. – **17**, № 1. – С. 89 – 90.
32. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру с антикоммутирующими переменными. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 208 с.
33. *Shander V. N.* Analogues of the Frobenius and Darboux theorems for supermanifolds // Докл. Болгар. акад. наук. – 1983. – **36**, № 3. – С. 309 – 311.

Одержано 26.12.08