УДК 519.21

И. П. Ильинская (Харьков. нац. ун-т)

АРИФМЕТИКА ПОЛУГРУПП РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

We study the arithmetic of a semigroup $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ of functions under multiplication representable in the form $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ $\left(a_n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1\right)$, where $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ is a system of multiplicative functions that are generalizations of the classical Walsh functions. For the semigroup $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, the analogs of the well-known Khinchin theorems related to the arithmetic of a semigroup of probability measures in $\mathbf{R}^n$ are valid. The class $I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ of functions without neither indivisible nor nondegenerate idempotent divisors is completely described. A class of indecomposable functions that is dense everywhere in $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ in the topology of uniform convergence is constructed.

Вивчається арифметика напівгрупи функцій $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ з операцією множення, які можна зобразити у вигляді $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ $\left(a_n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1\right)$, де $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — система мультиплікативних функцій, що є узагальненням класичних функцій Уолша. Для напівгрупи $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ справджуються аналоги відомих теорем Хінчина з арифметики напівгрупи ймовірнісних мір у $\mathbf{R}^n$. Описано клас $I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ функцій, які не мають ані неподільних, ані невироджених ідемпотентних дільників, та побудовано клас нерозкладних функцій, щільний у $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ в топології рівномірної збіжності.

1. Введение. Изучение арифметики сверточной полугруппы вероятностных мер в $\mathbf{R}^n$ было начато в тридцатых годах прошлого века после того, как А. Я. Хинчин доказал теорему о представимости любой вероятностной меры в виде свертки меры, не имеющей неразложимых делителей, и конечного или счетного множества неразложимых мер [1] (гл. 3, § 4). Основные вопросы арифметики — изучение класса I_0 мер, не имеющих неразложимых делителей, и класса N неразложимых мер. Много важных результатов, касающихся класса I_0, было получено Ю. В. Линником, И. В. Островским и Г. П. Чистяковым. Но проблема полного описания класса I_0 остается пока нерешенной. В шестидесятые годы возник интерес к изучению арифметики вероятностных мер на локально компактных абелевых группах. Важные результаты в этом направлении получили К. Партасарати, Р. Рао, С. Варадан, Г. М. Фельдман и А. Е. Фрынтов (см. [2, 3]).

Параллельно с арифметикой мер в $\mathbf{R}^n$ и на группах стала развиваться арифметика специальных полугрупп. Так называют полугруппы, арифметика которых близка к арифметике сверточной полугруппы вероятностных мер в $\mathbf{R}^n$, но в них задача описания класса I_0 часто оказывается разрешимой (см. обзорную статью [4]). Настоящая статья посвящена изучению арифметики одной такой полугруппы, а именно, мультипликативной полугруппы рядов с неотрицательными коэффициентами по мультипликативным системам. Введем необходимые определения и обозначения.

Пусть $\mathcal{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел $p_j \geq 2$. Обозначим

$$m_0 = 1, \qquad m_j = \prod_{s=1}^{j} p_s, \quad j \geq 1.$$

Запишем каждое число $x \in [0,1)$ в $\mathcal{P}$-ичной системе

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \qquad x_j \in \{0, 1, 2, \ldots, p_j - 1\}.$$

$\mathcal{P}$-ично рациональным точкам отрезка $[0,1)$ соответствуют два разложения: конечное и бесконечное. Для таких точек будем рассматривать только конечные разложения.

Обозначим $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Запишем каждое число $n \in \mathbf{N}_0$ в $\mathcal{P}$-ичной системе

$$n = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j m_{j-1}, \qquad \alpha_j \in \{0, 1, 2, \ldots, p_j - 1\}. \tag{1}$$

Обозначим, следуя [5] (§ 1.5),

$$\chi_n(x) = \exp\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j x_j}{p_j}\right\}. \tag{2}$$

Заметим, что $\chi_0(x) \equiv 1$. Функции $\chi_n(x)$ называются *мультипликативными функциями.* Если $p_j = 2$ для всех j, то класс мультипликативных функций $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ совпадает с классом функций Уолша (всевозможных произведений функций Радемахера) (см. [5], § 1.1, 1.2). Легко видеть, что произведение двух мультипликативных функций является мультипликативной функцией и множество $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является группой по умножению. Обозначим через $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ множество функций $f(x)$, $x \in [0,1)$, представимых в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x), \quad a_n \geq 0, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1.$$

Множество $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ является полугруппой относительно умножения. Будем изучать арифметику полугруппы $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Для случая $\mathcal{P} = \{2, 2, 2, \ldots\}$ арифметика полугруппы $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ изучена в работе [6]. Введем следующие определения.

Функции χ_n, $n \in \mathbf{N}_0$, называются *вырожденными элементами* полугруппы $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Функция $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ называется *идемпотентной,* если $f^2 = f \cdot \chi_k$ для некоторого $k \in \mathbf{N}_0$. Легко видеть, что вырожденные функции являются идемпотентными. Существуют и невырожденные идемпотентные функции, например функция

$$\frac{1}{p_j}\left\{1 + \exp\left(2\pi i \frac{x_j}{p_j}\right) + \exp\left(2\pi i \frac{2x_j}{p_j}\right) + \ldots + \exp\left(2\pi i \frac{(p_j - 1)\, x_j}{p_j}\right)\right\},$$

которая равна единице при $x_j = 0$ и нулю при $x_j \neq 0$. Функция $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ называется *безгранично делимой,* если для любого натурального s найдутся

$f_s \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ и $k \in \mathbf{N}_0$ такие, что $f = (f_s)^s \cdot \chi_k$. Функция $f_1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ называется *делителем* функции f, если найдется функция $f_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ такая, что $f = f_1 \cdot f_2$. Функция $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ называется *неразложимой,* если $f \neq \chi_k$ для всех $k \in \mathbf{N}_0$ и все делители f имеют вид χ_r или $f \cdot \chi_r$ для некоторого $r \in \mathbf{N}_0$. Обозначим:

$I(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ — класс всех безгранично делимых функций из $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$,

$I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ — класс всех функций из $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, не имеющих ни неразложимых, ни невырожденных идемпотентных делителей,

$N(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ — класс всех неразложимых функций из $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$.

В настоящей статье будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Класс* $I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ *состоит из всех функций вида*

$$\chi_k \cdot \exp\{c(\chi_n - 1)\}, \quad c \geq 0,$$

где $k \in \mathbf{N}_0$, *а* $\mathcal{P}$*-ичная форма записи числа* $n \in \mathbf{N}_0$ *удовлетворяет условиям*:

1) *если* p_j *нечетное, то* $\alpha_j = 0$,

2) *если* p_j *четное, то* $\alpha_j = p_j/2$ *или* 0.

Следствие. 1. *Если* $\mathcal{P} = \{2, 2, 2, \ldots\}$, *то*

$$I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}}) = \left\{\chi_k \cdot \exp\{c(\chi_n - 1)\} : c \geq 0,\ k \in \mathbf{N}_0,\ n \in \mathbf{N}_0\right\}.$$

2. *Если* p_j *нечетно при всех* j, *то*

$$I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}}) = \left\{\chi_k : k \in \mathbf{N}_0\right\}.$$

Утверждение 1 следствия было доказано в [6].

Замечание **1.** Во всех случаях, кроме тех, которые рассмотрены в следствии, найдутся такие числа a и b, $a \neq b$, $a, b \neq 0$, что

$$\exp\{c(\chi_a - 1)\} \in I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}}), \qquad \exp\{c(\chi_b - 1)\} \notin I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}}), \quad c > 0.$$

Действительно, если существует такое t, что p_t четно и не равно 2, то полагаем $a = (p_t/2) \cdot m_{t-1}$, $b = 1 \cdot m_{t-1}$ (важно, что в представлении вида (1) для числа b коэффициент α_t не равен 0 и $p_t/2$). Если же ни одно p_j не является четным, отличным от 2, и существуют такое u, что $p_u = 2$, и такое v, что p_v нечетно, то полагаем $a = 1 \cdot m_{u-1}$, $b = 1 \cdot m_{v-1}$.

Таким образом, в случае 1 следствия класс $I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ оказывается самым богатым, а в случае 2 — самым бедным, вырожденным.

Для каждого $k \in \mathbf{N}_0$ обозначим через W_k множество функций вида (2), у которых $\alpha_k > 0$, $\alpha_j = 0$ при $j > k$, $W_{>k} := \bigcup_{s=k+1}^{\infty} W_s$; при $k \neq 0$ положим $W_{<k} := \bigcup_{s=0}^{k-1} W_s$.

Теорема 2. *Пусть функция* $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ *имеет вид*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{i_j} \chi_{i_j}(x), \quad a_{i_m} > 0, \tag{3}$$

причем $\chi_{i_m} \in W_k$ *для некоторого натурального* k, $\chi_{i_j} \in W_{<k}$ *при всех* $j < m$ *и среди коэффициентов* α_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, *хотя бы три отличны от нуля. Тогда* $f \in N(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$.

2. Вероятностная интерпретация полугруппы $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Покажем, что мультипликативные функции $\chi_n(x)$ можно рассматривать как характеры некоторой группы. Обозначим, следуя [5], через $G(\mathcal{P})$ множество целочисленных последовательностей вида

$$\overset{*}{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}, \qquad 0 \le x_j \le p_j - 1, \quad j \ge 1.$$

Введем на множестве $G(\mathcal{P})$ операцию $\oplus$, задаваемую равенством

$$\overset{*}{x} \oplus \overset{*}{y} = \{x_j \oplus y_j\}_{j=1}^{\infty},$$

где $x_j \oplus y_j \in \{0, 1, \ldots, p_j - 1\}$ и $x_j \oplus y_j \equiv x_j + y_j \pmod{p_j}$. Множество $G(\mathcal{P})$ является абелевой группой относительно операции $\oplus$. Легко видеть, что $G(\mathcal{P})$ изоморфна слабому произведению групп $\mathbf{Z}_{p_1} \times \mathbf{Z}_{p_2} \times \mathbf{Z}_{p_3} \times \ldots$, где $\mathbf{Z}_{p_j}$ — группа классов вычетов по модулю p_j. Наделим каждую группу $\mathbf{Z}_{p_j}$ дискретной топологией, а группу $G(\mathcal{P})$ — топологией прямого произведения. Тогда по теореме Тихонова группа $G(\mathcal{P})$ компактна. Построим группу характеров группы $G(\mathcal{P})$. Для каждого $n \in \mathbf{N}_0$ запишем его представление вида (1) и положим

$$\overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{x}) = \exp\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{l} \frac{\alpha_j x_j}{p_j}\right\}.$$

Легко видеть, что

$$\left|\overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{x})\right| = 1 \quad \text{и} \quad \overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{x} \oplus \overset{*}{y}) = \overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{x}) \cdot \overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{y}).$$

Следовательно, $\overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{x})$ — характер группы $G(\mathcal{P})$. Поскольку группа характеров группы $\mathbf{Z}_m$ изоморфна $\mathbf{Z}_m$, а группа характеров слабого счетного произведения групп состоит из всевозможных конечных произведений характеров сомножителей [7] (§ 23), функциями $\overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{x})$ исчерпываются все характеры группы $G(\mathcal{P})$. Обозначим группу характеров группы $G(\mathcal{P})$ через $G^*(\mathcal{P})$:

$$G^*(\mathcal{P}) = \left\{\overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{x})\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

По теореме двойственности Понтрягина группа характеров группы $G^*(\mathcal{P})$ топологически изоморфна группе $G(\mathcal{P})$.

Рассмотрим множество вероятностных мер на группе $G^*(\mathcal{P})$. Характеристическая функция вероятностной меры на группе $G^*(\mathcal{P})$ имеет вид

$$f(\overset{*}{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{x}), \quad a_n \ge 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1.$$

Таким образом, установлено, что *полугруппа* $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ *изоморфна сверточной полугруппе вероятностных мер на группе* $G^*(\mathcal{P})$. Поэтому при изучении арифметики полугруппы $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ можно использовать известные факты об арифметике вероятностных мер на локально компактных абелевых группах.

3. Описание класса функций $I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$. Из результатов К. Партасарати, Р. Рао, С. Варадана [2] (гл. 4, § 11), касающихся разложения вероятностных мер на локально компактных абелевых группах, следует, что для полугруппы $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ справедливы следующие аналоги факторизационных теорем А. Я. Хинчина.

Теорема A. *Любая функция* $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ *представима в виде* $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$, *где* f_1 — *максимальный идемпотентный делитель* f, $f_2 \in I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$, f_3 — *произведение конечного* (*возможно, пустого*) *или счетного множества неразложимых функций.*

Теорема B. $I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}}) \subset I(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$.

Учитывая, что группа $G^*(\mathcal{P})$ дискретна, и применяя в этом случае формулу, дающую общий вид характеристической функции безгранично делимой вероятностной меры на локально компактной абелевой группе [2] (гл. 4, § 7, замечание), получаем теорему об описании класса $I(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$.

Теорема C. *Класс* $I(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ *состоит из всех функций вида*

$$f = f_1 \cdot \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\chi_n - 1)\right\}, \quad c_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty,$$

где f_1 — *идемпотентная функция.*

Для доказательства теоремы 1 понадобятся известные факты о разложении распределения Пуассона на группах. Пусть E_x — вероятностная мера на группе X, сосредоточенная в точке x, $\varphi(y, E_x)$ — ее характеристическая функция.

Теорема D ([3], теорема 6.6). *Мера с характеристической функцией*

$$\exp\left\{c\left[\varphi(y, E_{x_0}) - 1\right]\right\}, \quad c > 0,$$

принадлежит классу I_0 *тогда и только тогда, когда порядок элемента* x_0 *равен двум или бесконечности.*

Теорема E ([3], теорема 6.11). *Мера с характеристической функцией*

$$\exp\left\{c_1\left[\varphi(y, E_{x_1}) - 1\right] + c_2\left[\varphi(y, E_{x_2}) - 1\right]\right\},$$

где $c_1, c_2 > 0$, x_j — *элементы порядка два,* $x_1 \neq x_2$, *не принадлежит классу* I_0.

***Доказательство теоремы* 1.** Согласно теореме B функции класса $I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ принадлежат классу $I(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$, и поэтому в силу теоремы C их надо искать среди функций вида

$$f = \chi_k \cdot \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\chi_n - 1)\right\}, \quad c_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty. \tag{4}$$

В дальнейшем рассуждении опираемся на изоморфизм полугруппы $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ и полугруппы вероятностных мер на $G^*(\mathcal{P})$. Ясно, что при любом натуральном n функция χ_n — элемент конечного порядка группы $G^*(\mathcal{P})$. Если найдется n такое, что в (4) $c_n > 0$ и χ_n имеет порядок, не равный 2, то по теореме D функция $\exp\{[\overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{x})-1]\}$ имеет неразложимый делитель. Тогда и функция вида (4) имеет неразложимый делитель.

Если найдутся такие n и m $(n,m\neq 0,\ n\neq m)$, что χ_n и χ_m имеют порядок 2 и $c_n > 0$, $c_m > 0$, то по теореме E функция

$$\exp\left\{c_1\left[\overset{*}{\chi}_n(\overset{*}{x})-1\right]+c_2\left[\overset{*}{\chi}_m(\overset{*}{x})-1\right]\right\}$$

имеет неразложимый делитель и, следовательно, функция вида (4) имеет неразложимый делитель. Поэтому, снова применяя теорему D, заключаем, что класс $I_0(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ состоит из функций вида

$$\chi_k\cdot\exp\left\{c[\chi_n(x)-1]\right\},\qquad c>0,$$

где χ_n имеет порядок 2.

Выясним, при каких n функция χ_n имеет порядок 2. Пусть $\chi_n^2(x)\equiv 1$. Разобьем сумму в (2) на три суммы: 1) с p_j, равными 2, 2) с p_j четными, не равными 2, и 3) с нечетными p_j

$$\chi_n(x) = \exp\left\{2\pi i\left[\sum_{j\in J_1}\frac{\delta_j x_j}{2}+\sum_{j\in J_2}\frac{\beta_j x_j}{2k_j}+\sum_{j\in J_3}\frac{\gamma_j x_j}{2k_j-1}\right]\right\}. \tag{5}$$

Покажем, что $\gamma_j=0$ для всех $j\in J_3$. Предположим, что $\gamma_j\neq 0$ для некоторого $j=t$. Положим в (5) $x_t=1$, $x_j=0$ при $j\neq t$. Тогда

$$\chi_n(x) = \exp\left\{2\pi i\frac{\gamma_t}{2k_t-1}\right\},\qquad \chi_n^2(x) = \exp\left\{2\pi i\frac{2\gamma_t}{2k_t-1}\right\} = 1.$$

Следовательно, $2\gamma_t/(2k_t-1)$ — целое число, поэтому γ_t делится на $2k_t-1$. Но это невозможно, так как $\gamma_t\leq 2k_t-2$. Таким образом, $\gamma_j=0$ при всех $j\in J_3$, и, значит,

$$\chi_n(x) = \exp\left\{2\pi i\left[\sum_{j\in J_1}\frac{\delta_j x_j}{2}+\sum_{j\in J_2}\frac{\beta_j x_j}{2k_j}\right]\right\}. \tag{6}$$

Покажем, что если $\beta_j\neq 0$ при некотором $j\in J_2$, то $\beta_j=k_j$. Предположим, что при некотором $s\in J_2$ выполняется $\beta_s\neq 0$, $\beta_s\neq k_s$. Положим в (6) $x_s=1$, $x_j=0$ при $j\neq s$. Тогда

$$\chi_n(x) = \exp\left\{2\pi i\frac{\beta_s}{2k_s}\right\},\qquad \chi_n^2(x) = \exp\left\{2\pi i\frac{\beta_s}{k_s}\right\} = 1.$$

Следовательно, $\beta_s / k_s = q$, где $q = 2, 3, \ldots$. Поскольку $\beta_s \leq 2k_s - 1$, то $k_s q \leq \leq 2k_s - 1$, $(2-q) k_s \geq 1$, что невозможно при $q = 2, 3, \ldots$.

Теорема 1 доказана.

4. Неразложимые функции. Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, приведем два замечания.

***Замечание* 2.** Если χ_n, $\chi_r \in W_k$, то $\chi_n \cdot \chi_r \in W_k \bigcup W_{<k}$. Если $\chi_n \in W_k$, $\chi_r \in W_{<k}$, то $\chi_n \cdot \chi_r \in W_k$.

***Замечание* 3.** Если $i \neq j$, то $\chi_i \chi_n \neq \chi_j \chi_n$ при любых n.

***Доказательство теоремы* 2.** Предположим, что $f \notin N(\mathcal{M}_\mathcal{P})$. Тогда $f = = f_1 \cdot f_2$, где $f_1, f_2 \in \mathcal{M}_\mathcal{P}$, $f_1, f_2 \neq \chi_n$, $n \in \mathbf{N}_0$. Пусть $f_2 = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \chi_j(x)$. Без ограничения общности можем считать, что коэффициент b_0 отличен от нуля. Если он равен нулю, то возьмем в разложении f_2 любое слагаемое $b_j \chi_j$ с $b_j \neq 0$ и вместо $f = f_1 \cdot f_2$ рассмотрим представление $f = = (f_1 \chi_j) \cdot (f_2 \chi_j^{-1})$. Теперь коэффициент при χ_0 в разложении функции $f_2 \chi_j^{-1}$ не равен нулю. Дальнейшие рассуждения проведем в несколько этапов.

1. Разложение f_1 не содержит слагаемых из $W_{>k}$. Если бы такие слагаемые были, то, так как $b_0 \neq 0$, они были бы и в разложении f, что не так.

2. Разложение f_1 содержит ровно одно слагаемое из W_k, а именно χ_{i_m} (m — число, фигурирующее в (3)). Если бы таких слагаемых было два или больше, то, поскольку $b_0 \neq 0$, их было бы не меньше, чем два, и в разложении f, что не так. Предположим, что f_1 не содержит слагаемых из W_k. Тогда, поскольку $f_1 \neq \chi_n$, $n \in \mathbf{N}_0$, f_1 содержит хотя бы два слагаемых из $W_{<k}$. Так как согласно условию f содержит слагаемое из W_k, f_2 также содержит слагаемое из W_k. Тогда, поскольку f_1 содержит хотя бы два слагаемых из $W_{<k}$, f содержит хотя бы два слагаемых из W_k, что противоречит условию.

3. Разложение f_1 содержит хотя бы одно слагаемое из $W_{<k}$. Это следует из пп. 1, 2 и того, что f_1 содержит хотя бы два слагаемых.

4. Разложение f_2 не содержит слагаемых из $W_{>k}$. Если бы такие слагаемые были, то в силу п. 2 они были бы и у f, что не так.

5. Разложение f_2 содержит ровно одно слагаемое из W_k. Если бы таких слагаемых было два или больше, то в силу п. 3 разложение f содержало бы два или больше слагаемых из W_k, что не так. Если бы таких слагаемых не было, то, так как $f_2 \neq \chi_n$, $n \in \mathbf{N}_0$, функция f_2 содержала бы хотя бы два слагаемых из $W_{<k}$. Но тогда в силу п. 2 разложение f содержит хотя бы два слагаемых из W_k, что невозможно.

6. Разложение f_2 содержит ровно одно слагаемое из $W_{<k}$, а именно, χ_0. Если бы таких слагаемых было не меньше двух, то в силу п. 2 разложение f содержало бы не менее двух слагаемых из W_k, что противоречит условию.

7. Разложение f_1 содержит ровно одно слагаемое из $W_{<k}$. Если бы таких слагаемых было два или больше, то согласно п. 5 функция f содержала бы не менее двух слагаемых из W_k, что не так.

Из пп. 1 – 7 следует, что

$$f_1 = a\chi_{i_p} + b\chi_{i_m}, \quad \chi_{i_p} \in W_{<k}, \quad \chi_{i_m} \in W_k, \quad a, b > 0,$$

$$f_2 = c + d\chi_{i_t}, \quad \chi_{i_t} \in W_k, \quad c, d > 0.$$

Тогда

$$f = ac\chi_{i_p} + bc\chi_{i_m} + ad\chi_{i_p}\chi_{i_t} + bd\chi_{i_m}\chi_{i_t},$$

$\chi_{i_p} \in W_{<k}$, χ_{i_m}, $\chi_{i_p}\chi_{i_t} \in W_k$, $\chi_{i_m}\chi_{i_t} \in W_k \bigcup W_{<k}$. По условию f содержит точно одно слагаемое из W_k, а именно, χ_{i_m}. Поэтому $\chi_{i_p}\chi_{i_t} = \chi_{i_m}$ и

$$f = ac\chi_{i_p} + (bc + ad)\chi_{i_m} + bd\chi_{i_m}\chi_{i_t}.$$

Таким образом, f содержит не более трех слагаемых, что противоречит условию.

Теорема 2 доказана.

***Замечание* 4.** Теорема 2 допускает эквивалентную формулировку. Чтобы привести ее, введем обозначения:

$$V_k = \left\{ \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathbf{Z}_{p_1} \times \mathbf{Z}_{p_2} \times \mathbf{Z}_{p_3} \times \ldots : \ \alpha_k \neq 0, \ \alpha_j = 0, \ j > k \right\},$$

$$V_{>k} = \bigcup_{j=k+1}^{\infty} V_j, \quad k \geq 0; \qquad V_{<k} = \bigcup_{j=0}^{k-1} V_j, \quad k > 0.$$

Подмножество A некоторой группы, содержащее хотя бы два элемента, называется *неразложимым,* если из того, что оно представимо в виде $A = A_1 + A_2$, где A_1, A_2 — подмножества этой группы, а знаком + обозначена групповая операция, следует, что одно из множеств A_1, A_2 состоит из одного элемента.

Теорема 2′. *Пусть множество* $A \subset \mathbf{Z}_{p_1} \times \mathbf{Z}_{p_2} \times \mathbf{Z}_{p_3} \times \ldots$ *содержит ровно один элемент из* V_k, *не содержит ни одного элемента из* $V_{>k}$ *и содержит хотя бы три элемента из* $V_{<k}$. *Тогда множество* A *неразложимо.*

Из результатов К. Партасарати, Р. Рао, С. Варадана [2] (гл. 3, § 4), касающихся теории распределений на локально компактных абелевых группах, вытекает следующая теорема о классе $N(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$.

Теорема F. *Класс* $N(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ *является плотным множеством в* $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ *типа* G_δ *в топологии равномерной сходимости на отрезке* $[0,1)$.

Опираясь на теорему 2, покажем, как по заданной функции $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ можно построить последовательность функций $f_n \in N(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$, равномерно сходящуюся к f. Пусть $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \chi_j(x)$. Введем в рассмотрение функции

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{K_n} \frac{a_j}{s_n} \chi_j(x) + \frac{1}{3n} \chi_l(x) + \frac{1}{3n} \chi_k(x) + \frac{1}{3n} \chi_r(x) \qquad \left(s_n = \frac{n}{n-1} \sum_{j=0}^{K_n} a_j \right),$$

где число K_n выбирается так, что $\chi_j \in W_{<n} \bigcup W_n$ при всех $j \le K_n$; число n берется столь большим, что среди коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{K_n}$ найдется хотя бы один отличный от нуля; числа l, k, r выбираются так, что $\chi_l \in W_{n+1}$, $\chi_k \in W_{n+2}$, $\chi_r \in W_{n+3}$. Тогда в силу теоремы 2 $f_n(x) \in N(\mathcal{M}_{\mathcal{P}})$ и $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$, равномерно по $x \in [0,1)$.

1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. – М.: Наука, 1972. – 480 с.
2. *Parthasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces. – New York; London: Acad. Press, 1967. – 276 p.
3. *Фельдман Г. М.* Арифметика вероятностных распределений и характеризационные задачи на абелевых группах. – Киев: Наук. думка, 1990. – 168 с.
4. *Островский И. В.* Арифметика вероятностных распределений // Теория вероятностей и ее применения. – 1986. – **31**, вып. 1. – С. 3 – 30.
5. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. – М.: Наука, 1987. – 344 с.
6. *Il'inskaya I. P.* The arithmetic of semigroup of series of Walsh functions // J. Austral. Math. Soc. A. – 2000. – **68**. – P. 365 – 378.
7. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ: В 2 т. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 656 с.

Получено 13.06.08