УДК 511.72, 519.21

І. М. Працьовита (Нац. пед. ун-т, Київ)

ПРО РОЗКЛАДИ ЧИСЕЛ У ЗНАКОЗМІННІ s-АДИЧНІ РЯДИ І РЯДИ ОСТРОГРАДСЬКОГО 1- ТА 2-ГО ВИДІВ

We present expansions of real numbers in alternating s-adic series $(1 < s \in N)$, in particular, in the s-adic Ostrogradskii series of the first and second kind. We study geometry of this representation of numbers, solve metric and probability problems including the problem of structure, metric-topological and fractal properties of the distribution of the random variable

$$\xi = \frac{1}{s^{\tau_1 - 1}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{s^{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k - 1}},$$

where τ_k are independent random variables taking natural values.

Посвящена разложениям действительных чисел в знакопеременные s-адические ряды $(1 < s \in \in N)$, в частности s-адические ряды Остроградского 1- и 2-го видов. Изучается „геометрия” такого представления чисел, решены метрические и вероятностные задачи, в том числе и задача о структуре, тополого-метрических и фрактальных свойствах распределения случайной величины

$$\xi = \frac{1}{s^{\tau_1 - 1}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{s^{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k - 1}},$$

где τ_k — независимые случайные величины, принимающие натуральные значения.

1. Вступ. Крім класичного s-адичного подання та зображення чисел, в якому використовують алфавіт $\{0, 1, \ldots, s-1\}$, сьогодні відомо багато інших способів та форм зображення (кодування) дійсних чисел [1, 2]: в Q-зображенні, циліндричному, медіантному та фібоначчієвому зображеннях використовують скінченний алфавіт, у трьох останніх — взагалі двоелементний. Існують зображення, в яких використовують нескінченний алфавіт. Це ланцюгові дроби, Q_∞-зображення [1], розклади чисел у ряди Кантора, Енгеля, Люрота, Серпінського – Пірса тощо. Кожна з моделей дійсного числа, записаного в тій чи іншій формі, має свої переваги при постановці та розв'язанні певного кола математичних задач. Використання різних систем зображення дійсних чисел розширює можливості для вивчення геометрії чисел, їх арифметичних та алгебраїчних властивостей, дозволяє розширити коло дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою: фрактальних множин (типу Кантора, Беардона, Морана, Безиковича – Егглстона тощо), неперервних недиференційовних та сингулярних функцій, сингулярно неперервних імовірнісних мір, перетворень простору, що зберігають фрактальну розмірність (Хаусдорфа – Безиковича, ентропійну, Колмогорова та ін.), динамічних систем, атрактори яких мають непросту тополого-метричну структуру.

Два алгоритми розкладу чисел у знакозмінні ряди розглядав видатний вітчизняний математик М. В. Остроградський, про що свідчать окремі уривки його записів, знайдені в рукописному фонді АН УРСР Є. Я. Ремезом та описані ним у [3]. На актуальність подальших досліджень розкладів чисел за такими алгоритмами Остроградського вказував Б. В. Гнєденко (див. примітки редактора до [4]). Зауважимо, що незалежно від М. В. Остроградського до розкладів (1) і (2) прийшов і В. Серпінський [5]. Розклад чисел у ряд (1) вивчав також Пірс [6], тому в англомовній літературі такі розклади називають розкладами Пірса [7].

Означення 1. *Рядом Остроградського* 1-*го виду називається вираз вигляду*

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_1 q_2 \cdots q_k} + \ldots, \tag{1}$$

де q_k *— натуральні числа, до того ж* $q_{k+1} > q_k$.

Кожен такий ряд є збіжним, його сума належить інтервалу $(0, 1)$. З іншого боку, відомо [3], що довільне число з $(0, 1)$ розкладається у скінченний або нескінченний ряд Остроградського 1-го виду, до того ж ірраціональні числа мають єдиний розклад. Такий розклад можна одержати за алгоритмом

$$1 = q_1 x + \alpha_1, \quad 0 \le \alpha_1 < x, \quad 1 = q_{n+1}\alpha_n + \alpha_{n+1} \quad (0 \le \alpha_{n+1} < \alpha_n), \quad n \in N.$$

Означення 2. *Рядом Остроградського 2-го виду називається вираз вигляду*

$$\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{g_k} + \ldots, \tag{2}$$

де g_k *— натуральні числа, до того ж*

$$g_{k+1} \ge g_k(g_k + 1). \tag{3}$$

Кожен ряд Остроградського 2-го виду, згідно з теоремою Лейбніца, є збіжним і його сума S є додатним числом, яке не перевищує $1/g_1$, а отже, не перевищує 1. Більш того, ряд (2) збігається абсолютно, оскільки ряд із модулів членів ряду (2), згідно з теоремою Даламбера, збігається. Виконавши перетворення над членами ряду (2), отримаємо новий ряд

$$S = \frac{g_2 - g_1}{g_1 g_2} + \frac{g_4 - g_3}{g_3 g_4} + \ldots .$$

Оскільки $g_{2k} - g_{2k-1} > 0$, то сума S ряду (2) є більшою за число $\dfrac{g_2 - g_1}{g_1 g_2}$. Отже, $S \in \left(\dfrac{g_2 - g_1}{g_1 g_2}; \dfrac{1}{g_1} \right) \subset (0,1)$. Відомо [1], що кожне $x \in [0,1]$ єдиним чином розкладається в ряд (2) за таким алгоритмом визначення g_k:

$$1 = g_1 x + \beta_1, \quad 0 \le \beta_1 < x,$$
$$g_1 = g_2\beta_1 + \beta_2, \quad 0 \le \beta_2 < \beta_1,$$
$$g_2 g_1 = g_3\beta_2 + \beta_3, \quad 0 \le \beta_3 < \beta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g_k \ldots g_2 g_1 = g_{k+1}\beta_k + \beta_{k+1}, \quad 0 \le \beta_{k+1} < \beta_k,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

до того ж для ірраціонального x сума (2) має нескінченну кількість доданків, а для раціонального — скінченну.

Зображення чисел рядами Остроградського 1-го виду в останні роки інтенсивно вивчалось [8 – 10]: воно використовувалось для задання і дослідження випадкових величин [9], недиференційовних функцій [8], фракталів тощо, чого не можна сказати про ряди Остроградського 2-го виду [11]. Дану роботу присвячено дослідженню множини чисел, розклади яких за алгоритмами Остроградського є водночас розкладами в знакозмінні s-адичні ряди та s-адичними розкладами.

2. Зв'язок рядів Остроградсього 1- і 2-го видів. Очевидно, що не кожен ряд Остроградського 1-го виду є рядом Остроградського 2-го виду. Наприклад, ряд Остроградського 1-го виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$$

не є рядом Остроградського 2-го виду, оскільки не виконується умова (3). Більш того, не кожен ряд Остроградського 2-го виду є рядом Остроградського 1-го виду. Прикладом ряду Остроградського 2-го виду, що не є рядом Остроградського 1-го виду, є ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{59} - \frac{1}{3541} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{p_k}, \tag{4}$$

де (p_k) — нескінченна зростаюча послідовність простих чисел така, що

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 7, \quad p_3 = 59, \ \ldots ,$$

p_{k+1} — найменше просте число таке, що $p_{k+1} > p_k(p_k + 1)$.

Лема 1. *Ряд Остроградського* 1*-го виду* (1) *є рядом Остроградського* 2*-го виду* (2) *тоді і тільки тоді, коли для довільного* $k \in N$ *виконується нерівність*

$$q_{k+1} \geq q_1 q_2 \ldots q_k + 1. \tag{5}$$

Доведення. Справді, якщо ряд (1) задовольняє умову (5), то він, очевидно, є рядом Остроградського 2-го виду згідно з означенням 2. Якщо ж принаймні для одного значення $k \in N$ нерівність (5) не виконується, то порушується вимога (3) означення 2 і ряд (1) не є рядом Остроградського 2-го виду.

Лема 2. *Ряд Остроградського* 2*-го виду є рядом Остроградського* 1*-го виду тоді і тільки тоді, коли для всіх натуральних значень* k

$$\frac{g_{k+1}}{g_k} \equiv b_{k+1} \in N. \tag{6}$$

Доведення. Нехай (2) — заданий ряд Остроградського 2-го виду. Тоді $g_{k+1} \geq g_k(g_k + 1)$, а отже, $g_{k+1} > g_k^2$. Тому якщо виконується умова (6), то $b_{k+1} > 1$ для всіх $k \in N$ і $g_{k+1} = g_1 b_2 \ldots b_{k+1}$. Оскільки $g_{n+1} \geq g_n(g_n + 1)$, то

$$g_1 b_2 \ldots b_k b_{k+1} \geq g_1 b_2 \ldots b_k (g_1 b_2 \ldots b_k + 1),$$

$$b_{k+1} \geq g_1 b_2 \ldots b_k + 1,$$

а отже, $b_{k+1} > b_k$. Тоді ряд (2) має вигляд

$$\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_1 b_2} + \frac{1}{g_1 b_1 b_2} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{g_1 b_1 \ldots b_k} + \ldots,$$

де $b_{k+1} > b_k \in N$, і тому є рядом Остроградського 1-го виду.

Навпаки, якщо ряд Остроградського (2) є рядом Остроградського 1-го виду, тобто

$$g_{k+1} = q_1 q_2 \ldots q_k q_{k+1}, \qquad q_{k+1} \geq q_k + 1, \qquad k \in N,$$

то $\dfrac{g_{k+1}}{g_k} = q_{k+1} \equiv b_{k+1} \in N$, тобто має місце співвідношення (6).

3. Знакозмінні s-адичні ряди.

Означення 3. *Якщо s — фіксоване натуральне число, більше за* 1, *то ряд виду*

$$\frac{1}{s^{m_1-1}} - \frac{1}{s^{m_2}} + \frac{1}{s^{m_3}} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{s^{m_k}} + \ldots = \frac{1}{s^{m_1-1}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{s^{m_k}}, \tag{7}$$

де m_k — натуральні, причому $m_2 > m_1 - 1$, $m_{k+2} > m_{k+1}$ для всіх $k > 1$, називається знакозмінним s-адичним рядом.

Зрозуміло, що знакозмінний s-адичний ряд однозначно визначається числом s і зростаючою послідовністю натуральних чисел (m_k). Тому таких рядів існує континуальна множина. Кожен такий ряд є збіжним і його сума не перевищує числа $\dfrac{1}{s^{m_1-1}}$.

Деякі знакозмінні s-адичні ряди є рядами Остроградського 1-го або 2-го виду.

Лема 3. *Знакозмінний s-адичний ряд* (7) *є рядом Остроградського* 1*-го виду тоді і тільки тоді, коли*

$$m_2 > 2(m_1 - 1) \quad і \quad m_{k+2} > 2m_{k+1} - m_k. \tag{8}$$

Доведення. Якщо (7) є рядом Остроградського 1-го виду, то $s^{m_1-1} = q_1$, $s^{m_2} = s^{m_1-1} q_2$ і $s^{m_{k+2}} = s^{m_{k+1}} q_{k+2}$, де $q_{k+1} > q_k \in N$. Звідси $m_2 > 2(m_1 - 1)$,

$$s^{m_{k+2} - m_{k+1}} = q_{k+2} > q_{k+1} = s^{m_{k+1} - m_k} \quad \text{і} \quad m_{k+2} > 2m_{k+1} - m_k.$$

Доведемо обернене твердження: якщо для ряду (7) мають місце нерівності (8), то він є рядом Остроградського 1-го виду.

Послідовність натуральних чисел (m_k), яка задовольняє умови (8), очевидно, є зростаючою. Другу з нерівностей (8) можна переписати у вигляді $m_{k+2} - m_{k+1} > m_{k+1} - m_k$, що рівносильно $s^{m_{k+2} - m_{k+1}} > s^{m_{k+1} - m_k}$. Тоді

$$q_{k+2} \equiv \frac{s^{m_{k+2}}}{s^{m_{k+1}}} > \frac{s^{m_{k+1}}}{s^{m_k}} \equiv q_{k+1},$$

а отже, ряд (7) задовольняє означення ряду Остроградського 1-го виду.

Лема 4. *Знакозмінний s-адичний ряд* (7) *є рядом Остроградського* 2*-го виду тоді і тільки тоді, коли*

$$m_2 > 2(m_1 - 1) \quad i \quad m_{k+2} > 2m_{k+1}, \qquad k \in N.$$

Доведення. Згідні з означенням 2, ряд (7) є рядом Остроградського 2-го виду тоді і тільки тоді, коли для довільного $k \in N$ мають місце нерівності

$$s^{m_2} \geq s^{m_1-1}\left(s^{m_1-1} + 1\right) \quad \text{і} \quad s^{m_{k+2}} \geq s^{m_{k+1}}\left(s^{m_{k+1}} + 1\right).$$

Остання нерівність рівносильна нерівностям $s^{m_{k+2}-m_{k+1}} \geq s^{m_{k+1}}+1$, $s^{m_{k+2}-m_{k+1}} > s^{m_{k+1}}$, а отже, і $m_{k+2} > 2m_{k+1}$.

***Наслідок* 1.** *Кожен s-адичний ряд Остроградського* 2*-го виду є s-адичним рядом Остроградського* 1*-го виду.*

4. Зображення суми знакозмінного s-адичного ряду в системі числення з основою s. З метою вивчення тополого-метричних і фрактальних властивостей множини всіх сум знакозмінних рядів із фіксованим s, а також множини сум всеможливих знакозмінних s-адичних рядів нагадаємо деякі факти теорії (класичних) s-адичних розкладів.

(*Класичним*) *s-адичним розкладом числа* $x \in [0,1]$ називається його розклад у ряд

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{s^k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k}, \tag{9}$$

де $\alpha_k \in A = \{0,1,\ldots,s-1\}$. Вираз (9) символічно зображується у вигляді $\Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$ і називається *s-адичним зображенням числа* x (зображенням числа x в системі числення з основою s). При цьому число $\alpha_k = \alpha_k(x)$ називається k-ю s-адичною цифрою x.

Кожне ірраціональне число має єдине s-адичне зображення. Деякі раціональні числа мають їх два (такі називаються *s-адично раціональними*). Це числа, зображення яких містить період (0) або $(s-1)$. Очевидною є рівність

$$x = \Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m 0\ldots 0\ldots} = \Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}(\alpha_m-1)(s-1)\ldots(s-1)\ldots}.$$

Числа, які мають період в s-адичному зображенні, відмінний від (0) і $(s-1)$, є раціональними. Вони мають єдине зображення і разом з ірраціональними числами утворюють множину *s-адично ірраціональних чисел.*

Множину всіх чисел $x \in [0,1]$, перші m s-адичні цифри яких відповідно дорівнюють $c_1\ldots c_m$, позначають $\Delta^s_{c_1\ldots c_m}$ і називають *s-адичним циліндром рангу m з основою* $c_1\ldots c_m$. Циліндри мають такі властивості:

1) циліндр $\Delta^s_{c_1\ldots c_m}$ є відрізком із кінцями $\Delta^s_{c_1\ldots c_m(0)}$ і $\Delta^s_{c_1\ldots c_m(s-1)}$;

2) $\Delta^s_{c_1\ldots c_m} = \bigcup_{i=0}^{s-1} \Delta^s_{c_1\ldots c_m i}$, $\sup \Delta^s_{c_1\ldots c_m i} = \inf \Delta^s_{c_1\ldots c_m (i+1)}$;

3) $\left|\Delta^s_{c_1\ldots c_m}\right| = s^{-m}$;

4) $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^s_{c_1\ldots c_m} \equiv \Delta^s_{c_1\ldots c_m\ldots} = x$.

Лема 5. *Сума x знакозмінного s-адичного ряду* (7) *має s-адичне зображення*

$$x = \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{m_1-1}\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{m_2}\underbrace{0\ldots0}_{m_3-m_2}\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{m_4-m_3}\ldots}. \tag{10}$$

Доведення. Нехай ряд (7) є заданим, тобто фіксованими є число s і послідовність (m_k). Знайдемо вираз суми x даного ряду. Оскільки

$$x = \left(\frac{1}{s^{m_1-1}} - \frac{1}{s^{m_2}}\right) + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{s^{m_{2k-1}}} - \frac{1}{s^{m_{2k}}}\right),$$

$$\frac{1}{s^{m_1-1}} - \frac{1}{s^{m_2}} = \frac{s^{m_2-m_1+1}-1}{s^{m_2}}, \qquad \frac{1}{s^{m_{2k-1}}} - \frac{1}{s^{m_{2k}}} = \frac{s^{m_{2k}-m_{2k-1}}-1}{s^{m_{2k}}},$$

$$s^l - 1 = (s-1)s^{l-1} + (s-1)s^{l-2} + \ldots + (s-1)s + (s-1),$$

то

$$\frac{1}{s^{m_{2k-1}}} - \frac{1}{s^{m_{2k}}} = \frac{(s-1)s^{m_{2k}-m_{2k-1}-1}}{s^{m_{2k}}} + \frac{(s-1)s^{m_{2k}-m_{2k-1}-2}}{s^{m_{2k}}} + \ldots + \frac{s-1}{s^{m_{2k}}},$$

а отже,

$$x = \frac{1}{s^{m_1-1}} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{s^{m_k}} = \left(\frac{s-1}{s^{m_1+1}} + \frac{s-1}{s^{m_1+2}} + \ldots + \frac{s-1}{s^{m_2}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{s-1}{s^{m_3+1}} + \frac{s-1}{s^{m_3+2}} + \ldots + \frac{s-1}{s^{m_4}}\right) + \ldots + \left(\frac{s-1}{s^{m_{2k-1}+1}} + \frac{s-1}{s^{m_{2k-1}+2}} + \ldots + \frac{s-1}{s^{m_{2k}}}\right) + \ldots .$$

Тому сума x ряду (7) має s-адичне зображення (10).

5. Множина сум усіх знакозмінних s-адичних рядів. Множину всіх чисел $x \in [0,1]$, які можна розкласти у ряд (7), тобто таких, що мають s-адичне зображення (10), позначимо через E_s. Якщо C_s — множина всіх чисел відрізка $[0,1]$, що мають s-адичні розклади з допомогою цифр 0 та $s-1$, то, згідно з попередньою лемою, $E_s \subset C_s$. Як відомо, C_s при $s > 2$ є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, а тому в цьому випадку такою є і множина E_s. Випадок $s = 2$ заслуговує на окрему увагу.

***Зауваження* 1.** Легко бачити, що множина E_s не містить жодної s-адично раціональної точки, тобто точки виду $\Delta^s_{\alpha_1\ldots\alpha_k 0\ldots0\ldots}$, але всі s-адично ірраціональні точки виду

$$x = \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{m_1-1}\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{m_2-m_1}\underbrace{0\ldots0}_{m_3-m_2}\ldots\underbrace{c\ldots c}_{m_{k+1}-m_k}\underbrace{\bar{c}\ldots\bar{c}}_{m_{k+2}-m_{k+1}}\ldots},$$

де $c \in \{0, s-1\}$, $\bar{c} = s-1-c$, їй належать.

Лема 6. *Кожна точка s-адично раціонального виду*

$$\Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{m_1-1}\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{m_2-m_1}\ldots\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{m_{2k}-m_{2k-1}}\underbrace{0\ldots0\ldots}},\tag{11}$$

де (m_k) — послідовність натуральних чисел, така, що $m_2 > m_1 - 1$, $m_{k+2} > m_{k+1}$ для всіх $k \in N$, не належить E_s, але є граничною для множини E_s.

Доведення. Нехай x_0 — довільно вибрана фіксована точка виду (11), m_{2k} — фіксований член послідовності (m_k). Для доведення леми 6 досить вказати послідовність x_n таку, що: 1) $x_n \in E_s$ і 2) $x_n \to x_0$, $n \to \infty$.

Розглянемо послідовність чисел $x_n = x_0 + (-1)^{m_{2k}-1} r_n$, де

$$r_n = \frac{1}{s^{m_{2k}+n}} - \frac{1}{s^{m_{2k}+n+1}} + \frac{1}{s^{m_{2k}+n+2}} - \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{s^{m_{2k}+n+m}} = \frac{1}{(s+1)^{m_{2k}+n-1}}.$$

Очевидно, що $x_n \in E_s$. Оскільки $r_n \to 0$, $n \to \infty$, то $x_n \to x_0$, $n \to \infty$. Отже, x_0 — гранична точка множини E_s.

Наслідок 2. *Множина* $C_s \backslash E_s$ *є зчисленною і складається з* s*-адично раціональних точок виду* (11).

Наслідок 3. *Якщо* $s = 2$, *то для замикання* $[E_s]$ *множини* E_s *має місце рівність* $[E_s] = C_s = [0,1]$. *Майже всі* (*за винятком зчисленної множини*) *числа інтервалу* $(0,1)$ *можна розкласти в знакозмінний двійковий ряд.*

Теорема 1. *Множина* E *всіх чисел* x *інтервалу* $(0,1)$, *які можна розкласти у знакозмінний* s*-адичний ряд спеціальним підбором* $s > 2$, *є множиною нульової міри Лебега, розмірність Хаусдорфа – Безиковича якої дорівнює* $\log_3 2$.

Доведення. Згідно з наслідком 2, множина E з точністю до не більш ніж зчисленної множини збігається з множиною $C = C_3 \bigcup \ldots \bigcup C_n \bigcup \ldots$. Тому твердження теореми ввипливає з того, що множина C_s є (див. [10]) компактною досконалою самоподібною нуль-множиною Лебега з розмірністю Хаусдорфа – Безиковича $\alpha_0(C_s) = \log_s 2$, а розмірність Хаусдорфа – Безиковича $\alpha_0(\cdot)$ має властивість

$$\alpha_0\left(\bigcup_n B_n\right) = \sup_n \alpha_0(B_n).$$

Теорема 2. *Множина чисел інтервалу* $(0,1)$, *зображення яких рядом Остроградського* 1*-го виду* (2*-го виду*) *є* s*-адичним зображенням, є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

Дане твердження є наслідком лем 3 і 4 та властивостей множин чисел з обмеженнями на використання цифр в s-адичному зображенні (див. [10]).

6. Випадкові знакозмінні ряди з незалежними доданками та лебегівська структура розподілу їх сум. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \frac{1}{s^{\tau_1-1}} - \frac{1}{s^{\tau_1+\tau_2-1}} + \frac{1}{s^{\tau_1+\tau_2+\tau_3-1}} - \ldots + \frac{(-1)^k}{s^{\tau_1+\ldots+\tau_k-1}} + \ldots,$$

де s — фіксоване натуральне число, більше за 1, (τ_k) — послідовність незалежних випадкових величин з розподілами

$$\mathrm{P}\{\tau_k = i\} = p_{ik} \geq 0, \quad i \in N, \qquad p_{1k} + p_{2k} + \ldots + p_{ik} + \ldots = 1.$$

Як випливає з попереднього, випадкова величина ξ має наступне s-адичне зображення

$$\xi = \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{\tau_1-1}\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{\tau_2}\underbrace{0\ldots0}_{\tau_3}\ldots\underbrace{c\ldots c}_{\tau_k}\underbrace{\bar{c}\ldots\bar{c}}_{\tau_{k+1}}\ldots}. \tag{12}$$

З означення ξ бачимо, що вона не має реалізацій поза множиною E_s, причому якщо $x = \Delta^s_{c_1 \ldots c_m \ldots} \in E_s$, то $\mathrm{P}\{\xi = x\} = p_{c_1 1} p_{c_2 2} \ldots p_{c_m m} \ldots$. Якщо серед $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$, знайдеться принаймні одне $\alpha_j \notin \{0,\ s-1\}$, то, очевидно, що $\mathrm{P}\{\xi \in \Delta^s_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}\} = 0.$

Введемо *циліндричне зображення* випадкової величини ξ. З цією метою позначимо s-адичний циліндр

$$\Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{i_1-1}\underbrace{1\ldots1}_{i_2}\underbrace{0\ldots0}_{i_3}\ldots\underbrace{c\ldots c\bar{c}}_{1+i_m}},$$

де $c \in \{0, 1\}$, $\bar{c} = 1 - c$, через $\bar{\Delta}_{i_1 i_2 \ldots i_m}$. З властивостей s-адичних циліндрів безпосередньо випливають наступні властивості нововведених циліндрів:

1) $\bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_m} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_m j}$, $\sup \bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_{2k-1} j} \le \inf \bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_{2k}(j-1)}$, $\sup \bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_{2k} j} \le$ $\le \inf \bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_{2k}(j+1)}$;

2) $\left| \bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_m} \right| = s^{-(i_1 + i_2 + \ldots + i_m)} \to 0, \quad m \to 0;$

3) $\left| \bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_m} \right| = s^{-j} \left| \bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_m} \right|.$

Зображення випадкової величини ξ у формі $\xi = \bar{\Delta}_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k \ldots}$, яке є рівносильним зображенню (12), називатимемо *циліндричним*.

***Зауваження* 2.** Легко бачити, що події $\{\tau_1 = i_1, \ldots, \tau_m = i_m\}$ і $\{\xi \in \bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_m}\}$ є рівносильними.

Лема 7. *Якщо* $c \in \{0,\ s-1\}$ *і* $\bar{c} = s - 1 - c$, *то мають місце рівності*

$$\mathrm{P}\{\xi \in \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{i_1-1}\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{i_2}\ldots\underbrace{c\ldots c\bar{c}}_{1+i_m}}\} = \prod_{j=1}^{m} p_{i_j j},$$

$$\mathrm{P}\{\xi \in \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{i_1-1}\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{i_2}\ldots\underbrace{c\ldots c}_{i_m}}\} = \left(1 - \sum_{j=1}^{i_m - 1} p_{jm}\right) \prod_{j=1}^{m-1} p_{i_j j}.$$

Доведення. З огляду на зауваження 2 і незалежність випадкових величин (τ_n) маємо

$$\mathrm{P}\{\xi \in \bar{\Delta}_{i_1 i_2 \ldots i_m}\} = \mathrm{P}\{\tau_1 = i_1, \tau_2 = i_2, \ldots, \tau_m = i_m\} = \prod_{j=1}^{m} p_{i_j j}.$$

Подія $\{\xi \in \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{i_1-1}\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{i_2}\ldots\underbrace{c\ldots c}_{i_m}}\}$ є об'єднанням несумісних подій

$$\{\xi \in \Delta_{\underbrace{0\ldots0}_{i_1-1}\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{i_2}\ldots\underbrace{c\ldots c}_{i_m}\underbrace{c\ldots c\bar{c}}_{n+1}}\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Як вже зазначалось, подія (13) рівносильна події

$$\{\tau_1 = i_1,\ \tau_2 = i_2,\ \ldots,\ \tau_m = i_m + n\}.$$

З незалежності (τ_j) отримуємо

$$\mathrm{P}\{\tau_1 = i_1,\, \tau_2 = i_2,\, \ldots,\, \tau_m = i_m + n\} = p_{(i_m+n)m} \prod_{j=1}^{m-1} p_{i_j j},$$

$$\mathrm{P}\{\xi \in \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{i_1-1}\underbrace{(s-1)\ldots(s-1)}_{i_2}\ldots\underbrace{c\ldots c}_{i_m}}\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{(i_m+n)m} \prod_{j=1}^{m-1} p_{i_j j} = \left(1 - \sum_{j=1}^{i_m-1} p_{jm}\right) \prod_{j=1}^{m-1} p_{i_j j}.$$

Легко довести наступне твердження.

Лема 8. *Спектром* (*мінімальним замкненим носієм*) S_ξ *випадкової величини* ξ *є множина*

$$S_\xi = \{x : x = \bar{\Delta}_{i_1 i_2 \ldots i_m \ldots},\ \ p_{i_j j} > 0 \quad \forall j \in N\} \subset C_s,$$

до того ж $S_\xi = C_s$ *тоді і тільки тоді, коли матриця* $\|p_{ik}\|$ *не містить нулів.*

Теорема 3. *Випадкова величина* ξ *має чисто дискретний або чисто неперервний розподіл, до того ж він є дискретним тоді і тільки тоді, коли*

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0.$$

У випадку неперервності $(M = 0)$ *при* $s > 2$ *випадкова величина* ξ *має сингулярний розподіл канторівського типу* $(\lambda(S_\xi) = 0)$.

Доведення. 1. Нехай $M = 0$. Кожна точка множини $x \in E_s$ має єдине s-адичне, а отже, циліндричне $\bar{\Delta}_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots}$ зображення. Тому $\mathrm{P}\{\xi = x\} \le$ $\le M$ і жодна з точок множини E_s не є атомом розподілу ξ. Як випливає з попереднього, атомами не є і точки множини $C_s \backslash E_s$. Отже, розподіл ξ є неперервним.

2. Нехай $M > 0$. Тоді очевидно, що точка $x^* = \bar{\Delta}_{i_1^* i_2^* \ldots i_k^* \ldots}$ така, що

$$p_{i_j^* j} = \max\{p_{1j}, p_{2j}, \ldots\},$$

є атомом розподілу з масою M.

Якщо $x = \bar{\Delta}_{i_1 \ldots i_k \ldots} \in S_\xi$ (тобто $p_{i_j j} > 0 \ \forall j \in N$) і символи його циліндричного зображення збігаються з відповідними символами точки x^*, починаючи з місця $m + 1$, то

$$\mathrm{P}\{\xi = x\} = \prod_{j=1}^{m} p_{i_j j} \prod_{j=m+1}^{\infty} p_{i_j j} = \prod_{j=1}^{m} p_{i_j j} \left[\prod_{j=1}^{m} p_{i_j^* j}\right]^{-1} M > 0,$$

тобто x є атомом розподілу. Обчислимо сумарну масу всіх атомів такого вигляду.

Нехай L_m — множина всіх $x \in E_s$, символи циліндричного зображення яких збігаються з відповідними символами циліндричного зображення точки x^*, починаючи з номера $m + 1$. Тоді $L_m \subset L_{m+1}$ і

$$\mathrm{P}\{\xi \in L_m\} = M\left[\prod_{j=1}^{m} p_{i_j^* j}\right]^{-1}\left(\sum_{i_1\in N}\ldots\sum_{i_m\in N}\prod_{j=1}^{m} p_{i_j j}\right) =$$

$$= M\left[\prod_{j=1}^{m} p_{i_j^* j}\right]^{-1} \to 1, \quad m \to \infty.$$

Звідси

$$P(L) = \lim_{m\to\infty} P(L_m) = 1,$$

де $L = \lim_{m\to\infty} L_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_m$. Отже, розподіл ξ є чисто дискретним і зосередженим на множині L.

Теорема 4. *Якщо* $s = 2$ *і* $M = 0$, *то випадкова величина* ξ *має чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярно неперервний розподіл, до того ж*:

1) *абсолютно неперервний тоді і тільки тоді, коли*

$$V = \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{2^i p_{ik}} > 0; \tag{14}$$

2) *сингулярний тоді і тільки тоді, коли* $V = 0$.

Доведення. Визначимо дві послідовності ймовірнісних просторів $\{(\Omega_k, B_k, \mu_k)\}$ і $\{(\Omega_k, B_k, \nu_k)\}$ таким чином: $\Omega_k = N$, B_k — σ-алгебра всіх підмножин Ω_k, $\mu_k(\{i\}) = p_{ik}$, $\nu_k(\{i\}) = 2^i$, $k \in N$, де p_{ik} — елемент матриці $\|p_{ik}\|$, що визначає розподіл випадкової величини ξ.

Очевидно, що μ_k абсолютно неперервна відносно ν_k при всіх $k \in N$. Розглянемо нескінченні добутки ймовірнісних просторів:

$$(\Omega, B, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, B_k, \mu_k), \qquad (\Omega, B, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, B_k, \nu_k).$$

З теореми Какутані [12] випливає висновок, що μ абсолютно неперервна відносно ν $(\mu \ll \nu)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty}\rho(\mu_k, \nu_k) > 0,$$

де

$$\rho(\mu_k, \nu_k) = \int_{\Omega_k}\sqrt{\frac{d\nu_k}{d\mu_k}}\,d\mu_k$$

є інтегралом Хелінгера. У даному випадку

$$\prod_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega_k}\sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}}\,d\nu_k > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \prod_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{2^i p_{ik}} > 0.$$

Розглянемо вимірне відображення $f : \Omega \to [0, 1]$, визначене рівністю

$$\forall\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots) \in \Omega: \quad f(\omega) = \Delta_{\omega_1,\ldots,\omega_k,\ldots}.$$

Визначимо образи μ^* і ν^* мір μ і ν під дією f таким чином:

$$\mu^*(E) = \mu(f^{-1}(E)),$$

$$\nu^*(E) = \nu(f^{-1}(E))$$

для довільної борелівської підмножини E одиничного відрізка.

Міра μ^* збігається з імовірнісною мірою P_ξ, а міра ν^* — з імовірнісною мірою P_ψ, еквівалентною мірі Лебега λ. З абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν випливає абсолютна неперервність міри μ^* відносно міри ν^*. Оскільки $\nu^* \sim \lambda$, то з умови (14) випливає абсолютна неперервність розподілу ξ.

***Наслідок* 4.** *У випадку однакової розподіленості випадкових величин* τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *тобто коли* $p_{ik} = p_i$ $(\forall k \in N)$, *розподіл* ξ *є*:

1) *дискретним тоді і тільки тоді, коли* $\max_i\{p_i\} = 1$;

2) *абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли* $p_i = 2^{-i}$, $i = 1, 2, \ldots$;

3) *сингулярно неперервним тоді і тільки тоді, коли* $\max_i\{p_i\} < 1$ *та існує* i *таке, що* $p_i \neq 2^{-i}$, *до того ж*:

3.1) *дискретний розподіл* ξ *є виродженим* (*його єдиним атомом з масою* 1 *є точка* $x^* = \bar{\Delta}_{i_0 i_0 \ldots i_0 \ldots}$ *така, що* $\max_i\{p_i\} = p_{i_0}$);

3.2) *абсолютно неперервний розподіл* ξ *є рівномірним розподілом на* $[0, 1]$.

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
2. *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. – Oxford: Clarendon Press, 1995. – 295 p.
3. *Ремез Е. А.* О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, № 5(45). – С. 33 – 44.
4. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Физматгиз, 1978. – 116 с.
5. *Sierpinski W.* O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi. – Warsawa: STNW, 1911. – Vol. 3.
6. *Pierce T. A.* On an algorithm and its use in approximating roots of an algebraic equation // Amer. Math. Monthly. – 1929. – **36**. – P. 523 – 525.
7. *Shallit J. O.* Pierce expansions and rules for the determination of leap years // Fibonacci Quart. – 1994. – **32**, № 5. – P. 416 – 423.
8. *Барановський О. М.* Задання ніде не диференційовних функцій за допомогою представлення чисел рядами Остроградського // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – 1998. – № 2. – С. 215 – 221.
9. *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2004. – № 70. – С. 131 – 144.
10. *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Про міру Лебега деяких множин чисел, визначених властивостями їх розкладу в ряд Остроградського // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 5. – С. 217 – 227.
11. *Працьовита І. М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Там же. – 2006. – № 7. – С. 141 – 156.
12. *Kakutani S.* Equivalence of infinite product measures // Ann. Math. – 1948. – **49**. – P. 214 – 224.

Одержано 01.12.08