УДК 519.4

Н. В. Селезньова (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НІЛЬПОТЕНТНИХ ПІДНАПІВГРУП НАПІВГРУП СТИСКУЮЧИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ БУЛЕАНА

In this paper, we study mathematical models of the structure of nilpotent subsemigroups of the semigroup $PTD(B_n)$ of partial contracting transformations of a Boolean, the semigroup $TD(B_n)$ of full contracting transformations of a Boolean, the inverse semigroup $ISD(B_n)$ of contracting transformations of a Boolean. We propose a convenient graphical representation of the considered semigroups. For each of these semigroups, the uniqueness of its maximal nilpotent subsemigroup is proved. For $PTD(B_n)$ and $TD(B_n)$, the capacity of maximal nilpotent subsemigroup is calculated. For $ISD(B_n)$, estimates of the capacity of maximal nilpotent subsemigroup are obtained and this capacity is calculated for small n. For all considered semigroups, we describe the structure of nil-elements and maximal nilpotent subsemigroups of nilpotency degree k and calculate the number of such elements and subsemigroups for some special cases.

Работа посвящена математическому моделированию структуры нильпотентных подполугрупп полугруппы $PTD(B_n)$ сжимающих частичных преобразований булеана, полугруппы $TD(B_n)$ сжимающих полных преобразований булеана, инверсной полугруппы $ISD(B_n)$ сжимающих преобразований булеана. Введено удобное графическое изображение рассмотренных полугрупп; для каждой из них доказана единственность максимальной нильпотентной подполугруппы, для $PTD(B_n)$ и $TD(B_n)$ вычислена ее мощность, для $ISD(B_n)$ построены оценки мощности максимальной нильпотентной подполугруппы и вычислена ее мощность для малых n. Для всех указанных полугрупп описана структура нильэлементов и максимальных нильпотентных подполугрупп класса нильпотентности k, найдено количество элементов и подполугрупп для некоторых частных случаев.

1. Основні поняття. Нехай S — напівгрупа з нульовим елементом 0. S називається *нільпотентною*, якщо існує таке число k, що $S^k = \{0\}$. Мінімальне таке k називається класом нільпотентності напівгрупи S. Множина всіх нільпотентних піднапівгруп S є частково впорядкованою за включенням, максимальні елементи цієї множини називаються *максимальними нільпотентними піднапівгрупами* S [1, 2].

Крім загальних нільпотентних піднапівгруп розглядають також нільпотентні піднапівгрупи фіксованого класу нільпотентності. Множина таких піднапівгруп також є частково впорядкованою, а отже, можна говорити про *максимальні нільпотентні піднапівгрупи класу нільпотентності* k. Для подальшого викладу нам потрібні наступні твердження [3].

Твердження 1. *Нехай S — скінченна напівгрупа. Тоді наступні твердження еквівалентні*:

1) *S є нільпотентною*;
2) *кожен елемент $a \in S$ є нільпотентним*;
3) *єдиним ідемпотентом S є нульовий елемент.*

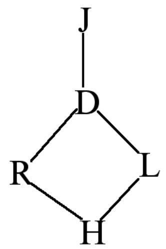
Зауважимо, що твердження 1 у випадку нескінченної напівгрупи не завжди виконується. Розглянемо, наприклад, напівгрупу $T = \{(n, m) \mid n,\ m \in N,\ 0 < n < m\} \cup \{0\}$ із множенням $(n,m)(k,l) = \begin{cases} (n,l), & \text{якщо } m = k, \\ 0, & \text{якщо } m \neq k. \end{cases}$ Легко бачити, що кожен елемент напівгрупи T — нільелемент класу нільпотентності 2, але сама напівгрупа T не є нільпотентною.

Відношення Гріна [4] на напівгрупі S означаються таким чином:

$$aRb \Leftrightarrow aS^1 = bS^1, \quad aLb \Leftrightarrow S^1a = S^1b, \quad aJb \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1,$$

$$H = R \bigcap L, \quad D = R \vee L,$$

R та L є лівою та правою конгруенціями, решта відношень — відношеннями еквівалентності. Наступна діаграма відображає систему включень між ними:



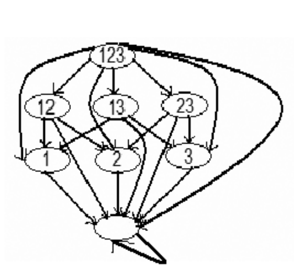
.

Твердження 2. *Відношення Гріна на скінченній нільпотентній напівгрупі є тривіальними, тобто збігаються з відношенням рівності.*

Нехай M — скінченна множина. Розглянемо множину її перетворень, тобто відображень M у себе (не обов'язково визначених на всій множині, тобто деякі точки M можуть нікуди не переходити). На одержаній множині перетворень означимо множення таким чином: якщо перетворення f відображає точку i в точку j, а перетворення g — точку j в точку k, то перетворення fg відображає точку i в точку k. Асоціативність дії очевидна, отже, маємо напівгрупу. Така напівгрупа називається *напівгрупою перетворень множини M*.

Візьмемо множину $\{1, \ldots, n\}$ (тобто всі натуральні числа від 1 до n) і розглянемо напівгрупу перетворень її булеана (*булеаном* множини називають множину всіх її підмножин, для множини $\{1, \ldots, n\}$ позначатимемо його B_n). Серед одержаних перетворень виділимо *напівгрупу стискаючих перетворень*, тобто таких ϕ, що $A \in \operatorname{dom}\phi \Rightarrow \phi(A) \subseteq A$. В ній виділимо три піднапівгрупи: напівгрупу часткових перетворень $PTD(B_n)$, напівгрупу перетворень $TD(B_n)$ (кожна точка обов'язково переходить в іншу або в себе, тобто перетворення є визначеним на всій множині) і напівгрупу інверсних перетворень $ISD(B_n)$ (піднапівгрупа $PTD(B_n)$, що характеризується умовою ін'єктивності, тобто в кожну точку може перейти не більше однієї точки). Саме ці три напівгрупи будемо досліджувати в даній роботі.

Розглянемо детальніше структуру цих напівгруп. У напівгрупах $PTD(B_n)$ і $ISD(B_n)$ нулем є ніде не визначене перетворення, у $TD(B_n)$ нулем є перетворення, яке кожну множину переводить у $\varnothing$. Далі будемо використовувати таке графічне зображення елемента: елементи булеана зображуємо вершинами графа, переходи — стрілками, причому при проведенні стрілок враховуємо обмеження даної напівгрупи.



.

Наведений рисунок ілюструє можливі переходи для $n = 3$. (Зауважимо, що при виборі конкретного елемента з однієї точки виходить не більше однієї стрілки.) В залежності від того, яка саме напівгрупа розглядається, додаються також умови, що зводяться до належності такого елемента до даної напівгрупи. Так, для $ISD(B_n)$ слід також вимагати ін'єктивність (ін'єктивність у графічному зображенні полягає в тому, що в кожну точку має входити не більше однієї стрілки); для $TD(B_n)$ потрібно вимагати, щоб кожне перетворення було визначеним на всьому булеані, тобто щоб кожна точка переходила або в себе, або в підмножину; для $PTD(B_n)$ додаткових умов немає. Отже, можна сформулювати та довести наступні твердження.

Твердження 3. *У напівгрупах* $PTD(B_n)$ *та* $ISD(B_n)$ *нільелементами є ті і лише ті перетворення, які жодну точку (елемент булеана) не переводять саму в себе.*

Доведення. Очевидно, що нільелемент не може переводити точку булеана саму в себе, тому що при піднесенні до довільного степеня ця петля збережеться.

Отже, залишилось показати, що описані елементи дійсно є нільелементами.

Це так завдяки тому, що якщо жодна точка не переходить у себе, то вона переходить у свою підмножину, яка в свою чергу також переходить у свою підмножину, і так далі, а оскільки ланцюг підмножин є скінченним, то в якомусь степені отримаємо ніде не визначене перетворення.

Твердження 4. *У напівгрупі* $TD(B_n)$ *нільелементами є ті і лише ті перетворення, які жодну точку (елемент булеана), крім точки „порожня множина" (позначаємо* $\varnothing$*), не переводять саму в себе.*

Доведення. Очевидно, що нільелемент не може переводити точку булеана саму в себе (якщо це не $\varnothing$), оскільки при піднесенні до довільного степеня ця петля збережеться.

Отже, залишилось показати, що описані елементи дійсно є нільелементами.

Це так тому, що якщо жодна точка не переходить у себе, то вона переходить у свою підмножину, яка в свою чергу також переходить у свою підмножину, а ланцюг підмножин є скінченним, отже, в якомусь степені одержимо перехід точки в $\varnothing$, і так для всіх точок перетворення.

У графічному зображенні вершини зручно розміщати рівнями — від нульового до n-го (зверху вниз). Тоді для нільелементів стрілки можуть бути направлені лише вниз по рівнях (з урахуванням того, що вершина може переходити лише у таку вершину, яка відповідає її підмножині).

2. Максимальні нільпотентні піднапівгрупи.

Твердження 5. *У напівгрупах* $PTD(B_n)$, $TD(B_n)$ *та* $ISD(B_n)$ *максимальна нільпотентна піднапівгрупа є єдиною, складається із всіх нільелементів відповідної напівгрупи і має порядок нільпотентності* $n+1$ *для* $PTD(B_n)$ *і* $ISD(B_n)$ *та* n *для* $TD(B_n)$.

Доведення. Не нільпотентний елемент до максимальної нільпотентної піднапівгрупи належати не може.

Максимальна нільпотентна піднапівгрупа в даному випадку є єдиною, тому що для всіх наведених напівгруп множини нільелементів утворюють напівгрупу.

Скористаємося твердженнями 3 та 4, які дають характеризацію нільелементів. Очевидно, що описані властивості при множенні зберігаються.

Залишилося визначити порядок. У кожній із розглянутих напівгруп елемент, що дорівнює добутку двох нільелементів, не може містити переходів у точки першого рівня, інакше перший співмножник мав би містити перехід у точку нульового рівня, а для нільелементів це неможливо; точка i-го рівня може переходити в точку $(i+2)$-го рівня або нижче (за винятком переходу в $\varnothing$

для $TD(B_n)$ за рахунок того, що в нільелементів цієї напівгрупи є петля $\varnothing \to \to \varnothing$).

Аналогічно добуток трьох нільелементів не може містити переходів у точки першого та другого рівнів, водночас точка i-го рівня може переходити в точку $(i+3)$-го рівня або нижче (за винятком переходу в $\varnothing$ для $TD(B_n)$).

Продовжуючи ці міркування, переконуємося, що добуток n нільелементів не може містити переходів у точки рівня, меншого за n, до того ж для $PTD(B_n)$ та $ISD(B_n)$ жодна точка не може перейти ні на один рівень (крім точки $\{1,\ldots,n\}$, яка може перейти лише в $\varnothing$), а для $TD(B_n)$ єдиним дозволеним переходом є перехід в $\varnothing$. Для $PTD(B_n)$ та $ISD(B_n)$ це означає, що в результаті добутку $n+1$ елементів маємо ніде не визначене перетворення, тобто нуль напівгрупи; для $TD(B_n)$ в результаті добутку n елементів маємо перехід всіх точок в $\varnothing$, тобто нуль напівгрупи $TD(B_n)$.

Меншим степінь нільпотентності максимальної нільпотентної піднапівгрупи бути не може, тому що у $PTD(B_n)$ та $ISD(B_n)$ існує елемент степеня $n+1$, це, наприклад, ланцюг $\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n-1\} \to \ldots \to \{1\} \to \varnothing$, а в $TD(B_n)$ — елемент степеня n, цей же ланцюг, доповнений переходами в $\varnothing$ всіх незадіяних точок.

Твердження 6. *Максимальна нільпотентна піднапівгрупа* $PTD(B_n)$ *містить рівно* $2^{n\cdot 2^{n-1}}$ *елементів.*

Доведення. Всього маємо 2^n вершин, деякі з них потрібно з'єднати ребрами, врахувавши обмеження на структуру напівгрупи.

Для вершини нульового рівня, що містить n елементів, є всього 2^n варіантів : $2^n - 1$ варіант переходу в іншу вершину та один варіант, коли вона нікуди не переходить.

Вершин першого рівня (тобто тих, що містять по $(n-1)$-му елементу $\{1,\ldots$ $\ldots, n\}$ кожна) всього $\binom{n}{1}$ і для кожної є $2^{n-1}-1$ варіант переходу в іншу вершину та один варіант не перейти нікуди, всього 2^{n-1} варіантів.

Міркуючи аналогічно для вершин k-го рівня, тобто тих, що містять $n-k$ елементів (при такій нумерації „першу” вершину слід називати вершиною нульового рівня), знаходимо точно $\binom{n}{k}$ вершин, для кожної з яких є 2^{n-k} варіантів. Для останнього, n-го, рівня існує одна вершина, що містить 0 елементів (тобто $\varnothing$) і має точно $2^{n-n}=1$ варіант нікуди не переходити. Для кожної вершини перехід обирався незалежно, отже, за правилом комбінаторного множення залишається перемножити одержані результати. Маємо

$$2^{n\binom{n}{0}} \cdot 2^{(n-1)\binom{n}{1}} \ldots 2^{(n-n)\binom{n}{n}} = 2^{\sum_{i=0}^{n}(n-i)\binom{n}{i}} = 2^{n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}} = 2^{n\cdot 2^{n-1}}.$$

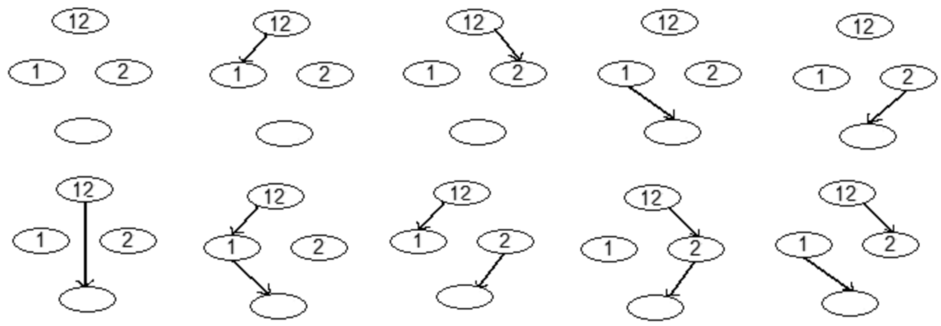
Твердження доведено.

Твердження 7. *Максимальна нільпотентна піднапівгрупа* $TD(B_n)$ *містить точно* $\prod_{k=0}^{n}\left(2^{n-k}-1\right)^{\binom{n}{k}}$ *елементів.*

Доведення аналогічне доведенню попереднього твердження, але на кожному кроці необхідно вилучити варіант „нікуди не переходить”. Тому на k-му рівні маємо $\binom{n}{k}$ вершин, для кожної з яких є $2^{n-k}-1$ варіант, і остаточна формула набирає вигляду $\prod_{k=0}^{n}\left(2^{n-k}-1\right)^{\binom{n}{k}}$.

У випадку напівгрупи $ISD(B_n)$ ситуація дещо складніша, тому що через ін'єктивність вибір переходів для кожної вершини вже не є незалежним. Для того щоб виконати обчислення хоча б для малих n, було написано програму на Delphy на основі алгоритму перебору з поверненнями. Але через досить різкий ріст потужності нільпотентної піднапівгрупи при зростанні n програмний підхід не є ефективним.

Так, при $n=1$ маємо 2 нільелементи: 0 (тобто ніде не визначене перетворення) та $\{1\}\to\varnothing$. При $n=2$ таких елементів 10:



При $n=3$ таких елементів 540 (із зрозумілих причин список не наводиться), а при $n=4$ їх 6687168.

Алгоритм підрахунку елементів є перебором з поверненнями. Вершини графа (елементи булеана) нумеруються від 0 до 2^n-1, причому відтворити саму підмножину за номером досить просто — це така підмножина $\{1,\ldots,n\}$, до якої входять ті числа, що відповідають позиціям одиниць у двійковому записі номера вершини. Отже, можна не зберігати набір вершин графа у масиві, що значно спрощує роботу програми.

Спочатку створюється масив допустимих переходів — це двовимірний масив розмірності $2^n\times 2^n$. На (i,j)-му місці стоїть 1, якщо вершина i може перейти в вершину j, і 0, якщо не може.

Далі цей масив копіюється в поточний масив і запускається основний цикл: генерація елемента по поточному масиву, його вивід на екран (і додавання одиниці до загальної підрахованої кількості), зміна поточного масиву („крок назад" для $i=1$).

Генерація елемента по поточному масиву відбувається таким чином: вибираємо із можливих варіантів переходу для 2^n-1 вершини (відповідає множині $\{1,\ldots,n\}$). Далі помічаємо для всіх інших вершин факт неможливості перейти туди ж (для того, щоб виконувалась ін'єктивність). Повторюємо цю послідовність (вибір і ін'єктивність) для всіх вершин. Якщо для якоїсь вершини варіантів немає, вона помічається як така, що нікуди не переходить.

Крок назад відбувається таким чином: розглядаємо вершину під номером i. Якщо вона кудись переходила, то помічаємо цей перехід як відпрацьований і, звіряючись з масивом допустимих переходів (згенерованим на початку роботи програми), помічаємо всі можливі переходи в ту вершину, куди переходила i, як знову допустимі, а також прибираємо всі помітки про відпрацьованість варіантів для тих вершин, чий номер менший за i. Якщо ж i-та вершина нікуди не переходила (це означає, що всі можливі варіанти для неї за умови даного вибору вершин з номерами, більшими за i, відпрацьовано), то робимо крок назад для вершини з номером $i+1$.

Програма завершує роботу при необхідності зробити крок назад з вершини з номером $2^n - 1$, і останній елемент, згенерований програмою, — ніде не визначене відношення.

Здавалось би, більш очевидний шлях збереження елемента у вигляді одновимірного масиву роботу програми не пришвидшує, оскільки виникає необхідність у додаткових перевірках ін'єктивності.

Можна оцінити шукану потужність зверху та знизу. Оцінити зверху можна хоча б потужністю $PTD(B_n)$.

Побудуємо інший варіант оцінки.

Доповнимо частковий порядок на булеані до лінійного (наприклад, ввівши додатково лінійний порядок на кожному рівні). Тоді маємо 2^n точок і розглядаємо ін'єктивні часткові перетворення. Множення перетворень є стандартним. Тоді маємо напівгрупу IS_{2^n}; $ISD(B_n)$ є піднапівгрупою такої напівгрупи.

Нулі напівгруп збігаються, а отже, збігаються і поняття нільпотентності.

Твердження 8. *Для кожного ідемпотента* $e \in E(IS_m)$ *такого, що* $\operatorname{def}(e) = k$, *напівгрупа* IS_m *містить точно* $k!$ *максимальних нільпотентних піднапівгруп, що містять* e (*і таких, що* e *є нульовим елементом*). *Всі такі нільпотентні піднапівгрупи є ізоморфними, їхній степінь нільпотентності дорівнює* k, *а потужність дорівнює* k*-му числу Бела* Bl_k.

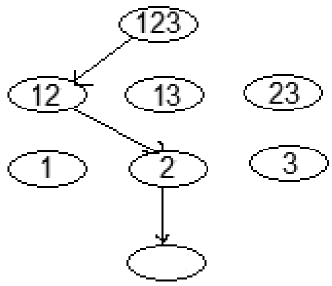
Зауважимо, що для чисел Бела [5], як правило, використовується позначення B_k, але тут їх позначаємо інакше, щоб не плутати з булеаном.

У даному випадку нас цікавить максимальна нільпотентна піднапівгрупа з ідемпотентом 0, тобто ніде не визначеним перетворенням. Дефект такого перетворення у даному випадку дорівнює 2^n.

Отже, шукана оцінка матиме вигляд

$$\mathrm{Bl}_{2^n} = \sum_{k=0}^{2^n} S\left(2^n, k\right) = \sum_{k=0}^{2^n} \left(\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \right).$$

Оцінити знизу можна підрахувавши кількість „одноланцюгових" нільелементів $IS(B_n)$, тобто таких, що складаються з одного ланцюга (див. рисунок).



Щоб одержати ланцюг довжини n, потрібно на кожному рівні вибрати одну із допустимих точок.

На нульовому рівні вибір однозначний, оскільки на ньому всього одна точка.

На першому рівні можна вибрати одну із n точок. Після такого вибору на другому рівні можна вибрати одну із $n-1$ точки (щоб можна було у неї перейти), на третьому рівні — вже одну з $n-2$ точок і т. д. На n-му рівні, що відповідає одноточковим множинам, вибір знову однозначний — $\varnothing$. Отже, маємо всього $n!$ ланцюгів довжини n.

Далі розглянемо такі елементи, які можна отримати із ланцюгів довжини n, викресливши i-й рівень і замінивши відповідний перехід через точку прямим ребром (по черзі для всіх i від 1 до n; для першого та останнього рівнів це стирання відповідного ребра) . Оскільки на кожному кроці ми отримуємо один і той же елемент i разів (тому що в кожну точку $(i+1)$-го рівня можна прийти із i точок i-го рівня), їх буде точно $\sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{i}+n!$ (останній доданок відповідає викресленню точки $\varnothing$). Якщо викреслити рівні i та j, то будемо мати $\frac{n!}{ij}$ елементів, якщо $i, j < n+1$, та $\frac{n!}{i}$, якщо викреслено $\varnothing$. Відповідно при викреслюванні k рівнів маємо

$$\sum_{\substack{j_1\ldots j_k\in\{1,\ldots,n\}\\ j_t\neq j_r}}\frac{n!}{j_1\cdots j_k}+\sum_{\substack{j_1\ldots j_{k-1}\in\{1,\ldots,n\}\\ j_t\neq j_r}}\frac{n!}{j_1\cdots j_{k-1}}$$

елементів. Остаточно отримуємо

$$n!+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{\substack{j_1\ldots j_k\in\{1,\ldots,n\}\\ j_t\neq j_r}}\frac{n!}{j_1\cdots j_k}+\sum_{\substack{j_1\ldots j_{k-1}\in\{1,\ldots,n\}\\ j_t\neq j_r}}\frac{n!}{j_1\cdots j_{k-1}}\right)$$

елементів.

При $n=2$ маємо 7 елементів, при $n=3$ — 40, при $n=4$ — 224.

3. Нільпотентність класу *k*. Нільелементи класу k у даних напівгрупах описуються однаково — це такі нільелементи напівгрупи, у графічному зображенні яких максимальний ланцюг має довжину точно k, за винятком петлі на $\varnothing$ для $TD(B_n)$ (тобто з якої б точки ми не почали рухатись по стрілках, нам не вдасться зробити більше ніж k переходів, і існує хоча б одна точка, з якої починається шлях довжиною точно k стрілок).

Твердження 9. *У напівгрупах $PTD(B_n)$ та $ISD(B_n)$ кожна максимальна нільпотентна піднапівгрупа класу k задає розбиття B_n на k підмножин $M_0,\ldots,M_{k-1}$ таке, що для будь-яких i, j, $j<i$, $A\in M_i$, існує $B\in M_j$ таке, що $A\subset B$, тобто для будь-яких двох класів і для будь-якої множини класу з більшим номером знайдеться така множина з класу з меншим номером, що може перейти в неї. Кожному такому розбиттю відповідає максимальна нільпотентна піднапівгрупа класу нільпотентності k.*

Доведення. Зауважимо, що при таких розбиттях точка $\{1,2,\ldots,n\}$ завжди належить до M_0, а точка $\varnothing$ — до M_k.

Відповідність така: вершини можуть переходити лише в наступну за порядком множину, тобто якщо $a\in M_i$, то переходити вона може лише в точки M_j, $j>i$. Очевидно, що всі елементи, побудовані за цим правилом (враховуючи обмеження напівгрупи, тобто перехід точки лише у свою підмножину та ін'єктивність для $IS(B_n)$), утворюють напівгрупу.

Розбиття за піднапівгрупою будується з часткового порядку, заданого цією піднапівгрупою. Оскільки піднапівгрупа максимальна, то ізольованих точок немає. Маємо саме k множин, тому що степінь нільпотентності піднапівгрупи k. Якби було більше множин, то можна було б побудувати елемент степеня нільпотентності більшого ніж k. Якби множин було менше, то степінь нільпотентності піднапівгрупи був би меншим. Справді, при множенні будь-яких двох елементів таким чином побудованої напівгрупи у елемента-добутку вже не буде переходів у клас M_1 (хоча б тому, що переходів у клас M_0 немає ні в одного елемента піднапівгрупи). Аналогічно при множенні будь-яких трьох елементів не буде переходів ні в M_1, ні в M_2 і т. д.

Залишилось довести максимальність піднапівгрупи, побудованої за розбиттям, у класі нільпотентних піднапівгруп степеня нільпотентності k. Нехай даному розбиттю $M_0, \ldots, M_{k-1}$ відповідає піднапівгрупа S_1 степеня нільпотентності k і існує нільпотентна піднапівгрупа S_2 степеня нільпотентності k така, що $S_1 \subset S_2$. Нехай їй відповідає розбиття $N_0, \ldots, N_{k-1}$. Оскільки S_1 — піднапівгрупа, то для будь-якого i $M_i \subseteq N_i$. Завдяки скінченності B_n дані розбиття, а отже, і відповідні напівгрупи збігаються.

Твердження 10. *У напівгрупі $TD(B_n)$ кожна максимальна нільпотентна піднапівгрупа класу k задає розбиття B_n на k підмножин $M_0, \ldots, M_{k-1}$ таке, що для будь-яких i, j, $j < i$, $A \in M_i$ існує $B \in M_j$ таке, що $A \subset B$, тобто для будь-яких двох фіксованих класів і будь-якої множини класу з більшим номером знайдеться така множина з другого класу (з меншим номером), яка може перейти в неї; до того ж множина M_{k-1} складалася не лише з $\varnothing$.*

Кожному такому розбиттю відповідає максимальна нільпотентна піднапівгрупа класу нільпотентності k.

Доведення аналогічне доведенню твердження 9. Відмінність полягає в тому, що крім переходів між класами кожна точка може перейти в $\varnothing$. Саме з цим пов'язано вимогу, щоб останній клас містив ще хоча б одну точку, інакше фактично одержимо нільпотентну піднапівгрупу степеня нільпотентності $k-1$.

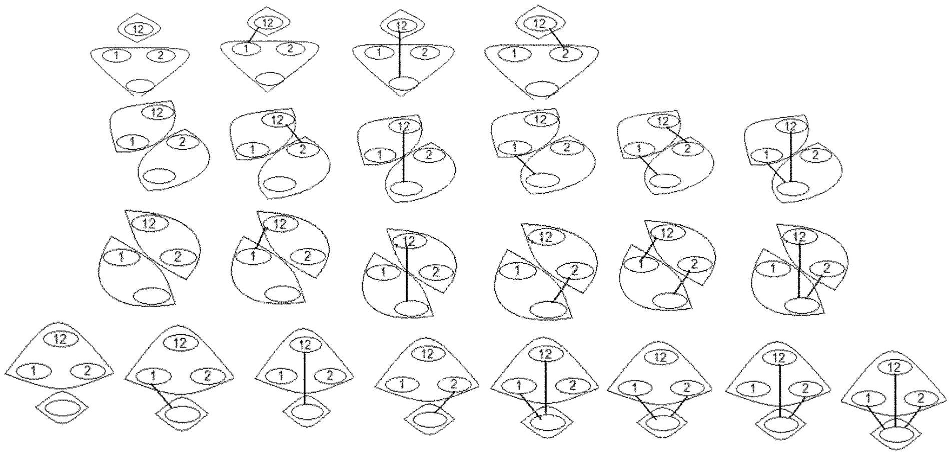
4. Максимальні нільпотентні піднапівгрупи малих степенів. Як показано у попередньому пункті, кожній максимальній нільпотентній піднапівгрупі досліджуваних напівгруп відповідає розбиття булеана спеціального вигляду. В загальному випадку задача підрахунку кількості таких розбиттів, а також потужності відповідних піднапівгруп є досить складною, але для деяких часткових випадків можна навести такі результати.

Найпростішим є випадок $k = 2$, тобто нільпотентні піднапівгрупи з 0-множенням. У цьому випадку для $PTD(B_n)$ та $ISD(B_n)$ можна брати довільні розбиття булеана на дві множини такі, що вершина $\{1, \ldots, n\}$ належить до M_0, а вершина $\varnothing$ — до M_1. Всього таких розбиттів (а відповідно і максимальних нільпотентних піднапівгруп) буде 2^{2^n-2} (кожна точка булеана, крім двох фіксованих вище, переходить незалежно в одну із множин). Зрозуміло, що потужність відповідної піднапівгрупи залежить від розбиття, причому не тільки від потужностей відповідних підмножин, а і від того, які конкретно точки потрапили у кожну із множин даного розбиття.

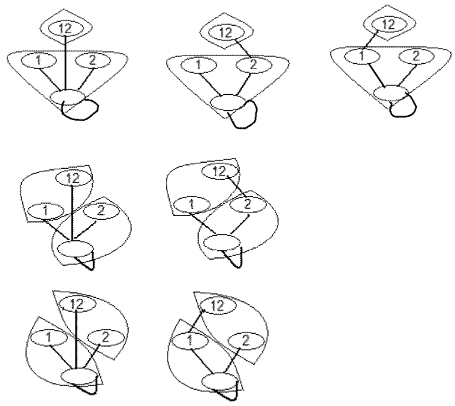
Для $TD(B_n)$ міркування такі самі, але один варіант (той, коли M_1 складається лише з $\varnothing$) необхідно відкинути. Таким чином, маємо $2^{2^n-2}-1$ піднапівгрупу.

Для прикладу розпишемо такі розбиття і відповідні елементи при $n = 2$:

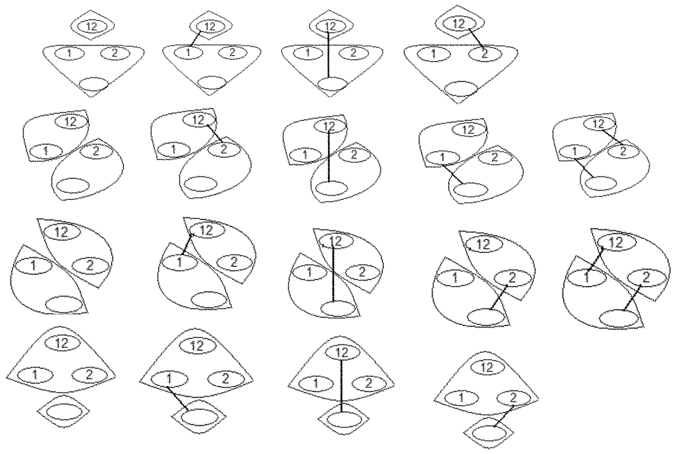
$PTD(B_n)$:



$TD(B_n)$:



$ISD(B_n)$:



Випадок $k = 3$ також є простим: множина M_0 містить множину $\{1, \ldots, n\}$, множина M_2 містить $\varnothing$, а якщо маємо $TD(B_n)$, то множина M_2 містить ще хоча б одну точку. Тоді на множину M_1 обмежень немає. Відповідно для

$PTD(B_n)$ і $ISD(B_n)$ маємо по 3^{2^n-2} нільпотентних піднапівгруп класу нільпотентності 3, для $TD(B_n)$ — $3^{2^n-2} - 2^{2^n-2}$ (відкидаємо ті піднапівгрупи, що відповідають таким розбиттям, в яких M_2 складається лише з $\varnothing$).

Для більших k ситуація ускладнюється — потрібно відслідковувати виконання основної умови на класи розбиття, тобто можливість переходу в точку, що належить класу з більшим номером.

У випадку $k = n + 1$ для напівгруп $PTD(B_n)$ і $ISD(B_n)$ ситуація знову спрощується — тут таке розбиття єдине, а саме, розбиття за рівнями. Для $k = n$ і $TD(B_n)$ ситуація цілком аналогічна, розбиття відбувається за рівнями, а до M_{k-1} належить і передостанній рівень, і $\varnothing$. У цих випадках одержуємо максимальну нільпотентну піднапівгрупу відповідної напівгрупи.

1. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. – М.: Мир, 1972. – Т 1. – 283 с.
2. *Селезньова Н. В.* Зв'язок між нільпотентністю в B_N і ациклічними графами // Дванадцята міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (15 – 17 травня 2008 р.). – Київ, 2008. – Ч. 1. – С. 783.
3. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* On classification of maximal nilpotent subsemigroups. – 2005. – 16 p. – Preprint № 37, Uppsala Univ.
4. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. – М.: Мир, 1985. – 440 с.
5. *Ganyushkin O., Mazorchuk V.* Combinatorics of nilpotents in IS_n // Ann. Combinat. – 2004. – **8**. – P. 161 – 175.

Одержано 26.08.08,
після доопрацювання — 03.04.09