УДК 517.5

А. Н. Адамов (Одес. нац. ун-т, Ин-т математики, экономики и механики)

НЕРАВЕНСТВО ТИПА ТУРАНА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И СОПРЯЖЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В L_0

We study inequalities of a Turan type for trigonometric and conjugate trigonometric polynomials in the quasinorm L_0 and derivatives of any order. We present expressions for constants in these inequalities and obtain their double-sided estimates.

Розглянуто нерівності типу Турана для тригонометричних і спряжених тригонометричних поліномів у квазінормі L_0 та похідних будь-якого порядку. Наведено вирази для констант у цих нерівностях і отримано їх двосторонні оцінки.

0. Введение и формулировка основного результата. Пусть T_n — множество тригонометрических полиномов

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$$

порядка n с коэффициентами a_k из поля C комплексных чисел, а T_n' — подмножество полиномов из T_n, у которых свободный член равен 0. Полином

$$\tilde{T}_n(t) = i\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt} - \sum_{k=1}^{n} a_{-k} e^{-ikt}\right)$$

называют сопряженным для T_n. Определим функционал $\|f\|_p$ на отрезке $[0, 2\pi]$ при $0 \le p \le \infty$ следующим образом:

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \quad 0 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_0 = \lim_{p\to+0}\|f\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(t)|\,dt\right), \tag{0.1}$$

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty}\|f\|_p = \|f\|_C = \max\{|f(t)|:\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

Известны классические неравенства типа С. Н. Бернштейна и Г. Сеге

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_p \le n^r\|T_n\|_p, \quad T_n \in U_n, \quad 0 \le p \le \infty, \tag{0.2}$$

$$\left\|\tilde{T}_n^{(r)}\right\|_p \le n^r\|T_n\|_p, \quad T_n \in U_n, \quad 1 \le p < \infty. \tag{0.3}$$

Сначала были получены неравенства в случае равномерной метрики $\|\cdot\|_\infty$ С. Н. Бернштейном [1] для тригонометрических полиномов и Г. Сеге [2] для сопряженных тригонометрических полиномов. На нормы $\|\cdot\|_p$, $1 \le p < \infty$, неравенства (0.2) и (0.3) распространил А. Зигмунд [3, т. 2] (гл. X, (3.25)). Метод Зигмунда при $0 < p < 1$ (тригонометрическая интерполяция) использовали В. И. Иванов [4] и Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд [5], но в неравенствах типа (0.2) появилась дополнительная константа, зависящая от p. В 1981 г. В. В. Арестов [6] предложил новый метод доказательства неравенства (0.2) для любого $0 \le p < 1$, а также его аналога в классах $\varphi(L)$.

В случае сопряженных полиномов при $0 \le p < 1$ уже нельзя перенести неравенство (0.3) с той же константой для любого r. В работе [7] доказано, что

$$\left\|\tilde{T}_n^{(r)}\right\|_p \le \chi_p(n,r)\left\|T_n\right\|_p, \qquad T_n \in U_n, \quad 0 \le p < 1, \quad r \ge 0,$$

где

$$\chi_p(n,r) \le \chi_0(n,r), \qquad \frac{1}{n} C_{2n}^{n+1} \le \chi_0(n,0) \le 2C_{2n}^{n+1}.$$

Оценки снизу норм производных полинома через норму самого полинома, т. е. неравенства, противоположные (0.2), впервые рассмотрены Тураном в работе [8]. С тех пор получено много результатов в этом направлении, в монографии [9] они систематизированы. Эти неравенства выполняются при сильных ограничениях на расположение нулей функций, например в тригонометрическом случае все нули должны находиться на действительной оси. Поскольку в данной работе речь идет о пространстве L_0 и на полиномы накладываются ограничения другого вида, окончательные оценки сложно сравнивать.

Неравенство типа Турана для $p = 0$ впервые было рассмотрено Э. А. Стороженко в работе [10], а в работе [11] получено следующее неравенство для тригонометрических полиномов со свободным членом, равным 0:

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_0 \ge \frac{1}{2\,C_{2n}^{n+1}}\left\|T_n\right\|_0, \quad T_n \in \mathrm{T}_n', \quad r \ge 1. \tag{0.4}$$

Главной целью настоящей работы является уточнение константы в неравенстве (0.4) и получение аналога для произвольных сопряженных полиномов.

Теорема. *Для любого* $n \ge 1$ *имеют место неравенства*

$$\begin{gathered}\left\|T_n^{(r)}\right\|_0 \ge \frac{1}{\left\|D_{n,r}\right\|_0}\left\|T_n\right\|_0, \quad r \ge 1, \\ \left\|\tilde{T}_n^{(r)}\right\|_0 \ge \frac{1}{\left\|S_{n,r}\right\|_0}\left\|T_n\right\|_0, \quad r \ge 0, \quad T_n \in \mathrm{T}_n',\end{gathered} \tag{0.5}$$

где

$$D_{n,r}(z) = \sum_{k=0,\, k\ne n}^{2n} \frac{C_{2n}^k z^k}{(k-n)^r}, \qquad S_{n,r}(z) = \sum_{k=0,\, k\ne n}^{2n} \operatorname{sign}(k-n)\frac{C_{2n}^k z^k}{(k-n)^r} \tag{0.6}$$

и при $r \ge 3$

$$0,458\, C_{2n}^{n+1} \le \left\|D_{n,r}\right\|_0 \le 1,052\, C_{2n}^{n+1}, \tag{0.7}$$

$$0,596\, C_{2n}^{n+1} \;\le\; \left\| S_{n,r} \right\|_0 \;\le\; 1,208\, C_{2n}^{n+1}. \tag{0.8}$$

1. Вспомогательные результаты. Пусть P_n — множество алгебраических многочленов P_n степени n с комплексными коэффициентами, которые удобно записывать в виде

$$P_n(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_n^k c_k z^k\,. \tag{1.1}$$

Многочленам

$$\Lambda_n(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_k z^k$$

и (1.1), следуя В. В. Арестову, сопоставим многочлен

$$\Lambda_n P_n(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_k c_k z^k\,,$$

называемый композицией Сеге многочленов P_n и Λ_n (см. [12], теорема II, раздел V).

Исходя из (0.1) определим при $0 \le p \le \infty$ функционал $\|\cdot\|_p$ на единичной окружности $|z| = 1$, положив $\|f(z)\|_p = \left\| f(e^{it}) \right\|_p$.

Отметим простейшие свойства квазинормы L_0, которые будем использовать в дальнейшем:

1) мультипликативность

$$\forall f,\, g \in L_0 : \left\| f \cdot g \right\|_0 \;=\; \left\| f \right\|_0 \left\| g \right\|_0, \tag{1.2}$$

2) оценка сверху и снизу

$$\operatorname{ess} \inf_{0 \le t \le 2\pi} f(t) \;\le\; \left\| f \right\|_0 \;\le\; \left\| f \right\|_\infty \;=\; \operatorname{ess} \sup_{0 \le t \le 2\pi} f(t). \tag{1.3}$$

Теорема A [13]. *Для любого* $0 \le p \le \infty$ *и любых двух многочленов* Λ_n, $P_n(z) \in \mathrm{P}_n$ *имеет место неравенство*

$$\left\| \Lambda_n P_n \right\|_p \;\le\; \left\| \Lambda_n \right\|_0 \left\| P_n \right\|_p.$$

Лемма. *Если коэффициенты* a_k *многочленов*

$$Q_n(z) \;=\; a_0 z^n \;+\; \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2} (z^{n+k} + z^{n-k})$$

и

$$\tilde{Q}_n(z) \;=\; i a_0 z^n \;+\; \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2} (z^{n+k} - z^{n-k})$$

вещественны, неотрицательны и для некоторого $0 \le k < n$ *удовлетворяют условиям* $a_k \ge \ldots \ge a_n$ *и* $a_0 = \ldots = a_{k-1} = 0$, *то*

$$\|Q_n\|_0 \le \sup_{0\le j\le n} a_j, \qquad \|\tilde{Q}_n\|_0 \le \sup_{0\le j\le n} a_j. \tag{1.4}$$

Для $\tilde{Q}_n(z)$ и $a_0 = 0$ лемма доказана В. В. Арестовым [7] (лемма 3), в общем случае доказательство аналогично.

Напомним определение дзета-функции Римана $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ и смещенной дзета-функции Римана $\zeta(x, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^x}$. Легко видеть, что функции определены на $x > 1$ и монотонно убывают на этом множестве. Использовав эти обозначения, приведем сумму некоторых рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^r} = (1-2^{-r})\zeta(r), \quad r > 1,$$

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)}{(2k+1)^r} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k)^r} = 2(1-2^{-r})\zeta(r) - \zeta(r-1), \quad r > 2, \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^r} - 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)^r} - 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)^r} =$$

$$= (1-2^{1-r})(1-2^{-r})\zeta(r) - 2^{2-2r}\zeta\left(r, \frac{3}{4}\right), \quad r > 1.$$

2. Доказательство основной теоремы. Сопоставим тригонометрическому полиному $T_n \in \mathrm{T}_n$ алгебраический многочлен

$$P_{2n} = \tau_n(T_n) = \sum_{k=-n}^{n} a_k z^{n+k} \in \mathrm{P}_{2n}.$$

Легко видеть, что если $T_n \in \mathrm{T}_n'$, то

$$T_n(t) = e^{-\mathrm{int}}(\tau_n T_n)(e^{it}), \qquad T_n(t) = i^r e^{-\mathrm{int}}\left(D_{2n,r}\tau_n T_n^{(r)}\right)(e^{it})$$

и

$$T_n(t) = i^{r+1} e^{-\mathrm{int}}\left(S_{2n,r}\tau_n \tilde{T}_n^{(r)}\right)(e^{it}).$$

Применяя теорему A, получаем (0.5) и (0.6).

Перейдем к основной части доказательства — оценке величин констант $\|D_{n,r}\|_0$ и $\|S_{n,r}\|_0$. Легко заметить, что многочлены $D_{n,r}$ и $S_{n,r}$ удовлетворяют условиям леммы, из чего следует, что $\|D_{n,r}\|_0 \le 2C_{2n}^{n+1}$, $r \ge 1$, и $\|S_{n,r}\|_0 \le 2C_{2n}^{n+1}$, $r \ge 0$. Второе неравенство распространяет результат Э. А. Стороженко из [11] на случай сопряженных полиномов. Перейдем к улучшению этих оценок. Рассмотрим нечетные $r \ge 3$. Преобразуем $D_{n,r}$ следующим образом:

$$D_{n,r}(z) = z^n\left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{C_{2n}^{n+k}}{k^r}\sum_{j=0}^{k-1} z^{2j-k+1} =$$

$$= z^n\left(z-\frac{1}{z}\right)\left[\left(\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\frac{C_{2n}^{n+2k+1}}{(2k+1)^r}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}(z^k+z^{-k})\sum_{j=0}^{[(n-k-1)/2]}\frac{C_{2n}^{n+2j+1}}{(2j+1)^r}\right] =$$

$$= (z^2-1)\,Q_{n,r}(z).$$

Покажем, что $Q_{n,r}(z)$ удовлетворяет условию леммы. Действительно, убывание коэффициентов, начиная со второго, очевидно, а сравнивая первый и второй коэффициенты, имеем

$$2\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{C_{2n}^{n+2k}}{(2k)^r} \le \frac{C_{2n}^{n+1}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}C_{2n}^{n+1} \le C_{2n}^{n+1} = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\frac{C_{2n}^{n+2k+1}}{(2k+1)^r}.$$

На основании леммы и (1.5)

$$\left\|D_{n,r}\right\|_0 \le \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\frac{C_{2n}^{n+2k+1}}{(2k+1)^r} \le C_{2n}^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^r} = (1-2^{-r})\,\zeta(r)\,C_{2n}^{n+1}.$$

Оценка снизу с помощью (1.3) и (1.4) приводит к неравенству

$$\left\|D_{n,r}\right\|_0 = \left\|Q_{n,r}\right\|_0 \ge \min_{|z|=1}\left|Q_{n,r}(z)\right| \ge C_{2n}^{n+1} - \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]}(2k-1)\frac{C_{2n}^{n+2k+1}}{(2k+1)^r} -$$

$$- 2\sum_{k=1}^{[n/2]}k\frac{C_{2n}^{n+2k}}{(2k)^r} \ge C_{2n}^{n+1}\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{(2k+1)^r}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(2k)^r}\right) =$$

$$= \left[2(1-2^{-r})\zeta(r)-\zeta(r-1)\right]C_{2n}^{n+1}.$$

Очевидно, что константы перед C_{2n}^{n+1} монотонно стремятся к 1 при увеличении r. При $r=3$ получаем константы в (0.7).

Перейдем к оценке сверху и снизу величины $\left\|S_{n,r}\right\|_0$ ($r\ge 3$ нечетные). Аналогично преобразованиям $D_{n,r}$ будем выделять величину $\left(z+\frac{1}{z}\right)$, причем, так как делимости нацело в общем случае нет, каждое слагаемое с четными степенями представим так:

$$z^{2k}+z^{-2k} = (z+z^{-1})\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j+k+1}\left(z^{2j+1}+z^{-2j-1}\right)+(-1)^k.$$

Меняя порядок суммирования в двойной сумме, можно записать

$$S_{2n,r}(z) = z\left[\left(z+\frac{1}{z}\right)W_{n,r}(z)-V_{n,r}z^{n-1}\right],$$

где

$$V_{n,r} \;=\; 2\sum_{j=1}^{[n/2]}(-1)^{j+1}\frac{C_{2n}^{n+2j}}{(2j)^r},$$

$$W_{n,r}(z) \;=\; z^{n-1}\left[\left(\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^j\frac{C_{2n}^{n+2j+1}}{(2j+1)^r}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n-1}(z^k+z^{-k})\sum_{j=0}^{[(n-k-1)/2]}(-1)^j\frac{C_{2n}^{n+2j+k+1}}{(2j+k+1)^r}\right].$$

Переходя к норме L_0, из (1.2) имеем

$$\left\|S_{n,r}\right\|_0 \;=\; \left\|W_{n,r}\right\|_0\left\|\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{V_{n,r}z^{n-1}}{Q_{n,r}(z)}\right\|_0. \tag{2.1}$$

Покажем, что $W_{n,r}(z)$ удовлетворяет условиям леммы. Действительно, все коэффициенты положительны. Проверим неравенства между коэффициентами. Соотношение между первым и вторым коэффициентами очевидно при $r \geq$ ≥ 3, для доказательства монотонного убывания остальных коэффициентов рассмотрим разность соседних:

$$a_k \,-\, a_{k+1} \;=$$

$$=\sum_{j=0}^{[(n-k-1)/4]}\left(\frac{C_{2n}^{n+4j+k+1}}{(4j+k+1)^r}-\frac{C_{2n}^{n+4j+k+2}}{(4j+k+2)^r}-\frac{C_{2n}^{n+4j+k+3}}{(4j+k+3)^r}+\frac{C_{2n}^{n+4j+k+4}}{(4j+k+4)^r}\right),$$

где для удобства записи $C_{2n}^l = 0$ при $l > 2n$.

Покажем, что каждое слагаемой неотрицательно. Действительно, очевидно, что $C_{2n}^{n+k} - 2C_{2n}^{n+k+1} + C_{2n}^{n+k+2} \geq 0$ при $k \geq 0$ и $\dfrac{1}{k^r} - \dfrac{2}{(k+1)^r} + \dfrac{1}{(k+2)^r} \geq 0$ при $k \geq 0$ и $r \geq 0$. Из тождеств

$$a_k b_k \,+\, a_{k+2}b_{k+2} \;=\; \frac{(a_k \,-\, a_{k+2})(b_k \,-\, b_{k+2})}{2} \;+$$

$$+\;\frac{(a_k \,+\, a_{k+2})(b_k \,+\, b_{k+2})}{2},$$

$$\frac{(a_k \,+\, a_{k+2})(b_k \,+\, b_{k+2})}{2} \;-\; 2a_{k+1}b_{k+1} \;=$$

$$=\;\frac{1}{2}(a_k \,-\, 2a_{k+1} \,+\, a_{k+2})(b_k \,-\, 2b_{k+1} \,+\, b_{k+2}) \;+$$

$$+\;(a_k \,-\, 2a_{k+1} \,+\, a_{k+2})\,b_{k+1} \,+\, a_{k+1}(b_k \,-\, 2b_{k+1} \,+\, b_{k+2})$$

следует, что если последовательности a_k и b_k неотрицательны, монотонно убывают и выполняются неравенства $a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0$, $b_k - 2b_{k+1} +$

$+\ b_{k+2} \geq 0$ для любого k, то и для последовательности $a_k b_k$ они тоже будут выполняться. Поэтому

$$\frac{C_{2n}^{n+k}}{k^r} - 2\frac{C_{2n}^{n+k+1}}{(k+1)^r} + \frac{C_{2n}^{n+k+2}}{(k+2)^r} \geq 0,$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{C_{2n}^{n+k}}{k^r} - 2\frac{C_{2n}^{n+k+1}}{(k+1)^r} + \frac{C_{2n}^{n+k+2}}{(k+2)^r}\right) + \left(\frac{C_{2n}^{n+k+1}}{(k+1)^r} - 2\frac{C_{2n}^{n+k+2}}{(k+2)^r} + \frac{C_{2n}^{n+k+3}}{(k+3)^r}\right) \geq 0,$$

откуда получаем необходимое соотношение.

Таким образом, оценка сверху принимает вид

$$\left\| W_{n,r} \right\|_0 \leq \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^j \frac{C_{2n}^{n+2j+1}}{(2j+1)^r} \leq C_{2n}^{n+1}.$$

По формулам (1.3) и (1.5) имеем

$$\left\| W_{n,r} \right\|_0 \geq \min_{|z|=1} \left| \left\| W_{n,r} \right\|_0 (z) \right| \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{C_{2n}^{n+2k+1}}{(2k+1)^r} - 2\sum_{k=0}^{[(n-2)/4]} \frac{C_{2n}^{n+4k+2}}{(4k+2)^r} - 4\sum_{k=0}^{[(n-3)/4]} \frac{C_{2n}^{n+4k+3}}{(4k+3)^r} \geq$$

$$\geq C_{2n}^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^r} - 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+2)^r} - 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+3)^r}\right) \geq$$

$$\geq \left[(1-2^{1-r})(1-2^{-r})\zeta(r) - 2^{2-2r}\zeta\left(r, \frac{3}{4}\right)\right] C_{2n}^{n+1} \geq 0,66457\, C_{2n}^{n+1}.$$

Для оценки второго выражения исследуем поведение величины $f(t) = \dfrac{V_{n,r}e^{it(n-1)}}{W_{n,r}(e^{it})}$. На $0 \leq t \leq 2\pi$ f непрерывно дифференцируема и принимает только действительные значения. Положим

$$C = \frac{1}{2}\left(\inf_{0 \leq t \leq 2\pi} f(t) + \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} f(t)\right),$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\sup_{0 \leq t \leq 2\pi} f(t) - \inf_{0 \leq t \leq 2\pi} f(t)\right). \tag{2.2}$$

При $r = 3$ величины в (2.2) удовлетворяют неравенствам $0 < C \leq 0{,}28317$, $0 < \varepsilon \leq 0{,}09302$, при $r > 3$ эти величины будут убывать.

Теперь, обозначая $t_0 = \arccos\dfrac{C}{2}$, для

$$H_{n,r}(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{V_{n,r}z^{n-1}}{W_{n,r}(z)}$$

получаем

$$\left|H_{n,r}(e^{it})\right| \;\le\; \left|2\cos t - C + \varepsilon\right|, \quad 0 \le t \le t_0, \quad 2\pi - t_0 \le t \le 2\pi,$$

$$\left|H_{n,r}(e^{it})\right| \;\le\; \left|2\cos t - C - \varepsilon\right|, \quad t_0 \le t \le 2\pi - t_0,$$

и

$$\left\|H_{n,r}\right\|_0 \;\le\; \exp\left(\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{t_0} \ln\left|2\cos t - C + \varepsilon\right| dt + \int_{t_0}^{\pi} \ln\left|2\cos t - C - \varepsilon\right| dt\right)\right) \;\le$$

$$\le\; 1{,}20726. \tag{2.3}$$

Снизу аналогично, обозначая $t_1 = \arccos\dfrac{C + 2\varepsilon}{2}$ и $t_2 = \arccos\dfrac{C - 2\varepsilon}{2}$, имеем

$$\left|H_{n,r}(e^{it})\right| \;\ge\; \left|2\cos t - C - \varepsilon\right|, \quad 0 \le t \le t_1,$$

$$\left|H_{n,r}(e^{it})\right| \;\ge\; \left|2\cos t - C + \varepsilon\right|, \quad t_2 \le t \le \pi.$$

В силу непрерывности на отрезке $[t_1, t_2]$ есть нуль $H_{n,r}(e^{it})\tilde{t}$, и, так как $\left|f'(t)\right| \le 0{,}2$ при $r \ge 3$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{t_2} \ln\left|2\cos t - \delta\left(e^{it}\right)\right| dt \;\ge\; \frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{t_2} \ln\left|1{,}73(t - \tilde{t})\right| dt \;\ge\; -\varepsilon\left(0{,}226 + 0{,}658\ln\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Таким образом, аналогично (2.3) имеем $\left\|H_{n,r}\right\|_0 \ge 0{,}89735$. Теперь из (2.1) получаем константы в (0.8). В случае четных $r \ge 4$ рассуждения для $S_{n,r}$ и $D_{n,r}$ меняются местами, и оценки (0.7) и (0.8) остаются справедливыми.

Теорема доказана.

Замечание. При возрастании r константы в (0.7) и (0.8) можно улучшать. При $r = 2$ метод доказательства позволяет получить еще одну оценку: $\left\|D_{n,2}\right\|_0 \le 1{,}2337\, C_{2n}^{n+1}$.

Также из результатов В. В. Арестова [2] следует, что оценку (0.5) можно распространить для любого $0 < p \le \infty$ в таком же виде

$$\left\|T_n^{(r)}\right\|_p \;\ge\; \frac{1}{\left\|D_{n,r}\right\|_0}\left\|T_n\right\|_p, \quad r \ge 1,$$

и

$$\left\|\tilde{T}_n^{(r)}\right\|_p \;\ge\; \frac{1}{\left\|S_{n,r}\right\|_0}\left\|T_n\right\|_p, \quad r \ge 0, \quad T_n \in \mathrm{T}'_n,$$

но точность константы при этом не гарантируется.

Автор выражает благодарность Э. А. Стороженко за обсуждение полученных результатов.

1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1952 – 1959. – Т. 1, 2.
2. *Szegö G.* Über einen satz des Hern Serge Bernstein // Schriftenr. Königsberg. Gelehrten Ges. – 1928. – **5**, № 4. – S. 59 – 70.

3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1, 2.
4. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. – 1975. – **18**. – С. 641 – 658.
5. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
6. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1981. – **45**. – С. 3 – 22.
7. *Арестов В. В.* Неравенство Сеге для сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Мат. заметки. – 1994. – **56**, вып. 6. – С. 10 – 26.
8. *Turan P.* Über die Ableitung von polynomen // Compos. math. – 1939. – **7**. – P. 89 – 95.
9. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992.
10. *Стороженко Э. А.* К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной // Мат. сб. — 1996. – **187**, № 5. – С. 111 – 120.
11. *Стороженко Э. А.* Неравенство типа Турана для комплексных полиномов в L_0-метрике // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 5. – С. 1 – 6.
12. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. – М.: Наука, 1978. – Т. 1, 2.
13. *Арестов В. В.* Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. – 1990. – **48**, вып. 4. – С. 7 – 18.

Получено 15.07.08,
после доработки — 10.02.09