УДК 512.552

В. С. Лучко (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

О ДЕЙСТВИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ НА НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ИДЕАЛЫ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Let I be a nilpotent ideal of an associative algebra A over a field F and let D be a derivation of A. We prove that the ideal $I + D(I)$ is nilpotent if $\operatorname{char} F = 0$ or a nilpotent index of I is less than $\operatorname{char} F = p$ in the case of positive characteristic of the field F. In particular, the sum $N(A)$ of all nilpotent ideals of the algebra A is a characteristic ideal provided that $\operatorname{char} F = 0$ or $N(A)$ is a nilpotent ideal of index $< p = \operatorname{char} F$.

Нехай I — нільпотентний ідеал асоціативної алгебри A над полем F і D — диференціювання A. Доведено, що ідеал $I + D(I)$ є нільпотентним, якщо $\operatorname{char} F = 0$ або індекс нільпотентності $I <\operatorname{char} F = p$ у випадку додатної характеристики поля F. Зокрема, сума $N(A)$ усіх нільпотентних ідеалів алгебри A є характеристичним ідеалом, якщо $\operatorname{char} F = 0$ або $N(A)$ — нільпотентний ідеал індексу $< p = \operatorname{char} F$.

Напомним, что дифференцированием ассоциативной алгебры A над полем F называется F-линейное отображение $D: A \to A$ такое, что $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ для произвольных элементов $a, b \in A$. Каждый элемент $a \in A$ определяет внутреннее дифференцирование $D_a : x \to [a, x] = ax - xa$, где $x \in A$. Идеал I алгебры A называется характеристическим (или стабильным), если $D(I) \subseteq I$ для произвольного дифференцирования D алгебры A. В работе [1] доказано, что радикал Левицкого (наибольший локально нильпотентный идеал) ассоциативного кольца R будет характеристическим, если аддитивная группа R^+ не имеет кручения. Этот результат является аналогом для ассоциативных колец известного результата Б. Хартли [2] о характеристичности локально нильпотентного радикала алгебры Ли над полем нулевой характеристики.

Если I — нильпотентный идеал ассоциативной алгебры A и D — дифференцирование A, то идеал $I + D(I)$, вообще говоря, не является нильпотентным (более того, пример, приведенный в работе, показывает, что идеал $I + D(I)$ может быть очень далеким по своим свойствам от нильпотентных идеалов). Поэтому интересным представляется вопрос: при каких условиях $I + D(I)$ будет нильпотентным идеалом, а также когда сумма всех нильпотентных идеалов будет характеристическим идеалом? Основным результатом работы является теорема 1, в которой доказана нильпотентность идеала $I + D(I)$ в случае основного поля характеристики 0 и в случае $\operatorname{char} F = p > 0$ и индекса нильпотентности I меньшего $< p$. Из этой теоремы следует характеристичность суммы всех нильпотентных идеалов алгебры A при отмеченных выше ограничениях (следствие 1). Изучению действий дифференцирований на идеалы ассоциативных алгебр и колец посвящено много работ (см., например, [3, 4]).

Обозначения в работе стандартные. Если I — нильпотентный идеал ассоциативной алгебры, то индексом нильпотентности $n(I)$ этого идеала называется такое натуральное число $n = n(I)$, что $I^n = 0$, $I^{n-1} \neq 0$. Через $\operatorname{Der}(A)$ обозначается множество всех дифференцирований алгебры A. Если A — ассоциативная алгебра, то через $N(A)$ обозначим сумму всех нильпотентных идеалов алгебры A (это будет локально нильпотентный идеал алгебры A). Если D — дифференцирование ассоциативной алгебры A и M — F-подпространство из A, то обозначаем для удобства $D^0(M) = M$, $D^k(M) = D\left(D^{k-1}(M)\right)$ для $k \geq 1$.

В следующей лемме собраны для удобства некоторые стандартные факты о дифференцированиях.

Лемма 1. *Пусть* I — *левый (правый) идеал ассоциативной алгебры* A, $D \in \mathrm{Der}(A)$. *Тогда*:

1) $I + D(I) + \ldots + D^k(I)$ — *левый (правый) идеал алгебры* A *для* $k \geq 1$;

2) *если* $Z = Z(I)$ — *центр идеала* I, *то существует двусторонний идеал* J *алгебры* A *с* $J^2 = 0$ *такой, что* $[Z, A] \subseteq J$;

3) $D^k(xy) = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} D^s(x) D^{k-s}(y)$.

Доказательство. 1. Пусть, например, I — левый идеал алгебры A. Очевидно, достаточно показать, что $I + D(I)$ — левый идеал алгебры A. Для произвольных элементов $x \in A$, $i \in I$, имеем $xD(i) = D(xi) - D(x)i$. Очевидно, $D(xi) - D(x)i \in D(I) + I$ и потому $I + D(I)$ — левый идеал алгебры A.

2. См., например, [5] (лемма 1).

3. Правило Лейбница.

Лемма 2. *Пусть* A — *ассоциативная алгебра над произвольным полем*, I — *идеал из* A *и* $D \in \mathrm{Der}(A)$. *Тогда для произвольных натуральных чисел* k, m *таких, что* $k < m$, *справедливо включение* $D^k(I^m) \subseteq I^{m-k}$.

Доказательство проведем индукцией по k. Если $k = 1$, то при $m = 2$ для произвольных элементов i_1, $i_2 \in I$ выполняется соотношение $D(i_1 i_2) = D(i_1)i_2 + i_1 D(i_2)$ и потому элемент $D(i_1 i_2) \in I$, поскольку I — идеал алгебры A. Но тогда вследствие произвольности выбора элементов i_1, $i_2 \in I$ имеет место включение

$$D(I^2) \subseteq ID(I) + D(I)I \subseteq I.$$

Пусть доказано, что $D\left(I^{m-1}\right) \subseteq I^{m-2}$ при $m \geq 2$. Тогда

$$D(I^m) = D\left(I \cdot I^{m-1}\right) \subseteq D(I)I^{m-1} + ID\left(I^{m-1}\right),$$

и поэтому имеет место включение

$$D(I^m) \subseteq I^{m-1} + I \cdot I^{m-2} = I^{m-1}.$$

Это доказывает утверждение при $k = 1$. Пусть доказана справедливость включения для $k - 1$, докажем его для k. Имеем

$$D^k(I^m) = D\left(D^{k-1}(I^m)\right) \subseteq D(I^{m-k+1}) \subseteq I^{m-k}$$

с учетом индуктивного предположения.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* A — *ассоциативная алгебра над полем* F, I — *нильпотентный идеал из* A *индекса нильпотентности* n *и* $D \in \mathrm{Der}(A)$. *Тогда* $I + D(I)$ — *нильпотентный идеал из* A *индекса нильпотентности* $\leq n^2$ *в следующих случаях*:

1) $\mathrm{char}\, F = 0$; 2) $\mathrm{char}\, F = p > 0$ *и* $n < p$.

Доказательство. Покажем сначала индукцией по k, что

$$(I + D(I))^k \subseteq I + D^k\left(I^k\right) \tag{1}$$

для произвольного k в случае $\operatorname{char} F = 0$ и при $k < p$ в случае положительной характеристики $\operatorname{char} F = p$. Действительно, для произвольных элементов i_1, $i_2 \in I$ имеем

$$D(i_1)D(i_2) = \frac{1}{2}\left\{D^2(i_1 i_2) - D^2(i_1)i_2 - i_1 D^2(i_2)\right\}$$

и потому $D(I^2) \subseteq I + D^2(I^2)$, так как I — идеал алгебры A. Но тогда $(I + D(I))^2 \subseteq I + D^2(I^2)$, т. е. включение (1) справедливо при $k = 2$. Пусть доказано, что $(I + D(I))^{k-1} \subseteq I + D^{k-1}(I^{k-1})$, докажем включение $(I + D(I))^k \subseteq I + D^k(I^k)$. Используя индуктивное предположение, получаем

$$(I + D(I))^k = (I + D(I))^{k-1}(I + D(I)) \subseteq \left(I + D^{k-1}\left(I^{k-1}\right)\right)(I + D(I)).$$

Но тогда

$$(I + D(I))^k \subseteq I + D^{k-1}\left(I^{k-1}\right)D(I). \tag{2}$$

Для произвольных элементов $i_{k-1} \in I^{k-1}$, $i_1 \in I$ имеем

$$D^k(i_{k-1}i_1) = \sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}D^s(i_{k-1})\,D^{k-s}(i_1).$$

В силу леммы 2 выполняется соотношение $D^s(i_{k-1}) \in I$ для $s = 0, 1, \ldots, k-2$ и потому

$$D^k(i_{k-1}i_1) = i_0 + \binom{k}{k-1}D^{k-1}(i_{k-1})\,D(i_1) + \binom{k}{k}D^k(i_{k-1})\,i_1 \tag{3}$$

для некоторого элемента $i_0 \in I$. Если $k = \binom{k}{k-1}$ не делится на характеристику поля F (а это выполняется в случаях $\operatorname{char} F = 0$ и $\operatorname{char} F = p > k$), то из (3) легко следует, что $D^{k-1}(i_{k-1})\,D(i_1) \in I + D^k(I^k)$, поскольку $\binom{k}{k}D^k(i_{k-1})\cdot i_1 \in I$. Вследствие произвольности выбора элементов $i_{k-1} \in I^{k-1}$ и $i_1 \in I$ получаем

$$D^{k-1}(I^{k-1})\,D(I) \subseteq I + D^k(I)$$

и потому на основании (2) имеет место включение $(I + D(I))^k \subseteq I + D^k(I^k)$. Положим в последнем соотношении $k = n$, где n — индекс нильпотентности идеала I. Тогда $(I + D(I))^n \subseteq I$ и потому $(I + D(I))^{n^2} = 0$, т. е. $I + D(I)$ — нильпотентный идеал индекса нильпотентности $\leq n^2$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 легко получить следующий результат, представляющий самостоятельный интерес.

***Следствие* 1.** *Пусть R — ассоциативная алгебра над полем F и $N(R)$ — сумма всех нильпотентных идеалов алгебры R. Тогда $N(R)$ является характеристическим идеалом алгебры R в следующих случаях*:

1) $\operatorname{char} F = 0$; 2) $N(R)$ — *нильпотентный идеал индекса нильпотентности* $< p$, *где* $p = \operatorname{char} F > 0$.

Отметим, что характеристичность нильпотентного радикала кольца без кручения доказана в работе [4] с использованием других подходов.

Следующий пример показывает, что ограничение на индекс нильпотентности в теореме 1 и следствии 1 в случае простой характеристики основного поля нельзя опустить. Этот пример является аналогом для ассоциативных алгебр известного примера модулярной алгебры Ли с разрешимым радикалом, который не является характеристическим идеалом всей алгебры (см. [6, с. 88]).

***Пример* 1.** Пусть A — простая ассоциативная алгебра над полем F характеристики $p > 0$, G — циклическая группа порядка p и $B = F[G]$ — групповая алгебра группы G. Тогда тензорное произведение ассоциативных алгебр $R = A \otimes_F B$ (над полем F) будет ненильпотентной алгеброй, так как содержит подалгебру $A \otimes_F 1$, которая является простой. Покажем, что R содержит нильпотентный идеал N такой, что для некоторого $D \in \operatorname{Der}(R)$ имеем $N + D(N) = R$, т. е. $N + D(N)$ — ненильпотентный идеал из R.

Действительно, как известно, нильпотентный радикал N_1 алгебры B имеет базис (над F) из элементов $g - 1$, $g \in G \backslash \{1\}$, и при этом $B \backslash N \simeq F$. Фиксируем элемент g, $g \neq 1$. Нетрудно убедиться, что существует дифференцирование $D \in \operatorname{Der}(B)$ такое, что $D(g) = 1$. Продолжим D на ассоциативную алгебру $R = A \otimes_F B$ по правилу

$$D\left(\sum a_i \otimes b_i\right) = \sum a_i \otimes D(b_i).$$

Непосредственно проверяется, что $D \in \operatorname{Der}(R)$.

Далее, легко видеть, что нильрадикал алгебры $R = A \otimes_F B$ совпадает с $N = A \otimes_F N_1$, где N_1 — нильрадикал подалгебры B. Поскольку $D(g-1) = 1$, то $D(N) \supseteq A \otimes_F 1$ и потому $N + D(N) = A \otimes_F B = R$.

Заметим, что индекс нильпотентности идеала $N = A \otimes_F N_1$ равен p.

Применим полученные результаты к изучению действия дифференцирований на односторонние коммутативные идеалы ассоциативных алгебр.

Теорема 2. *Пусть* R — *ассоциативная алгебра над полем характеристики не равной* 2 *и* I — *коммутативный правый* (*левый*) *идеал*, $D \in \operatorname{Der}(R)$. *Тогда* $I + D(I)$ — *правый* (*левый*) *идеал из* R *и при этом подалгебра* $I + D(I)$ *содержит нильпотентный идеал* T *индекса нильпотентности* ≤ 4 *с коммутативной фактор-алгеброй* $(I + D(I))/T$.

***Доказательство*.** Рассмотрим случай левого идеала I. В силу леммы 1 алгебра R содержит идеал J с $J^2 = 0$ такой, что $[I, R] \subseteq J$. Согласно теореме 1 двусторонний идеал $J + D(J)$ алгебры R нильпотентен индекса нильпотентности ≤ 4. Далее, на основании леммы 1 сумма $I + D(I)$ является левым идеалом алгебры R. Покажем, что в R выполняется соотношение $[I + D(I), R] \subseteq J + D(J)$. Действительно, для произвольных элементов $i \in I$, $x \in R$ имеем $[D(i), x] = D([i, x]) - [i, D(x)]$ и так как

$$D([i, x]) \in D(J), \quad [i, D(x)] \subseteq J,$$

то $[D(i), x] \in J + D(J)$. Следовательно, $[D(I), R] \subseteq J + D(J)$. Но тогда выполняется также соотношение $[I + D(I), R] \subseteq J + D(J)$.

Рассмотрим теперь пересечение $T = \big(I + D(I)\big) \bigcap \big(J + D(J)\big)$. Очевидно, T — нильпотентный идеал подалгебры $I + D(I)$ индекса нильпотентности ≤ 4 и при этом справедливо включение

$$[I + D(I), I + D(I)] \subseteq [I + D(I), R] \subseteq J + D(J).$$

Но тогда $[I + D(I), I + D(I)] \subseteq T$ и потому фактор-алгебра $(I + D(I))/T$ коммутативна.

Теорема доказана.

1. *Letzter G.* Derivations and nil ideals // Rend. Circolo Mat. Palermo. – 1988. – **37**, № 2. – P. 174 – 176.
2. *Hartley B.* Locally nilpotent ideals of a Lie algebra // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1967. – **63**. – P. 257 – 272.
3. *Lanski C.* Left ideals and derivations in semiprime rings // J. Algrbra. – 2004. – **277**, Isuue 2. – P. 658 – 667.
4. *Jordan D. A.* Noetherian Ore extensions and Jacobson rings // J. London Math. Soc. – 1975. – Ser. 10. – P. 281 – 291.
5. *Luchko V. S., Petravchuk A. P.* On one-sided ideals of associative rings // Algebra and Discrete Math. – 2007. – № 3. – P. 1 – 6.
6. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964. – 355 с.

Получено 21.04.09