УДК 517.518:519.652

**М. М. Пагіря** (Мукачів. ун-т, Ужгород. нац. ун-т),
**Р. А. Кацала** (Ужгород. нац. ун-т)

# ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДВОХ МЕТОДІВ ПОБУДОВИ ПРАВИЛЬНИХ ЛАНЦЮГОВИХ *C*-ДРОБІВ

A regular continued $C$-fraction is associated with a power series. The coefficients of this fraction are determined either via Hankel determinants or via inverse derivatives. We prove the equivalence of these two approaches to the construction of regular continued $C$-fractions.

Правильная цепная $C$-дробь является соответствующей степенному ряду. Коэффициенты этой дроби определяются или через ганкелевы определители, или через обратные производные. Доказана эквивалентность этих подходов к построению правильных цепных $C$-дробей.

**Вступ.** Розвинення функцій однієї дійсної змінної в ланцюговий дріб належить до важливих задач наближення функцій, оскільки такі розвинення широко використовуються у прикладних задачах поряд із наближеннями степеневими рядами, ортогональними багаточленами, апроксимаціями Паде і т. п. Часто ланцюговий дріб має більш широку область збіжності і не накопичує похибку при обчисленнях. Тому задача отримання розвинень функцій у ланцюговий дріб та встановлення взаємозв'язку між різними способами таких розвинень є актуальною. Доведенню еквівалентності двох підходів до побудови правильного ланцюгового $C$-дробу присвячено дану роботу.

**Розвинення функцій у правильний ланцюговий $C$-дріб.** Один із способів отримання розвинень функцій у ланцюговий дріб полягає у використанні розвинень цієї функції у степеневий ряд і побудові відповідного даному степеневому ряду правильного ланцюгового $C$-дробу [1 – 4].

Нехай

$$f(x) = 1 + \bar{c}_1 x + \bar{c}_2 x^2 + \ldots + \bar{c}_n x^n + \ldots \tag{1}$$

— розвинення функції у степеневий ряд в околі нуля,

$$D(x) = 1 + \frac{a_1 x}{1} \underset{+}{} \frac{a_2 x}{1} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{a_n x}{1} \underset{+}{} \cdots = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_i x}{1} \tag{2}$$

— правильний ланцюговий $C$-дріб,

$$D_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_i x}{1} \tag{3}$$

— $n$-підхідний дріб ланцюгового дробу (2).

**Означення.** *Ланцюговий дріб* (2) *називається відповідним степеневому ряду* (1), *якщо розвинення його довільного $n$-підхідного дробу* (3) *у степеневий ряд збігається із вихідним степеневим рядом до члену $x^n$ включно.*

Визначником Ганкеля, який пов'язаний із степеневим рядом (1), називається визначник

$$\bar{H}_0^{(n)} = 1, \qquad \bar{H}_k^{(n)} = \begin{vmatrix} \bar{c}_n & \bar{c}_{n+1} & \cdots & \bar{c}_{n+k-1} \\ \bar{c}_{n+1} & \bar{c}_{n+2} & \cdots & \bar{c}_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{c}_{n+k-1} & \bar{c}_{n+k} & \cdots & \bar{c}_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

**Теорема 1** [3, с. 220]. 1. *Якщо для заданого степеневого ряду* (1) *існує відповідний правильний ланцюговий $C$-дріб у точці $x = 0$, то*

$$\bar{H}_k^{(1)} \neq 0, \quad \bar{H}_k^{(2)} \neq 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

і

$$a_1 = \bar{H}_1^{(1)}, \quad a_{2k} = -\frac{\bar{H}_{k-1}^{(1)} \bar{H}_k^{(2)}}{\bar{H}_k^{(1)} \bar{H}_{k-1}^{(2)}}, \quad a_{2k+1} = -\frac{\bar{H}_{k+1}^{(1)} \bar{H}_{k-1}^{(2)}}{\bar{H}_k^{(1)} \bar{H}_k^{(2)}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{5}$$

2. *Навпаки, якщо співвідношення* (4) *виконуються, то правильний ланцюговий* $C$*-дріб* (2) *із коефіцієнтами* $a_n$*, які визначаються формулами* (5), *буде відповідним степеневому ряду* (1).

**Формула Тіле.** Іншим способом, за допомогою якого можна отримати розвинення функцій у ланцюговий дріб в околі точки $x = x_*$, є формула Тіле [5]

$$f(x) = f(x_*) + \frac{x - x_*}{\backprime f(x_*)} \; + \; \frac{x - x_*}{2\backprime\left[\backprime f(x_*)\right]} \; + \\ + \frac{x - x_*}{3\backprime\left[{}^{(2)} f(x_*)\right]} \; + \cdots + \; \frac{x - x_*}{n\backprime\left[{}^{(n-1)} f(x_*)\right]} \; + \cdots, \tag{6}$$

де $n\backprime\left[{}^{(n-1)} f(x)\right] = {}^{(n)} f(x) - {}^{(n-2)} f(x)$. Обернені похідні ${}^{(n)} f(x)$ обчислюються за допомогою рекурентних співвідношень

$${}^{(0)}f(x) = f(x), \quad \backprime f(x) = \frac{1}{f'(x)},$$

$${}^{(n)}f(x) = n\backprime\left[{}^{(n-1)} f(x)\right] + {}^{(n-2)}f(x), \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{7}$$

Ланцюговий дріб (6) можна подати у вигляді еквівалентного йому правильного ланцюгового $C$-дробу [6]

$$f(x) = \omega_0 + \frac{\omega_1 (x - x_*)}{1} \; + \; \frac{\omega_2 (x - x_*)}{1} \; + \cdots + \; \frac{\omega_n (x - x_*)}{1} \; + \cdots, \tag{8}$$

де

$$\omega_0 = f(x_*), \quad \omega_1 = \frac{1}{\backprime f(x_*)},$$

$$\omega_n = \frac{1}{n\backprime\left[{}^{(n-1)} f(x_*)\right](n-1)\backprime\left[{}^{(n-2)} f(x_*)\right]}, \quad n \geq 2. \tag{9}$$

Основна мета цієї роботи — встановлення еквівалентності між коефіцієнтами ланцюгових дробів (2) і (8).

**Подання коефіцієнтів формули Тіле через похідні функції.** Нехай $c_k = f^{(k)}(x)/k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тоді обернені похідні ${}^{(k)}f(x)$ виражаються через звичайні похідні функції як відношення двох визначників Ганкеля [7, 8]

$${}^{(2k-1)}f(x) = \frac{H_{k-1}^{(3)}}{H_k^{(1)}}, \quad {}^{(2k)}f(x) = \frac{H_{k+1}^{(0)}}{H_k^{(2)}}, \quad k \geq 1, \tag{10}$$

де

$$H_0^{(n)} = 1, \quad H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

***Зауваження* 1.** Доведення формул (10) у роботі [8] відрізняється від доведення в [7]. У книзі Н. Е. Ньорлунда [7, с. 419 – 427] формули отримано з використанням властивостей коефіцієнтів інтерполяційного багаточлена у формі Ньютона.

Виразимо всі $n`\left[{}^{(n-1)}f(x)\right]$, $n \geq 2$, через ганкелеві визначники. З формул (7) і (10) при $n = 2$ одержимо

$$2`[`f(x_*)] \;=\; ``f(x_*) - f(x_*) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{c_2} - c_0 \;=$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_0 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{c_2} \;=\; \frac{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_2} \;=\; -\frac{c_1^2}{c_2}.$$

При $n = 3$ отримаємо

$$3`[``f(x_*)] \;=\; ```f(x_*) - `f(x_*) \;=\; \frac{c_3}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}} - \frac{1}{c_1} \;=\; \frac{\begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} c_1} \;=$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} c_1} \;=\; \frac{c_2^2}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} c_1}.$$

Аналогічно при $n = 4$ та $n = 5$

$$4`[\,```f(x)\,] \;=\; -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} c_2}, \qquad 5`\left[{}^{(4)}f(x)\right] \;=\; \frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ c_3 & c_4 & c_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Отже, виконуються співвідношення

$$2`[`f(x)] \;=\; -\frac{\left(H_1^{(1)}\right)^2}{H_1^{(2)}H_0^{(2)}}, \qquad 3`[``f(x)] \;=\; \frac{\left(H_1^{(2)}\right)^2}{H_2^{(1)}H_1^{(1)}},$$

$$4`[```f(x)] \;=\; -\frac{\left(H_2^{(1)}\right)^2}{H_2^{(2)}H_1^{(2)}}, \qquad 5`\left[{}^{(4)}f(x)\right] \;=\; \frac{\left(H_2^{(2)}\right)^2}{H_3^{(1)}H_2^{(1)}}.$$

Нам потрібна наступна лема.

**Лема** [3, с. 225]**.** *Для визначників Ганкеля* $H_k^{(s)}$ *має місце тотожність Якобі*

$$H_k^{(s)}H_k^{(s+2)} - H_{k+1}^{(s)}H_{k-1}^{(s+2)} \;=\; \left(H_k^{(s+1)}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

**Теорема 2.** *Коефіцієнти ланцюгового дробу* (6) *визначаються через визначники Ганкеля* $H_k^{(n)}$ *таким чином*:

$$(2k)`\left[{}^{(2k-1)}f(x)\right] \;=\; -\frac{\left(H_k^{(1)}\right)^2}{H_k^{(2)}H_{k-1}^{(2)}}, \qquad (2k+1)`\left[{}^{(2k)}f(x)\right] \;=\; \frac{\left(H_k^{(2)}\right)^2}{H_k^{(1)}H_{k+1}^{(1)}}. \tag{12}$$

***Доведення.*** Оскільки

$$(2k)`\left[{}^{(2k-1)}f(x)\right] = {}^{(2k)}f(x) - {}^{(2k-2)}f(x),$$

то з (10) та (11) маємо

$$(2k)`\left[{}^{(2k-1)}f(x)\right] = \frac{H_{k+1}^{(0)}}{H_k^{(2)}} - \frac{H_k^{(0)}}{H_{k-1}^{(2)}} = \frac{H_{k+1}^{(0)}H_{k-1}^{(2)} - H_k^{(0)}H_k^{(2)}}{H_k^{(2)}H_{k-1}^{(2)}} = -\frac{\left(H_k^{(1)}\right)^2}{H_k^{(2)}H_{k-1}^{(2)}}.$$

Друге із співвідношень (12) доводиться аналогічно.

***Зауваження 2.*** Формули (12) іншим способом було доведено в роботі [7, с. 428, 429].

**Еквівалентність ланцюгових дробів (2) і (8).** Запишемо коефіцієнти $\omega_n$ правильного ланцюгового $C$-дробу (8) через визначники Ганкеля $H_k^{(n)}$. Із формул (9) та (12) отримуємо

$$\omega_{2k} = -\frac{H_k^{(2)}H_{k-1}^{(2)}H_{k-1}^{(1)}H_k^{(1)}}{\left(H_k^{(1)}\right)^2\left(H_{k-1}^{(2)}\right)^2} = -\frac{H_k^{(2)}H_{k-1}^{(1)}}{H_k^{(1)}H_{k-1}^{(2)}}, \tag{13}$$

$$\omega_{2k+1} = -\frac{H_k^{(1)}H_{k+1}^{(2)}H_{k-1}^{(2)}H_k^{(2)}}{\left(H_k^{(1)}\right)^2\left(H_k^{(2)}\right)^2} = -\frac{H_{k-1}^{(2)}H_{k+1}^{(1)}}{H_k^{(1)}H_k^{(2)}}, \tag{14}$$

де $k = 1, 2, 3, \ldots$ .

Нехай маємо степеневий ряд

$$f(x) = f(x_*) + \frac{f'(x_*)}{1!}(x-x_*) + \frac{f''(x_*)}{2!}(x-x_*)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_*)}{n!}(x-x_*)^n + \ldots .$$

Поділивши ліву і праву частини цієї рівності на $f(x_*)$, отримаємо

$$\frac{f(x)}{f(x_*)} = 1 + \frac{f'(x_*)}{f(x_*)\cdot 1!}(x-x_*) + \frac{f''(x_*)}{f(x_*)\cdot 2!}(x-x_*)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_*)}{f(x_*)\cdot n!}(x-x_*)^n + \ldots .$$

Позначимо $\tilde{c}_i = \dfrac{f^{(i)}(x_*)}{f(x_*)\cdot i\,!}$, $i = 1, 2, \ldots$, тоді

$$\frac{f(x)}{f(x_*)} = 1 + \tilde{c}_1(x-x_*) + \tilde{c}_2(x-x_*)^2 + \ldots + \tilde{c}_n(x-x_*)^n + \ldots . \tag{15}$$

Отримали степеневий ряд вигляду (1). Тоді коефіцієнти відповідного йому правильного ланцюгового $C$-дробу будуть такими:

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{H}_1^{(1)}, \quad \tilde{\omega}_{2k} = -\frac{\tilde{H}_{k-1}^{(1)}\tilde{H}_k^{(2)}}{\tilde{H}_k^{(1)}\tilde{H}_{k-1}^{(2)}}, \quad \tilde{\omega}_{2k+1} = -\frac{\tilde{H}_{k+1}^{(1)}\tilde{H}_{k-1}^{(2)}}{\tilde{H}_k^{(1)}\tilde{H}_k^{(2)}}, \tag{16}$$

де

$$\tilde{H}_0^{(n)} = 1, \qquad \tilde{H}_k^{(n)} = \begin{vmatrix} \tilde{c}_n & \tilde{c}_{n+1} & \cdots & \tilde{c}_{n+k-1} \\ \tilde{c}_{n+1} & \tilde{c}_{n+2} & \cdots & \tilde{c}_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{c}_{n+k-1} & \tilde{c}_{n+k} & \cdots & \tilde{c}_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Оскільки $\tilde{c}_i = \dfrac{1}{f(x_*)} c_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то з формул (13), (14) та (16) маємо

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{1}{f(x_*)}\omega_0, \qquad \tilde{\omega}_1 = \tilde{c}_1 = \frac{1}{f(x_*)} c_1 = \frac{1}{f(x_*)}\omega_1,$$

$$\tilde{\omega}_{2k} = -\frac{\tilde{H}_{k-1}^{(1)}\tilde{H}_k^{(2)}}{\tilde{H}_k^{(1)}\tilde{H}_{k-1}^{(2)}} = -\frac{\dfrac{1}{f(x_*)^{k-1}} H_{k-1}^{(1)} \dfrac{1}{f(x_*)^k} H_k^{(2)}}{\dfrac{1}{f(x_*)^k} H_k^{(1)} \dfrac{1}{f(x_*)^{k-1}} H_{k-1}^{(2)}} = \omega_{2k}, \tag{17}$$

$$\tilde{\omega}_{2k+1} = -\frac{\tilde{H}_{k+1}^{(1)}\tilde{H}_{k-1}^{(2)}}{\tilde{H}_k^{(1)}\tilde{H}_k^{(2)}} = -\frac{\dfrac{1}{f(x_*)^{k+1}} H_{k+1}^{(1)} \dfrac{1}{f(x_*)^{k-1}} H_{k-1}^{(2)}}{\dfrac{1}{f(x_*)^k} H_k^{(1)} \dfrac{1}{f(x_*)^k} H_k^{(2)}} = \omega_{2k+1}, \quad k \ge 1.$$

Запишемо ланцюговий $C$-дріб, який є відповідним степеневому ряду (15), і використаємо знайдені рівності (17). Тоді

$$\frac{f(x)}{f(x_*)} = \tilde{\omega}_0 + \frac{\tilde{\omega}_1(x - x_*)}{1} + \frac{\tilde{\omega}_2(x - x_*)}{1} + \cdots + \frac{\tilde{\omega}_n(x - x_*)}{1} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{f(x_*)}\left(\omega_0 + \frac{\omega_1(x - x_*)}{1} + \frac{\omega_2(x - x_*)}{1} + \cdots + \frac{\omega_n(x - x_*)}{1} + \cdots\right).$$

Якщо ліву і праву частини рівності помножити на $f(x_*)$, то отримаємо розвинення (8) функції $f(x)$, а це, в свою чергу, показує, що побудови правильного ланцюгового $C$-дробу через визначники Ганкеля та обернені похідні є еквівалентними.


1. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: D. Van Nostrand Co., 1948. – 433 p.
2. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1957. – Bd 2. – 315 S.
3. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
4. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
5. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909. – XII + 175 S.
6. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Розвитки деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2007. – Вип. 14-15. – С. 107 – 116.
7. *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. – Berlin: I. Springer, 1924. – 551 S.
8. *Кацала Р. А.* Зв'язок між оберненими похідними та похідними функції однієї дійсної змінної // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2008. – Вип. 16. – С. 73 – 81.



Одержано 25.12.08