УДК 512.745

Ю. В. Боднарчук, П. Г. Прокоф'єв (Ун-т „Києво-Могилян. академія")

ЛОКАЛЬНО НІЛЬПОТЕНТНІ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА АВТОМОРФІЗМИ НАГАТІВСЬКОГО ТИПУ АЛГЕБРИ ПОЛІНОМІВ*

We study locally nilpotent derivations belonging to sa_n, which is a Lie algebra of the special affine Cremona group, in connection with the root decomposition of sa_n relative to the maximal standard torus. It is proved that all root locally nilpotent derivations are elementary. In a sequential research, two-root and three-root derivations are described. With the application of Shestakov's and Umirbaev's results, we prove that exponents of almost all obtained three-root derivations are wild automorphisms of a polynomial algebra in three variables.

Изучаются локально нильпотентные дифференцирования, принадлежащие sa_n — алгебре Ли специальной аффинной группы Кремоны, в связи с корневым разложением sa_n относительно максимального стандартного тора. Доказано, что все корневые локально нильпотентные дифференцирования являются элементарными. В продолжение этих исследований описаны дву- и трехкорневые дифференцирования. С использованием результатов И. П. Шестакова и У. У. Умирбаева доказано, что экспоненты почти всех полученных трехкорневых дифференцирований являются дикими автоморфизмами алгебры полиномов от трех переменных.

1. Вступ. Локально нільпотентні диференціювання алгебри поліномів є джерелом нетривіальних автоморфізмів алгебр поліномів. Зокрема, відомий автоморфізм Нагати є експонентою відповідного локально нільпотентного диференціювання. Більш того, існує гіпотеза, що всі автоморфізми алгебри поліномів, які утворюють афінну групу Кремони, є ітерованими композиціями афінних (лінійних) та експонент локально нільпотентних диференціювань цієї алгебри. Характеризація та побудова критерію локальної нільпотентності поліноміальних диференціювань є відомими дуже складними проблемами. Для поліномів від двох змінних теорема Ренчлера [1], наведена нижче, дає в цьому випадку певну характеризацію. Існує також оцінка степеня нільпотентності локально нільпотентного диференціювання алгебри поліномів від двох змінних, яка дає такий критерій. Центральне місце тут займає проблема ядра диференціювання, яке є підалгеброю алгебри поліномів від n змінних і може бути нескінченно породженим, а отже є джерелом контрприкладів до 14-ї проблеми Гільберта, що наведені в [2]. Водночас якщо ядро містить $n-1$ алгебраїчно незалежних елементів, то за теоремою Макар-Ліманова [3] такі локально нільпотентні диференціювання можна охарактеризувати подібно до випадку $n = 2$ за допомогою відповідного якобіану.

З іншого боку, відомо, що нескінченновимірні алгебри Лі картанівського типу (див. [4]) реалізуються як алгебри поліноміальних диференціювань. Ці ал-

* Підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень (Ф 25/546-2007 № ДР 0107U010499) та Міжнародним благодійним фондом відродження Києво-Могилянської академії.

гебри допускають кореневий розклад відносно стандартного тора.

Метою даної роботи є вивчення локально нільпотентних диференціювань виходячи з їх кореневого розкладу. Цей шлях, на думку авторів, є природним, оскільки локально нільпотентні диференціювання, які відповідають автоморфізму Нагати та іншим автоморфізмам, є сумою трьох кореневих диференціювань.

У п. 3 дано відповідь на питання В. Л. Попова [5] про опис кореневих локально нільпотентних диференціювань. Виявилось, що всі вони є елементарними. У п. 4 описано всі трикореневі локально нільпотентні диференціювання, експоненти яких дають серію автоморфізмів, які ми і назвали автоморфізмами нагатівського типу. У п. 5 на підставі критерію дикості автоморфізму алгебри поліномів від трьох змінних, що фіксує одну змінну, І. П. Шестакова та У. У. Умірбаєва (див. [6]) доведено, що майже всі автоморфізми вказаної серії є дикими.

2. Попередні відомості про поліноміальні диференціювання. Нехай $A = \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — поліноміальна алгебра над полем нульової характеристики $\mathbb{F}$. Поліноміальні диференціювання алгебри A мають форму лінійних диференціальних операторів

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1}$$

Означення 1. *Диференціювання* (1) *називається локально нільпотентним, якщо для довільного полінома* $f \in A$ *існує натуральне число* $m = m(f)$, *для якого* $D^m(f) = 0$.

Прикладами локально нільпотентних диференціювань є елементарні

$$a(x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2}$$

і трикутні диференціювання, які мають вигляд

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j(x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_j} + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad a_n \in \mathbb{F}. \tag{3}$$

Одним із способів побудови нетривіальних локально нільпотентних диференціювань є множення елементарного або трикутного диференціювання на певний елемент його ядра. Таке диференціювання має вигляд $\varphi \cdot D$, де D має вигляд (2) або (3), $\varphi \in \operatorname{Ker} D$. Прикладом, отриманим таким способом, є диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних:

$$(x_3 x_1 + x_2^2)\left(-2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\right), \tag{4}$$

експонента якого

$$\left\langle x_1 - 2x_2(x_2^2 + x_3 x_1) - x_3(x_2^2 + x_3 x_1)^2, x_2 + x_3(x_2^2 + x_3 x_1), x_3 \right\rangle \tag{5}$$

є знаменитим автоморфізмом Нагати, дикість якого була доведена в [6].

Іншим прикладом такого типу є диференціювання

$$(x_3 x_1 + x_2 x_4)\left(-x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\right), \tag{6}$$

експонента якого — автоморфізм Аніка — кандидат до класу диких автоморфізмів алгебри поліномів від чотирьох змінних.

Наведемо формулювання згаданої вище теореми Ренчлера.

Теорема 1 [1]. *Якщо* D *— локально нільпотентне диференціювання алгебри поліномів* $\mathbb{F}[x_1, x_2]$, *то існують поліноми* $P, Q \in \mathbb{F}[x_1, x_2]$ *такі, що*:

1) $\operatorname{Ker} D = \mathbb{F}[P]$;

2) $\mathbb{F}[P, Q] = \mathbb{F}[x_1, x_2]$;

3) *існує поліном* $\alpha = \alpha(t)$ *такий, що для довільного* $h \in \mathbb{F}[x_1, x_2]$

$$D(h) = \alpha(P) \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x_1} & \dfrac{\partial P}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Наступна теорема дає алгоритм перевірки того, чи є диференціювання алгебри поліномів від двох змінних локально нільпотентним.

Теорема 2 ([7, с. 33], теорема 1.3.52). *Диференціювання* $D = a_1(x_1, x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ *є локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли*

$$D^{d^*+2}(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad d^* = \max_{i,j} \deg_{x_i} a_j(x_1, x_2).$$

Розглянемо тепер нескінченновимірний векторний простір всіх поліноміальних диференціювань. Він має природний базис, що складається з мономіальних диференціювань

$$e^i(k) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Вектор $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ будемо називати мультистепенем (mdeg) монома $x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, а мультистепінь мономіального диференціювання визначимо таким чином: $m\deg\left(e^i(k)\right) = k - 1_i$, де 1_i означає вектор, i-та координата якого дорівнює 1, а всі інші є нулями.

Означення 2. *Диференціювання називається моногенним, якщо всі мономіальні диференціювання, що входять до його розкладу, мають однаковий мультистепінь.*

Очевидно, що моногенні диференціювання, які не є елементарними, мають форму

$$D_k = x^k \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{F},$$

а їх дія, як і дія мономіальних диференціювань (8), на довільний моном x^m дає або моном мультистепеня

$$m\deg\left(D_k(x^m)\right) = k + m, \tag{9}$$

або нуль внаслідок рівності нулю коефіцієнта $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i$, зокрема для мономіальних диференціювань (8) це можливо лише при $m_i = 0$. Для довільної скінченної сукупності K мультистепенів мономіальних диференціювань — векторів із цілими коефіцієнтами, які можуть мати не більше однієї від'ємної координати, що дорівнює -1, розглянемо ітеровану композицію L диференціювань виду $e^i(k)$ або D_k, $k \in K$, взятих у довільному порядку, де диференціювання мультистепеня k застосовується s_k разів. Незалежно від порядку застосування будемо мати

$$m\deg\left(L(x^m)\right) = \sum_{k \in K} s_k k + m, \tag{10}$$

зокрема, якщо вектор у правій частині рівності містить від'ємну координату, то $L(x^m) = 0$.

Маємо стандартну формулу для комутатора диференціювань

$$[D_1, D_2] = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^1 \frac{\partial a_j^2}{\partial x_k} - a_k^2 \frac{\partial a_j^1}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{11}$$

де a_k^1, a_k^2 — коефіцієнти D_1, D_2 у зображенні (1). Цим визначено структуру алгебри Лі на просторі всіх поліноміальних диференціювань. Диференціювання (1), що задовольняють умову

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \text{const}, \tag{12}$$

утворюють підалгебру ga_n, що є алгеброю Лі афінної групи Кремони $GA_n = \operatorname{Aut}_{\mathbb{F}} A$. Елементи групи GA_n можна ототожнити з наборами поліномів

$$\left\langle f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n) \right\rangle, \tag{13}$$

при цьому груповою операцію є композиція наборів. Умова глобальної оборотності має наслідком умову якобіана

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \text{Const} \neq 0.$$

Диференціал по коефіцієнтах поліномів від умови якобіана приводить до умови (12). Диференціювання, для яких $\text{const} = 0$, утворюють ідеал sa_n диференціювань, що зберігають диференціальну форму об'єму $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Алгебра sa_n є дотичною алгеброю Лі спеціальної афінної групи Кремони SA_n, елементи якої мають одиничний якобіан ($\text{Const} = 1$). Група SA_n містить стандартний алгебраїчний тор T_{n-1}, елементи якого у формі (13) мають вигляд $\langle \alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n \rangle$, $\prod_i \alpha_i = 1$.

З огляду на умову (12), де $\text{const} = 0$, побудуємо мономіальний базис алгебри sa_n:

$$\varepsilon^i(k) = e^i(k) - \frac{k_i}{k_n + 1} e^n(k - 1_i + 1_n) = x^{k - 1_i} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{k_i}{k_n + 1} x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \tag{14}$$

(якщо $k_i = 0$, то $\varepsilon^i(k) = e^i(k)$). До цих елементів базису слід додати ще елементарні мономіальні диференціювання

$$\xi(t) = e^n(t_1,\ldots,t_{n-1},0) = x_1^{t_1}x_2^{t_2}\ldots x_{n-1}^{t_{n-1}}\frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{15}$$

Зазначимо, що для даного мультистепеня k лінійні комбінації

$$D_k = \sum_{r=1}^{n-1}\alpha_r\varepsilon^r(k+1_r) \tag{16}$$

є моногенними диференціюваннями мультистепеня k, зокрема для них має місце формула (9), а коефіцієнти при мономах отримуються безпосередніми обчисленнями. Наприклад, для довільного $z = 0, 1, 2, \ldots$ дія D_k на мономи мультистепеня $zk + 1_i$ визначається таким чином:

$$D(x^{zk+1_i}) = x^{(z+1)k+1_i}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\left(\frac{z(k_j-k_n)}{k_n+1}+\delta_{i,j}\right), \quad i < n, \tag{17}$$

$\delta_{i,j}$ — символ Кронекера;

$$D(x^{zk+1_n}) = x^{(z+1)k+1_n}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\left(\frac{z(k_j-k_n)}{k_n+1}-\frac{k_j+1}{k_n+1}\right), \tag{18}$$

тут zk — звичайний покоординатний добуток вектора k на число z, до того ж формула (9) набирає вигляду $k + zk + 1_n = (z+1)k + 1_n$.

Підалгебра Лі стандартного тора $\tau_{n-1} = \mathrm{Lie}\,(T_{n-1})$ складається з диференціювань $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, де $\alpha_i \in \mathbb{F} : \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$. Елементи

$$\varepsilon^i(1_i) = x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - x_n\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

утворюють базис цієї алгебри. З формул (11) безпосередніми обчисленнями отримуємо формули для комутаторів базисних диференціювань:

$$[\varepsilon^r(k), \varepsilon^s(l)] = \left(\frac{k_n l_s}{l_n+1}-k_s\right)\varepsilon^r(k+l-1_s) - \left(\frac{l_n k_r}{k_n+1}-l_r\right)\varepsilon^s(k+l-1_r), \tag{19}$$

$$[\varepsilon^r(k), \xi(t)] = -k_n\varepsilon^r(k+t-1_n), \quad k_n \neq 0, \tag{20}$$

$$[\varepsilon^r(k), \xi(t)] = (k_r+t_r)\xi(k+t-1_r), \quad k_n = 0. \tag{21}$$

Тепер можна описати кореневі диференціювання, тобто елементи $D \in sa_n$, для яких

$$[\tau, D] = \lambda(\tau)D, \tag{22}$$

де $\tau \in \mathrm{Lie}\,(T_{n-1})$, $\lambda : \mathrm{Lie}\,(T_{n-1}) \to \mathbb{F}$ — корінь (лінійний функціонал), при цьому елементи стандартного тора діють на ці диференціювання таким чином:

$$t^{-1}Dt = \lambda(t)D, \quad t \in T_n.$$

Теорема 3. *Має місце кореневий розклад*

$$sa_n = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^{n-1}} W_\lambda ,$$

де $\mathbb{Z}^{n-1}$ *— цілочислова решітка, до того ж всі кореневі підпростори* W_λ *є ненульовими, оскільки породжується диференціюваннями*

$$\varepsilon^r(k+1_r), \quad k_n - k_i = \lambda_i, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1,$$

і, можливо, ще одним елементарним диференціюванням, що має одну з форм: або $\varepsilon^p(l)$, *де* $l_p = 0$, $l_i = \lambda_p - \lambda_i - 1$, $i < n$, $i \neq p$, $l_n = \lambda_p - 1$, *або* $\xi(t)$, *де* $t_i = -(\lambda_i + 1)$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Доведення. З формул (19) – (21) отримуємо

$$[\varepsilon^r(k), \varepsilon^s(1_s)] = (k_n - k_s + \delta_{r,s})\varepsilon^r(k),$$

$$[\xi(t), \varepsilon^s(1_s)] = -(t_s + 1)\xi(t),$$

що веде до опису коренів та кореневих просторів. Зрозуміло, що лише одне базисне диференціювання $\varepsilon^p(l)$ з $l_p = 0$ може бути у кореневому просторі. Якщо це має місце, то $\lambda_p + 1 = l_n + 2 > 0$, і відтак $\xi(t)$ не належить цьому кореневому простору ні для якого t $(t_n = 0)$. Навпаки, якщо для деяких λ, t $\xi(t) \in \in W_\lambda$, то $\lambda_i - 1 < \lambda_i + 1 \leq 0$, а отже жодне $\varepsilon^p(l)$, у якого $l_p = 0$, не належить цьому кореневому простору.

Теорему доведено.

Зазначимо, що якщо $\Delta(a) = (a, a, \ldots, a)$, $a \in \mathbb{Z}$ і $\varepsilon^r(k+1_r) \in W_\lambda$, то для довільного a $\varepsilon^r(k + \Delta(a) + 1_r) \in W_\lambda$ і відтак W_λ є нескінченновимірним векторним простором. Зауважимо також, що диференціювання виду (16) є кореневими.

3. Кореневі локально нільпотентні диференціювання. Легко бачити, що елементарні диференціювання є кореневими тоді і тільки тоді, коли вони є мономіальними, тобто пропорційними:

$$x_1^{k_1} \ldots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots x_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{23}$$

Зауважимо, що вони є базисними елементами видів $\varepsilon^i(k)$, $k_i = 0$, $\xi(t)$.

Теорема 4. *Усі кореневі локально нільпотентні диференціювання з* sa_n *є елементарними.*

Доведення. Нехай $\tilde{D}$ — довільне кореневе неелементарне диференціювання і $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ — відповідний корінь. Тоді, як випливає з теореми 3, існує вектор $\bar{k}$ і, можливо, один із векторів l $(l_p = 0)$ або t $(t_n = 0)$ такі, що

$$\tilde{D} = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} \sum_{r=1}^{n-1} \mu_{a,r} \varepsilon^r(\bar{k} + \Delta(a) + 1_r) + \nu\varepsilon^p(l) + \nu_1\xi(t).$$

Мультистепені $\bar{k} + \Delta(a)$, що входять у формулу, є очевидно покоординатно лінійно упорядкованими. Виберемо серед них найбільший і позначимо його через k, тоді відповідне моногенне диференціювання набере вигляду (16).

Елемент $\varepsilon^p(l)$ може входити до розкладу $\tilde{D}$ лише при $l_j = \lambda_p - \lambda_j - 1$, $j \neq p, n$, $l_p = 0$, $l_n = \lambda_p - 1$. Оскільки $k_n - k_i = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, то $l_i = k_i - (k_p + 1)$, $i \neq p$. Отже, вектор l є меншим за k відносно покоординатного впорядкування. Аналогічно, якщо вектор t входить до розкладу $\tilde{D}$, то він менший за k.

Звідси випливає, що якщо моном x^{zk+1_i} входить до полінома $\tilde{D}^z(x_i)$ з ненульовим коефіцієнтом, то він є найбільшим серед усіх мономів відносно покоординатного часткового порядку. Отже, диференціювання $\tilde{D}$ може бути локально нільпотентним лише у випадку, коли таким є D_k.

Насправді диференціювання вигляду (16) не можуть бути локально нільпотентними. Дійсно, згідно з формулами (17), (18) існування набору m_i натуральних чисел таких, що $D^{m_i}(x_i) = 0$, $D^j(x_i) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, означає існування ненульового розв'язку $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (набору коефіцієнтів із формули (16)) системи лінійних однорідних рівнянь, матриця якої

$$M = \begin{pmatrix} \frac{m_1(k_1-k_n)}{k_n+1}+1 & \frac{m_1(k_2-k_n)}{k_n+1} & \ldots & \frac{m_1(k_{n-1}-k_n)}{k_n+1} \\ \frac{m_2(k_1-k_n)}{k_n+1} & \frac{m_2(k_2-k_n)}{k_n+1}+1 & \ldots & \frac{m_2(k_{n-1}-k_n)}{k_n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{m_{n-1}(k_1-k_n)}{k_n+1} & \frac{m_{n-1}(k_2-k_n)}{k_n+1} & \ldots & \frac{m_{n-1}(k_{n-1}-k_n)}{k_n+1}+1 \\ \frac{m_n(k_1-k_n)}{k_n+1}-\frac{k_1+1}{k_n+1} & \frac{m_n(k_2-k_n)}{k_n+1}-\frac{k_2+1}{k_n+1} & \ldots & \frac{m_n(k_{n-1}-k_n)}{k_n+1}-\frac{k_{n-1}+1}{k_n+1} \end{pmatrix}.$$

Прості обчислення з визначниками приводять до висновку, що для всіх $k_i = 0, 1, 2, \ldots$, $m_i = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, n$, будемо мати $\operatorname{rank}(M) = n - 1$, і, отже, ненульового розв'язку не існує.

Таким чином, розклад локально нільпотентного диференціювання $\tilde{D}$ не може містити моногенних диференціювань, отже, воно є елементарним.

Те, що диференціювання (16) не можуть бути локально нільпотентними, можна вивести і з теорії слайсів (див. [7, с. 26, 27]), одним із наслідків якої є така лема.

Лема 1. *Якщо існує поліном* $f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ *такий, що для даного локально нільпотентного диференціювання* D *елемент* $D(f)$ *ділиться на* f, *то* $D(f) = 0$.

Звідси безпосередньо випливає, що D_k не може бути локально нільпотентним ні для якого k, адже якщо $\alpha_j \neq 0$, то $D_k(x_j) = \alpha_j x^{k+1_j}$ ділиться на x_j.

З теореми 4 отримуємо наслідки для диференціювань, що є сумами кількох кореневих.

***Наслідок* 1.** *Довільне двокореневе локально нільпотентне диференціювання* D *після відповідної перестановки координат є трикутним і має одну з форм*

$$(\alpha_1 x^k + \alpha_2 x^l)\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad k_1 = l_1 = 0, \tag{24}$$

$$\alpha_1 x^k \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 x^l \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad k_1 = l_1 = l_2 = 0. \tag{25}$$

Доведення. Припустимо, що одне з двох кореневих диференціювань, які входять до розкладу D, не є елементарним, і D_k — його найбільша моногенна форма. За попередньою теоремою існує j таке, що $D_k^s(x_j) \neq 0$ для всіх s. Отже, мономи мультистепеня $sk + 1_j$ будуть входити з ненульовими коефіцієнтами. Оскільки диференціювання локально нільпотентне, то згідно з формулою (10) для знищення такого монома повинні існувати s_0, s_1, s_2, $s_0 = s_1 + s_2$, і моногенна частина другого диференціювання D_l мультистепеня l такі, що $s_0 k + 1_j = s_1 k + 1_j + s_2 l$, звідки $k = l$. Це означає, що D є кореневим. Отже, обидва кореневих диференціювання повинні бути елементарними і після відповідного перейменування координат мають набути однієї з вказаних форм. Покажемо, що у випадку (25) диференціювання є трикутним. Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з двома невідомими $xk + yl = 0$, $x + y = 0$. Враховуючи, що $k_1 = l_2 = -1$, а решта координат цих векторів є невід'ємними, можна додати останній рядок матриці системи до інших і отримати в перших двох рядках і стовпчиках підматрицю з нульовою діагоналлю і додатними іншими елементами. Отже, ранг цієї системи дорівнює 2 і вона не має ненульових розв'язків. Це означає, що для даного s_0 подання мультистепеня як $s_1 k + s_2 l$, $s_0 = s_1 + s_2$ є однозначним. Таким чином, всі мономи мультистепеня вказаного виду можна отримати лише послідовним застосуванням D_k, D_l в довільному порядку s_1 та s_2 разів. В залежності від порядку застосування коефіцієнти при мономах $x^{s_1 k + s_2 l}$ будуть різними, але однакового знаку, який буде збігатися зі знаком $\alpha^{s_1}\beta^{s_2}$. Але тоді рівність $D^{s_0}(x_j) = 0$ можлива лише за умови, що для всіх s_1, s_2, $s_0 = s_1 + s_2$, мультистепінь $s_1 k + s_2 l$ містить від'ємну координату. Це може бути тільки або перша, або друга. Не втрачаючи загальності можна вважати, що це перша. Тоді при $s_1 = 1$, $s_2 = s_0 - 1$ можемо отримати від'ємну першу координату мультистепеня лише при $l_1 = 0$. А це і означає трикутність диференціювання.

Наслідок доведено.

Наслідок 2. *Трикореневе локально нільпотентне диференціювання D може містити не більше одного моногенного не елементарного кореневого диференціювання D_k виду* (16), *яке повинно мати вигляд*

$$D = D_k + D_u + D_v, \tag{26}$$

де D_u, D_v є елементарними локально нільпотентними, до того ж мультистепені повинні бути пов'язані лінійним зв'язком з натуральними коефіцієнтами:

$$a \cdot m\deg(D_k) = b \cdot m\deg(D_u) + (a-b)\cdot m\deg(D_v), \quad a, b \in \mathbb{N}, \quad a > b. \tag{27}$$

Доведення. Оскільки D_k не є локально нільпотентними, то для знищення ненульового монома $D_k(x_j)$, згідно з формулою (10), два інших диференціювання D_u, D_v повинні бути такими, щоб мало місце (27), а отже вектор

$m \deg(D_k)$ є лінійною комбінацією з додатними раціональними коефіцієнтами двох інших мультистепенів. Але якщо D_u або D_v теж не є локально нільпотентним, то їх мультистепені теж повинні бути лінійними комбінаціями двох інших з додатними раціональними коефіцієнтами, що, очевидно, неможливо. Отже, обидва диференціювання D_u, D_v повинні бути локально нільпотентними, а отже елементарними.

Наслідок доведено.

Інтерес до трикореневих локально нільпотентних диференціювань викликаний тим, що диференціювання (4) та (6), експоненти яких є автоморфізмами Нагати (5) та Аніки відповідно, мають форму (26), до того ж для них у формулі (27) $a = 2$, $b = 1$.

4. Трикореневі диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних. Перейдемо до опису локально нільпотентних диференціювань D алгебри поліномів від трьох змінних вигляду (26), тобто $D = D_k + D_u + D_v$. Будемо вважати, що елементарні диференціювання мають вигляд

$$D_u = \beta x_2^{u_2} x_3^{u_3} \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad D_v = \gamma x_1^{v_1} x_3^{v_3} \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{F}, \tag{28}$$

адже можна виконати переіменування змінних. Тоді, згідно з формулами (16), (14), при $n = 3$ отримаємо

$$D(x_3) = D_k(x_3) = \alpha_1 \varepsilon^1 (k + 1_1)(x_3) + \alpha_1 \varepsilon^2 (k + 1_2)(x_3) =$$

$$= -\frac{\alpha_1(k_1 + 1) + \alpha_2(k_2 + 1)}{k_3 + 1} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3 + 1}.$$

Оскільки $D(x_3)$ ділиться на x_3, то за лемою 1 маємо $\alpha_1(k_1 + 1) + \alpha_2(k_2 + 1) = 0$. Отже, з точністю до сталого множника можна вважати, що

$$D_k = (k_2 + 1) x_1^{k_1 + 1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_1} - (k_1 + 1) x_1^{k_1} x_2^{k_2 + 1} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{29}$$

Оскільки x_3 належить ядру диференціювання $D_k + D_u + D_v$, то воно буде локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли таким буде диференціювання алгебри поліномів від двох змінних $\bar{D} = \bar{D}_k + \bar{D}_u + \bar{D}_v$:

$$\bar{D}_k = (k_2 + 1) x_1^{k_1 + 1} x_2^{k_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - (k_1 + 1) x_1^{k_1} x_2^{k_2 + 1} \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\bar{D}_u = x_2^{u_2} \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \bar{D}_v = x_1^{v_1} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Для характеризації локально нільпотентних диференціювань такого виду скористаємося теоремою 1. Якщо покласти $h = x_1$, а потім $h = x_2$ у формулі (7), то отримаємо

$$D(x_1) = -\alpha(P) \frac{\partial P}{\partial x_2}, \qquad D(x_2) = \alpha(P) \frac{\partial P}{\partial x_1}.$$

Нехай $u(t)$ — первісна до функції $\alpha(t)$, тобто $\frac{du}{dt} = \alpha(t)$, $u(0) = 0$, тоді

$$D(x_1) = -\frac{\partial u(P)}{\partial x_2}, \qquad D(x_2) = \frac{\partial u(P)}{\partial x_1}.$$

Якщо D є локально нільпотентним, то для нього повинно існувати вказане зображення, а отже, мають існувати функція $u(t)$ та координатний поліном $P = P(x_1, x_2)$ такі, що виконуються рівності

$$-\frac{\partial u(P)}{\partial x_2} = (k_2+1)x_1^{k_1+1}x_2^{k_2} + \beta x_2^{u_2}, \qquad \frac{\partial u(P)}{\partial x_1} = -(k_1+1)x_1^{k_1}x_2^{k_2+1} + \gamma x_1^{\upsilon_1}.$$

Легко бачити, що з точністю до константи єдиним розв'язком системи є функція

$$u(P) = \psi(x_1, x_2) = -x_1^{k_1+1}x_2^{k_2+1} + \frac{\gamma}{\upsilon_1+1}x_1^{\upsilon_1+1} - \frac{\beta}{u_2+1}x_2^{u_2+1}. \tag{30}$$

Поліном $u(P)$ може бути сумою трьох мономів лише за таких умов:

1) P є мономом, а $u(t)$ — сумою трьох мономів ненульового степеня;

2) P є сумою двох мономів, а $u(t) = At^2$;

3) P є сумою трьох мономів, а $u(t) = At$, $A \in \mathbb{F}$.

У першому випадку кожен моном $u(P)$ повинен ділитися на моном P, що, очевидно, не виконується у правій частині (30). У третьому випадку з точністю до сталого множника P повинно мати вигляд правої частини (30). Згідно з формулою (27) $ak_1 = -b + (a-b)u_2$, $ak_2 = b\upsilon_1 - (a-b)$, а отже, $u_2, \upsilon_1 > 0$. Тоді точка $(0, 0)$ є спільним нулем частинних похідних $\frac{\partial P}{\partial x_1}$, $\frac{\partial P}{\partial x_2}$, а отже, P не може бути координатним.

У другому випадку для того щоб виконувалось (30), поліном P повинен мати вигляд $P = p_1x_1^{m_1} + p_2x_2^{m_2}$, звідки $2m_1 = \upsilon_1 + 1$, $2m_2 = u_2 + 1$, $m_1 = k_1 + 1$, $m_2 = k_2 + 1$. Отже, співвідношення (27) набирає вигляду

$$2k_1 = -1 + \upsilon_1, \qquad 2k_2 = u_2 - 1. \tag{31}$$

Крім того, для того щоб вказані частинні похідні не дорівнювали одночасно нулю, очевидно, що або m_1, або m_2 повинно дорівнювати 1. Не втрачаючи загальності вважаємо, що $m_1 = 1$, тоді $k_1 = 0$, а поліном $P = x_1 + x_2^{m_2}$ є, очевидно, координатним. При цьому із співвідношення (31) отримуємо $\upsilon_1 = 1$, $u_2 = 2k_2 + 1$ і приходимо до диференціювання $\bar{D}$, що є сумою трьох кореневих:

$$\bar{D}_k = (k_2+1)x_1x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^{k_2+1}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\bar{D}_u = \beta x_2^{2k_2+1}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \bar{D}_\upsilon = \gamma x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Лема 2. *Диференціювання* $\bar{D} = \bar{D}_k + \bar{D}_u + \bar{D}_\upsilon$ *є локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли* $\beta\gamma = -(k_2+1)$.

Доведення. Застосуємо теорему 2. Для диференціювання $\bar{D}$ маємо $d^* = 2k_2 + 1$. Оскільки

$$\bar{D}^2(x_2) = (k_2 + 1 + \gamma\beta)x_2^{2k_2+1},$$

то згідно з лемою 1, якщо $\bar{D}$ локально нільпотентне, то $\bar{D}^{d^*}(x_2^{2k_2+1}) = 0$. Якщо $\bar{D}^2(x_2) \neq 0$, то поліном $(\bar{D}_k + \bar{D}_u + \bar{D}_v)^{2k_2+1}(x_2^{2k_2+1})$ буде містити моном

$$\bar{D}_v^{2k_2+1}(x_2^{2k_2+1}) = (2k_2+1)!\,\gamma^{2k_2+1}x_1^{2k_2+1}.$$

При цьому з огляду на те, що друга координата $m\deg(D_v) = v$ дорівнює -1, а k_2, $u_2 = 2k_2 + 1 \geq 0$, мультистепінь $(2k_2+1)v$ не можна подати іншим способом як лінійну комбінацію з натуральними коефіцієнтами мультистепенів k, u, v. Отже, $\bar{D}$ може бути локально нільпотентним лише при $\bar{D}^2(x_2) = 0$, тобто $\beta\gamma + k_2 + 1 = 0$. Але тоді диференціювання $\bar{D}$ можна подати таким чином:

$$((k_2+1)x_1 + \beta x_2^{k_2+1})\left(x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x_2} \right). \tag{32}$$

Тепер локальна нільпотентність $\bar{D}$ випливає з того, що поліном $(k_2+1)x_1 + {}$ $+ \beta x_2^{k_2+1}$ належить ядру трикутного диференціювання $x_2^{k_2}\dfrac{\partial}{\partial x_1} - \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial}{\partial x_2}$.

Лему доведено.

Наступна теорема узагальнює результати, що анонсовані в [8, 9].

Теорема 5. *Трикореневі локально нільпотентні диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних після відповідного перейменування змінних з точністю до сталого множника мають одну з форм*

$$((k_2+1)x_1x_3^m + \beta x_2^{k_2+1})x_3^l\left(x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_3^m}{\beta}\frac{\partial}{\partial x_2} \right), \tag{33}$$

$$((k_2+1)x_1 + \beta x_2^{k_2+1}x_3^m)x_3^l\left(x_2^{k_2}x_3^m\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x_2} \right), \tag{34}$$

де $m, l, k_2 = 0, 1, 2, \ldots, \beta \in \mathbb{F}^*$, *або є трикутними однієї з форм*

$$x_2^{k_2}x_3^{k_3}\frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda x_3^l\frac{\partial}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial}{\partial x_3}, \tag{35}$$

$$(x_2^{k_2}x_3^{k_3} + \lambda x_2^{l_2}x_3^{l_3})\frac{\partial}{\partial x_1} + \mu x_3^m\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad (x_2^{k_2}x_3^{k_3} + \lambda x_2^{l_2}x_3^{l_3} + \mu x_2^{m_2}x_3^{m_3})\frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{36}$$

Доведення. Як зазначалося, трикореневе локально нільпотентне диференціювання може містити не більше одного кореневого, що не є елементарним. У цьому випадку $D = D_k + D_u + D_v$, де доданки мають вигляд (28), (29), до того ж співвідношення (31) має виконуватися для мультистепенів мономів від трьох змінних, зокрема $2k_3 = u_3 + v_3$. З іншого боку, з (32) отримуємо вигляд диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних $D = D_k + D_u + D_v$:

$$D_k = (k_2+1)x_1x_2^{k_2}x_3^{k_3}\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2^{k_2+1}x_3^{k_3}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$D_u = \beta x_2^{2k_2+1} x_3^{u_3} \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \bar{D}_v = -\frac{k_2+1}{\beta} x_1 x_3^{v_3} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Якщо $k_3 \geq u_3$, то отримуємо (33), де $m = k_3 - u_3$, $l = u_3$, а якщо $k_3 < u_3$, то $k_3 > v_3$, оскільки $2k_3 = u_3 + v_3$, і приходимо до формули (34), де $m = u_3 - k_3 = k_3 - v_3$, $l = v_3$.

У випадку, коли всі три кореневі диференціювання D_k, D_u, D_v є локально нільпотентними, а отже елементарними, слід провести міркуваннями, аналогічні використаним при доведенні наслідку 1, і розглянути систему лінійних рівнянь $xk + yu + zv = 0$, $x + y + z = 0$. Знову додавання останнього рядка до решти дає підматрицю розмірності 3 у лівому верхньому куті, у якої діагональ складається з нулів, а решта елементів є додатними числами. Оскільки цей мінор відмінний від нуля, то система має лише нульовий розв'язок, а отже, мультистепінь у вигляді $s_1 k + s_2 u + s_3 v$ можна подати не більш як одним способом. При всіх перестановках D_k, D_u, D_v у кількостях s_1, s_2, s_3 будемо отримувати в поліномі $D^{s_0}(x_j)$ мономи $x^{s_1 k + s_2 u + s_3 v}$ з різними коефіцієнтами (в залежності від порядку застосування), але одного знаку, отже, їх сума буде відмінною від нуля. Таким чином, для локальної нільпотентності D необхідно, щоб для всіх s_1, s_2, s_3 таких, що $s_0 = s_1 + s_2 + s_3$, мультистепінь $s_1 k + s_2 u + s_3 v$ містив від'ємну координату. Зокрема, при $s_3 = 0$ це означає, що $D_k + D_u$ є локально нільпотентним, а отже має трикутний вигляд. Те саме має місце для $D_k + D_v$ і $D_u + D_v$. Застосування для них наслідку 1 дає потрібні трикутні форми.

5. Дикі автоморфізми нагатівського типу. Метою цього пункту є дослідження дикості автоморфізмів алгебри поліномів від трьох змінних, які є експонентами диференціювань (33), (34).

Для дослідження ми скористаємося технікою, викладеною у статті [6].

Означення 3. 1. *Перетворення автоморфізму Кремони* $F = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ *виду* $F \to H \circ F$, *де* H *є елементарним автоморфізмом* $x_i \to x_i + a(x_j, x_k)$, $x_j \to x_j$, $x_k \to x_k$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, *називається елементарною редукцією.*

2. *Якщо в результаті перетворення повний степінь відповідної координати понизився, то говорять, що автоморфізм* F *допускає елементарну редукцію, а сама вона є допустимою для нього.*

Далі через $\bar{f}$ будемо позначати старшу однорідну форму полінома *f*. Якщо *f* — координатний поліном і допускає елементарну редукцію, то після її виконання старша форма повинна бути знищена.

Теорема 6 [6]. *Автоморфізм виду* $F = \langle f_1, f_2, x_3 \rangle$ *є ручним тоді і тільки тоді, коли скінченною послідовністю допустимих елементарних редукцій він може бути зведений до одиничного виду* $\mathrm{Id} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$.

Теорема 7. *Нехай* D *— диференціювання виду* (33), *тоді автоморфізм* $\langle \exp(D)(x_1), \exp(D)(x_2), x_3 \rangle$ *є диким тоді і тільки тоді, коли* $m > 0$, $k_2 > 0$.

Доведення. Для випадку диференціювання D виду (33) покладемо

$$g = ((k_2+1) x_1 x_3^m + \beta x_2^{k_2+1}) x_3^l \in \operatorname{Ker} D,$$

тоді для $f_1 = \exp(D)(x_1)$, $f_2 = \exp(D)(x_2)$ будемо мати наступні формули:

$$f_1 = x_1 + gx_2^{k_2} + \sum_{j=2}^{k_2+1}(-1)^{j-1}\frac{g^j}{j!\beta^{j-1}}k_2(k_2-1)\ldots(k_2-j+2)x_2^{k_2-j+1}x_3^{m(j-1)} =$$

$$= x_1 + gx_2^{k_2} - \frac{\beta}{k_2+1}x_3^{-m}\sum_{j=2}^{k_2+1}C_{k_2+1}^{j}\left(\frac{-gx_3^m}{\beta}\right)x_2^{k_2+1-j} =$$

$$= x_1 - \frac{\beta}{k_2+1}x_3^{-m}\left(\left(x_2 - \frac{1}{\beta}gx_3^m\right)^{k_2+1} - x_2^{k_2+1}\right),$$

$$f_2 = x_2 - gx_3^m\frac{1}{\beta}.$$

При $m > 0$

$$\overline{f}_1 = (-1)^{k_2}(k_2+1)^{-1}\beta^{-k_2}\overline{g}^{k_2+1}x_3^{mk_2}, \qquad \deg_{x_3}\overline{f}_1 = k_2m + (\deg_{x_3}\overline{g})(k_2+1).$$

Водночас $\overline{f}_2^{k_2+1}$ має степінь по x_3, що дорівнює $(k_2+1)(m+\deg_{x_3}\overline{g})$, який при $m > 0$ перевищує $\deg_{x_3}\overline{f}_1$, а отже, редукція f_1 неможлива. Редукція полінома f_2, очевидно, можлива лише при $k_2 = 0$, коли $f_1 = x_1 + g$. За допомогою елементарного перетворення $x_2 \to x_2 + \frac{1}{\beta}x_1x_3^m$ отримуємо елемент

$$\left\langle x_1 + g, x_2 + \frac{1}{\beta}x_1x_3^m, x_3\right\rangle.$$

Оскільки в цьому випадку $g = (x_1x_3^m + \beta x_2)x_3^l$, то редукцією $x_1 \to x_1 - \beta x_2x_3^l$ приходимо до елемента $\left\langle x_1, x_2 + \frac{1}{\beta}x_1x_3^m, x_3\right\rangle$, який є ручним.

У випадку $m = 0$ маємо

$$f_1 = x_1 - \frac{\beta}{k_2+1}\left(\left(x_2 - \frac{1}{\beta}g\right)^{k_2+1} - x_2^{k_2+1}\right),$$

$$f_2 = x_2 - g\frac{1}{\beta}, \qquad g = ((k_2+1)x_1 + \beta x_2^{k_2+1})x_3^l.$$

Виконаємо елементарну редукцію $x_1 \to x_1 + \frac{\beta}{k_2+1}x_2^{k_2+1}$ і отримаємо елемент

$$F = \left\langle x_1 + \frac{\beta}{k_2+1}x_2^{k_2+1}, x_2 - g\frac{1}{\beta}, x_3\right\rangle,$$

після чого редукцією $x_2 \to x_2 + \dfrac{k_2+1}{\beta} x_1 x_3^l$ одержуємо елементарний автоморфізм $\left\langle x_1 + \dfrac{\beta}{k_2+1} x_2^{k_2+1}, x_2, x_3 \right\rangle$. Отже, експоненти диференціювань виду (33) є дикими автоморфізмами тоді і тільки тоді, коли $m > 0$, $k_2 > 0$.

Теорему доведено.

1. *Rentschler R.* Operations du groupe additif sur le plan affine // C. r. Acad. sci. A. – 1968. – **267**. – P. 384 – 387.
2. *Tanimoto R.* On Freudenburg's cunterexamples to fourteenth problem of Hilbert // Transformation Groups. – 2006. – **11**, № 2. – P. 269 – 294.
3. *Makar-Limanov L.* Locally nilpotent derivations, a new ring invariant and applications // Lect. Notes. – 1998.
4. *Кац В. Г.* Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста // Изв. АН СССР Сер. мат. – 1968. – № 32. – С. 1923 – 1967.
5. *Popov V.* Problems for problem session // Affine Algebraic Geometry: Conf. Proc., Contemporary. Math. Ser. Amer. Math. Soc. – 2005. – **369**. – P. 12 – 16.
6. *Shestakov I., Umirbaev U.* The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables // J. Amer. Math. Soc. – 2004. – **17**. – P. 197 – 228.
7. *van den Essen A.* Automorphisms and the Jacobian conjecture // Progr. Math. – Basel etc.: Birkhäuser, 2000. – **190**.
8. *Bodnarchuk Yu.* Root locally nilpotent derivations of polynomial algebras // Abstrts 6-th Int. Algebr. Conf. Ukraine. – Kamyanets-Podilsky, 2007. – P. 39, 40.
9. *Bodnarchuk Yu.* Locally nilpotent polynomial derivations which are a sum of several root ones / Abstrts Int. Conf. „Transformation Groups" dedicated to the 70-th anniversary of E. B. Vinberg. – Moscow, 2007. – P. 22, 23.

Одержано 24.11.08,
після доопрацювання — 21.04.09