УДК 519.21

Б. В. Бондарев, С. М. Козырь (Донецк. нац. ун-т)

ОБ ε-ДОСТАТОЧНОМ УПРАВЛЕНИИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ Р. МЕРТОНА С „ФИЗИЧЕСКИМ" БЕЛЫМ ШУМОМ

Merton's problem of finding investment and consumption strategies is considered in the case where the risk assets evolution is described by an exponential model and an integral of some stationary "physical" white noise generated by the centered Poisson process is treated as a main process. We show that optimal controls computed for the limit case are ε-sufficient controls for the initial system.

Розглянуто задачу Р. Мертона про знаходження стратегій інвестування і споживання у випадку, коли еволюція ризикового активу описується експоненціальною моделлю і основним процесом є інтеграл від деякого стаціонарного „фізичного" білого шуму, породженого центрованим процесом Пуассона. Показано, що оптимальні управління, розраховані для граничного випадку, будуть ε-достатніми управліннями для вихідної системи.

1. Введение. Вспомогательные результаты. Пусть эволюция цены $Z(t)$ рискового актива (акции) описывается моделью П. Самуэльсона [1], т. е.

$$Z(t) = Z(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\}. \tag{1}$$

Здесь в качестве основного процесса использован стандартный винеровский процесс $W(t)$; $\mu > 0$ — средняя доходность, σ — коэффициент волатильности. Известно [2], что модель П. Самуэльсона имеет свойство безарбитражности, т. е. „полностью" пригодна для математического моделирования эволюции цены акции. В работе [3] рассмотрена следующая задача: пусть в каждый момент времени $0 \le t \le T$ инвестор, имеющий на момент времени t капитал $X(t)$, часть капитала $(1-u)X(t)$, $0 \le u \le 1$, вкладывает на банковский счет под процентную ставку $r > 0$, на оставшуюся часть капитала $uX(t)$ закупает акции, цена каждой из которых на момент времени t составляет величину $Z(t)$. Естественно предполагать, что $\mu > r$, хотя имеет смысл рассматривать и другие случаи (вспомним длинные и короткие позиции). В каждый момент времени t при наличии капитала x происходит потребление капитала со скоростью $u_1(t,x)$. Пусть $0 < \gamma < 1$, а платежная функция имеет вид

$$V(t,x,u,u_1) = \mathrm{M}\int_t^T e^{-\rho s}\left[u_1(s, X_{t,x}^u(s))\right]^\gamma ds. \tag{2}$$

Процесс эволюции капитала $X_{t,x}(s)$ в момент времени t начинается с капитала x, т. е. $X_{t,x}^u(t) = x$ (случай $0<\gamma<1$ соответствует поведению инвестора, не склонного к риску, $\rho > 0$ — коэффициент непрерывного дисконтирования). Р. Мертон нашел оптимальные управления $\bar{u}$, $\bar{u}_1$ и цену управления, т. е.

$$V(t,x) = V(t,x,\bar{u},\bar{u}_1) = \sup_{u,u_1} V(t,x,u,u_1) = \sup_{u,u_1}\mathrm{M}\int_t^T e^{-\rho s}\left[u_1(s, X_{t,x}(t))\right]^\gamma ds.$$

Оказалось, что

$$\bar{u} = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)}, \qquad \bar{u}_1(t,x) = [e^{\rho t} g(t)]^{1/(\gamma-1)} x, \qquad \nu = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r,$$
$$g(t) = e^{-\rho t}\left[\frac{1-\gamma}{\rho - \nu\gamma}\left(1 - e^{-\frac{(\rho-\nu\gamma)(T-t)}{1-\gamma}}\right)\right]^{1-\gamma}, \qquad V(t,x) = g(t)x^{\gamma}. \tag{3}$$

На практике, как правило, имеется [4] „физический" белый шум — зависящий от некоторого параметра $\varepsilon > 0$ процесс $\dot{W}_t^{\varepsilon}$, интеграл от которого $W_t^{\varepsilon} = \int_0^t \dot{W}_t^{\varepsilon} ds$ при стремлении $\varepsilon \to 0$ сходится [4 – 7] в слабом смысле к процессу $\sigma W(t)$, где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. Во многих практических случаях кардинальные изменения цены акции происходят в случайные моменты времени хотя и не резко, но довольно часто, а именно, происходит падение доходности, а затем начинается ее медленный рост. Такая ситуация наблюдается, например, при изучении логарифма цен, как функции времени, в случае, когда в случайные моменты времени выплачиваются дивиденды. После выплаты дивидендов цена резко падает на величину дивиденда. По мнению авторов, в этом случае в качестве модели для описания эволюции цены акции имеет смысл рассмотреть процесс

$$Z_{\varepsilon}(t) = Z(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma W_t^{\varepsilon}\right\}, \tag{4}$$

т. е. когда в качестве основного процесса взят интеграл от „физического" белого шума (см. [4, с. 225])

$$\dot{W}_t^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{t/\varepsilon} a\left(\frac{t}{\varepsilon} - s\right)\tilde{\nu}(ds), \tag{5}$$

где $\nu(\Delta t)$ — пуассоновская мера отрезка $[t, t+\Delta t)$ с параметром $\lambda = 1$, $\tilde{\nu}(\Delta t) = \nu(\Delta t) - \Delta t$ (строгое определение дано ниже), и для этого случая рассмотреть задачу Р. Мертона. Стационарный процесс $\dot{W}_t^{\varepsilon}$ будет определен, если [4, с. 225]

$$\int_0^{+\infty} a^2(u)du < +\infty. \tag{6}$$

Действительно, пусть [8, с. 37] каждому полуинтервалу $[a,b)$, $a < b$, $[a,b) \subset \subset (-\infty, +\infty)$, действительной прямой поставлена в соответствие величина $\nu[a,b)$ таким образом, что выполнены условия:

1) $\nu[a,b)$ принимает только целые неотрицательные значения;

2) если $a < c < b$, то $\nu[a,b) = \nu[a,c) + \nu[c,b)$;

3) если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, то случайные величины $\nu[a_1,a_2), \ldots, \nu[a_{n-1},a_n)$ независимы;

4) равномерно по $b - a \to 0$ $\mathrm{P}\{\nu[a,b) > 1\} = o(b-a)$.

Тогда [8, с. 37]

$$\mathrm{P}\{\nu[a,b) = r\} = \frac{[b-a]^r}{r!}\exp\{-[b-a]\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\mathrm{M}\,\nu(\Delta t) = \Delta t$. Пусть $\tilde{\nu}(\Delta t) = \nu(\Delta t) - \Delta t$, тогда $\mathrm{M}\,\tilde{\nu}(\Delta t) = 0$, $\mathrm{M}\,\tilde{\nu}^2(\Delta t) = \Delta t$. Таким образом, на оси $(-\infty, +\infty)$ задана ортогональная стохастическая мера $\tilde{\nu}(\Delta t)$ со структурной функцией $m(\Delta t) = \Delta t$. Для неслучайной функции $a(t)$ такой, что

$$\int\limits_{-\infty}^{t} a^2(t-s)ds < +\infty,$$

что равносильно условию (6), определен [9, с. 219] интеграл по стохастической мере $\tilde{\nu}(\Delta t)$. Далее любую функцию, интегрируемую с квадратом, можно приблизить (в метрике пространства $L_2(-c, t)$) простыми функциями, а при фиксированных $-c < 0 < t < +\infty$ стохастический интеграл от простой функции

$$a_n(t-s) = \sum_{k=1}^{n} a(t-s_k)\chi_{\Delta s_k}(s),$$

где Δs_k принадлежит $\Im$ — полукольцу множеств, определить соотношением

$$\xi_{-c}^{n}(t) = \int\limits_{-c}^{t} a_n(t-s)\tilde{\nu}(ds) = \sum_{k=1}^{n} a(t-s_k)\tilde{\nu}(\Delta s_k).$$

Общий случай получается путем предельного перехода при $n \to \infty$, причем согласно [9, с. 220] стохастический интеграл можно определить как функцию t таким образом, чтобы процесс $\xi_{-c}(t)$ был измерим. Интеграл

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} a(t-s)\tilde{\nu}(ds) \tag{7}$$

при фиксированном $0 \le t < +\infty$ определяется как предел последовательности $\xi_{-c}(t)$ при $c \to +\infty$. В работе [4] отмечено, что процесс (7) — стационарный в узком смысле центрированный случайный процесс. Свойства интеграла $\xi(t)$, очевидно, будут такими же, как и у интеграла $\xi_{-c}(t)$. Например, характеристическая функция процесса $\xi_{-c}(t)$ будет иметь вид

$$\varphi_t(z) = \mathrm{M}\exp\{iz\xi_{-c}(t)\} = \exp\left\{\int\limits_{0}^{t+c} [\exp\{iza(s)\} - 1 - iza(s)]ds\right\}, \tag{8}$$

а характеристическая функция процесса $\xi(t)$

$$\lim_{-c\to-\infty} \varphi_{-c}(z) = \varphi_{\xi}(z) = \mathrm{M}\exp\{iz\xi(t)\} = \exp\left\{\int\limits_{0}^{+\infty} [\exp\{iza(s)\} - 1 - iza(s)]ds\right\}. \tag{9}$$

Если дополнительно к (6) выполнено условие

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \left\{\int\limits_{t}^{+\infty} a^2(s)\,ds\right\}^{1/2} dt < +\infty, \tag{10}$$

то (см. [4, с. 225]) справедливо условие

$$\int\limits_t^{+\infty} \left(\left| \mathrm{M}\{\xi(\tau)/\Im_0\} \right|^2 \right)^{1/2} d\tau < +\infty,$$

являющееся некоторым требованием слабой зависимости процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$, достаточным для того (см. [1, с. 221]), чтобы было справедливо разложение

$$W_t^{\varepsilon} = \int\limits_0^t W_s^{\varepsilon} ds = \sigma\tilde{\nu}_{\varepsilon}(t) + \tilde{V}_{\varepsilon}(t),$$

где $\tilde{\nu}_{\varepsilon}(t)$ — квадратично-интегрируемый мартингал, являющийся процессом со стационарными в узком смысле приращениями, такой, что $\tilde{\nu}_{\varepsilon}(t) \Rightarrow W(t)$, $t \in [0, T]$, $\varepsilon \to 0$, а $\tilde{V}_{\varepsilon}(t)$ — асимптотически пренебрежимый процесс, т. е. $\sup\limits_{0 \leq t \leq T} \left| \tilde{V}_{\varepsilon}(t) \right| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ по вероятности. В дальнейшем для рассматриваемого случая будет приведен конкретный вид функций $\tilde{\nu}_{\varepsilon}(t)$, $\tilde{V}_{\varepsilon}(t)$, $t \in [0, T]$. В частности, если в дополнение к (6), (10) выполнено и условие

$$\int\limits_0^{+\infty} \left| a(s) \right| ds < +\infty, \tag{11}$$

то

$$\sigma^2 = 2\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{M}\,\xi(t)\xi(0)\,dt = 2\int\limits_0^{+\infty} a(s) \int\limits_0^s a(u)\,du\,ds =$$

$$= 2\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^s a(u)\,du\,ds \int\limits_0^s a(u)\,du = \left[\int\limits_0^{+\infty} a(s)\,ds \right]^2$$

и (см. [4, с. 225])

$$\sigma = \int\limits_0^{+\infty} a(s)\,ds.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\sigma \neq 0$, так как в противном случае не будет диффузионной аппроксимации и поставленная впоследствии задача не будет иметь смысла.

Пусть

$$b(t) = \int\limits_t^{+\infty} a(s)\,ds. \tag{12}$$

Будем предполагать, что выполняются условия

$$\int\limits_t^{+\infty} b^2(t)\,dt < +\infty, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \left\{ \int\limits_t^{+\infty} b^2(s)\,ds \right\}^{1/2} dt < \infty. \tag{13}$$

Введем [4 – 6] процесс

$$V(t) = \int\limits_t^{+\infty} \mathrm{M}\{\xi(\tau)/\Im_t\}\,d\tau, \qquad t \geq 0.$$

Процесс $V(t)$ определен, если выполнены условия (13). Нетрудно убедиться в том, что при наложенных ограничениях справедливы равенства (использован стохастический вариант теоремы Фубини)

$$V(t) = \int_t^{+\infty} \mathrm{M}\left\{ \int_{-\infty}^{t} a(\tau - s)\tilde{\nu}(ds)/\mathfrak{F}_t \right\} d\tau + \int_t^{+\infty} \mathrm{M}\left\{ \int_t^{\tau} a(\tau - s)\tilde{\nu}(ds)/\mathfrak{F}_t \right\} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \int_{t-s}^{+\infty} a(\tau)d\tau\tilde{\nu}(ds) = \int_{-\infty}^{t} b(t-s)\tilde{\nu}(ds). \tag{14}$$

Дополнительно к (13) будем предполагать, что функция $b(s)$ ограничена:

$$\left|b(s)\right| \le c < +\infty, \tag{15}$$

тогда выражение для экспоненциального момента процесса $V(t)$ будет иметь вид

$$\varphi_V(z) = \mathrm{M}\exp\{zV(t)\} = \exp\left\{ \int_0^{+\infty} [\exp\{zb(s)\} - 1 - zb(s)]ds \right\}. \tag{16}$$

Действительно, пусть

$$V_{-c}(t) = \int_{-c}^{t} b(t-s)\tilde{\nu}(ds),$$

для простых функций

$$b_n(t-s) = \sum_{k=1}^{n} b(t-s_k)\chi_{\Delta s_k}(s)$$

интеграл принимает вид

$$V_{-c}^{n}(t) = \int_{-c}^{t} b_n(t-s)\tilde{\nu}(ds) = \sum_{k=1}^{n} b(t-s_k)\tilde{\nu}(\Delta s_k).$$

В силу независимости значений пуассоновских величин $\tilde{\nu}(\Delta s_k)$ при разных k, ограниченности $b(t)$ имеем

$$\mathrm{M}\exp\{zV_{-c}^{n}(t)\} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{M}\exp\{zb(t-s_k)\tilde{\nu}(\Delta s_k)\} =$$

$$= \exp\left\{ \sum_{k=1}^{n} [\exp(zb(t-s_k)) - 1 - zb(t-s_k)]\Delta s_k \right\}. \tag{17}$$

Переходя в (17) к пределу при $n \to +\infty$ (предельный переход возможен в силу ограниченности и квадратичной интегрируемости функции $b(s)$), получаем

$$\mathrm{M}\exp\{zV_{-c}(t)\} = \exp\left\{ \int_0^{t+c} [\exp(zb(s)) - 1 - zb(s)]\, ds \right\}.$$

Перейдем в последнем соотношении к пределу при $c \to +\infty$. Предельный переход закономерен в силу условий (13), (15) и неравенства

$$\left|e^x - 1 - x\right| \le \frac{x^2}{2} e^{|x|}.$$

Таким образом, интегралы существуют и получаем (16).

Основной процесс

$$W_t^\varepsilon = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{s/\varepsilon} a\left(\frac{s}{\varepsilon} - s\right) \tilde{\nu}(d\tau)\, ds$$

в случае выполнения условий (6), (10), (11), (13), (15) в модели (4) представим в виде [10]

$$W_t^\varepsilon = \sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t) - \sqrt{\varepsilon} V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \sqrt{\varepsilon} V(0) = \sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t) + \tilde{V}_\varepsilon(t). \tag{18}$$

Здесь и далее

$$\tilde{\nu}_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\left[\nu\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \frac{t}{\varepsilon}\right],$$

$\nu(t) = \nu[0, t)$ — пуассоновский процесс, $\mathrm{M}\,\nu(t) = t$, причем стационарный процесс

$$V(t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{t-\tau}^{+\infty} \alpha(s) ds \tilde{\nu}(d\tau)$$

имеет нулевое среднее, а процесс

$$\tilde{V}_\varepsilon(t) = -\sqrt{\varepsilon} V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \sqrt{\varepsilon} V(0)$$

такой, что по вероятности $\sup\limits_{0 \le t \le T} \left|\tilde{V}_\varepsilon(t)\right| \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Таким образом, модель эволюции цены акции

$$Z_\varepsilon(t) = Z(0) \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t - \sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t) - \tilde{V}_\varepsilon(t)\right\} \tag{19}$$

учитывает „дивидендные" скачки вниз на величину дивиденда с небольшой погрешностью $\tilde{V}_\varepsilon(t)$. Наряду с (4) имеет смысл рассматривать „близкую" к (4) модель

$$\bar{Z}_\varepsilon(t) = Z(0) \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t - \sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t)\right\}, \tag{20}$$

которая (см. [11, с. 51]) будет иметь свойство безарбитражности. Сравнивая доходности моделей (4) и (20), убеждаемся в том, что

$$\ln \frac{Z_\varepsilon(t)}{Z(0)} - \ln \frac{\bar{Z}_\varepsilon(t)}{Z(0)} = \ln Z_\varepsilon(t) - \ln \bar{Z}_\varepsilon(t) = -\sqrt{\varepsilon}\tilde{V}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

где $-\sqrt{\varepsilon}\tilde{V}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ — стационарный процесс с нулевым средним. Таким образом, вряд ли правомерна рекомендация инвестору вкладывать весь капитал в акции. Эти действия могут привести к противоположному результату. Для модели (4) имеет смысл рассмотреть задачу Р. Мертона еще и в силу того, что эта модель при достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет ε-мартингалом [12, с. 766] (см. лемму 1, формулу (21)). Естественной областью возникновения таких случаев будут [12] рынки с операционными затратами. Сложность решения задачи Р. Мертона в случае модели (4) заключается в том, что $X_\varepsilon(t)$ — процесс, описывающий эволюцию капитала инвестора, является решением уравнения, подверженного случайным возмущениям, в которых содержится слагаемое $\tilde{V}_\varepsilon(t)$ (см. (18)), т. е. решение не будет марковским процессом и применение в данном случае приемов управления марковскими системами неправомерно. Однако будет показано, что использование для управления процессом $X_\varepsilon(t)$ оптимальных управлений (3) даст эффект (в смысле величины функционала качества (2)) не меньший, чем некоторое значение (например, некоторая заданная средняя дисконтированная величина потребления за весь период минус некоторая найденная в явном виде величина ρ_ε, $\rho_\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to 0$). Если этот эффект нас устраивает, то будем говорить, что управления (3) ε-достаточны для управления процессом $X_\varepsilon(t)$.

2. Основной результат. Предположим, что поведение цены акции описывается процессом $Z_\varepsilon(t)$, $0 \le t \le T$. Пусть вспомогательный процесс $\bar{Z}_\varepsilon(t)$ задан соотношением (20).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (6), (10), (11), (13), (15), $m \ge 2$ — *некоторое фиксированное целое число. Тогда если конечны интегралы*

$$\int_0^{+\infty} |a(s)|^r\, ds < +\infty, \qquad \int_0^{+\infty} |b(s)|^r\, ds < +\infty, \qquad r = 1, \ldots, 2m,$$

то имеет место оценка

$$\sup_{0\le t\le T} \mathrm{M}\left|Z_\varepsilon(t) - \bar{Z}_\varepsilon(t)\right| \le \varepsilon^{\frac{m-1}{4(m+1)}} Z(0)\exp\left\{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\} C_1(T, m, \varepsilon), \tag{21}$$

где

$$C_1(T,m,\varepsilon) = \exp\left\{T\sigma^2 e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\left[\exp\left(\varepsilon^{\frac{m-1}{4(m+1)}}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\exp\left\{\frac{\varepsilon}{4}\exp\left\{2c\sqrt{\varepsilon}\right\}\int_0^{+\infty} b^2(s)\, ds\right\} + 1\right)\left(2^{2m+2}(1+T)D(2m)\right)^{1/4}\right], \tag{22}$$

$D(2m) = (T+1)3^{2m-1}(C_{2m}^V + C_{2m}^{\xi} + \sigma^{2m}4^m C_{2m}^{\tilde{\nu}})$, *постоянные* $\tilde{C}_{2m}^{\xi}$, $C_{2m}^{\tilde{\nu}}$, C_{2m}^V *таковы, что* $\mathrm{M}\,\xi^{2m}(t) = \tilde{C}_{2m}^{\xi} < +\infty$, $\mathrm{M}\,V^{2m}(t) = C_{2m}^V$, $\mathrm{M}\,\tilde{\nu}^{2m}(1) = \tilde{C}_{2m}^{\tilde{\nu}} < +\infty$.

Доказательство. Поскольку

$$\mathrm{M}\exp\{-2\sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t)\} = \mathrm{M}\exp\left\{-\frac{2\sigma t}{\sqrt{\varepsilon}} + 2\sigma\sqrt{\varepsilon}\nu\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{2\sigma t}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}\sum_{k=0}^{+\infty}\exp\left\{2\sigma\sqrt{\varepsilon}k\right\}\frac{e^{-t/\varepsilon}}{k!}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^k =$$

$$= \exp\left\{-\frac{2\sigma t}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{t}{\varepsilon}\right\}\exp\left\{\frac{t}{\varepsilon}e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\} = \exp\left\{\frac{t}{\varepsilon}\left[e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}-2\sigma\sqrt{\varepsilon}-1\right]\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{2T\sigma^2 e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}, \tag{23}$$

то нетрудно заметить, что с учетом представлений (18) справедливо

$$\sup_{0\le t\le T} \mathrm{M}\left|Z_\varepsilon(t)-\bar{Z}_\varepsilon(t)\right| =$$

$$= Z(0)\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}\left|\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right\}-\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t)\right\}\right| \le$$

$$\le Z(0)\sup_{0\le t\le T}\left[\mathrm{M}\exp\left\{2\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+2\sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t)\right\}\right]^{1/2}\left[\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}\left|\exp\left\{\tilde{V}_\varepsilon(t)\right\}-1\right|\right]^{1/2} \le$$

$$\le Z(0)\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T+T\sigma^2 e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\Bigg[\left(\exp(\delta(\varepsilon))-1\right)^{1/2} +$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\left(\mathrm{M}\exp\left\{-\sqrt{\varepsilon}V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\}\exp\left\{\sqrt{\varepsilon}V(0)\right\}+1\right)^{1/4}\times$$

$$\times \mathrm{P}^{1/4}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left(\sqrt{\varepsilon}\left|V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|+\sqrt{\varepsilon}\left|V(0)\right|\right)>\delta(\varepsilon)\right\}\Bigg] \le$$

$$\le Z(0)\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T+T\sigma^2 e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\Bigg[\left(\exp(\delta(\varepsilon))-1\right)^{1/2} +$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\left(\left[\mathrm{M}\exp\left\{-2\sqrt{\varepsilon}V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\}\right]^{1/2}\left[\mathrm{M}\exp\left\{2\sqrt{\varepsilon}V(0)\right\}\right]^{1/2}+1\right)^{1/4}\times$$

$$\times \mathrm{P}^{1/4}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left(\sqrt{\varepsilon}\left|V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|+\sqrt{\varepsilon}\left|V(0)\right|\right)>\delta(\varepsilon)\right\}\Bigg] \le$$

$$\le Z(0)\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T+T\sigma^2 e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\Bigg[\sqrt{\delta(\varepsilon)}\exp\left(\frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right) +$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\left(\left[\mathrm{M}\exp\left\{-2\sqrt{\varepsilon}V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\}\right]^{1/8}\left[\mathrm{M}\exp\left\{2\sqrt{\varepsilon}V(0)\right\}\right]^{1/8}+1\right)\times$$

$$\times \mathrm{P}^{1/4}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left(\sqrt{\varepsilon}\left|V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|+\sqrt{\varepsilon}\left|V(0)\right|\right)>\delta(\varepsilon)\right\}\Bigg]. \tag{24}$$

Далее, так как в силу (17) имеют место оценки

$$\mathrm{M}\exp\left\{-2\sqrt{\varepsilon}V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\} = \exp\left\{\int\limits_0^{+\infty}\left[\exp\left\{-2\sqrt{\varepsilon}b(s)\right\}-1+2\sqrt{\varepsilon}b(s)\right]ds\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{2\varepsilon\int\limits_0^{+\infty} b^2(s)\exp\left\{2\sqrt{\varepsilon}\left|b(s)\right|\right\}ds\right\} \le \exp\left\{\varepsilon 2\exp\left\{2\sqrt{\varepsilon}c\right\}\int\limits_0^{+\infty} b^2(s)ds\right\},$$

$$\mathrm{M}\exp\{-2\sqrt{\varepsilon}V(0)\} \le \exp\left\{\varepsilon 2\exp\left\{2\sqrt{\varepsilon}c\right\}\int\limits_0^{+\infty} b^2(s)ds\right\}, \tag{25}$$

то из (24) с учетом (25) имеем

$$\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}\left|Z_\varepsilon(t)-\bar{Z}_\varepsilon(t)\right| \le Z(0)\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T+T\sigma^2 e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\times$$

$$\times\left[\sqrt{\delta(\varepsilon)}\exp\left(\frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right)+\sup_{0\le t\le T}\left(\exp\left\{\frac{\varepsilon}{4}\exp\left\{2c\sqrt{\varepsilon}\right\}\int\limits_0^{+\infty} b^2(s)\,ds\right\}+1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\ \mathrm{P}^{1/4}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left(\sqrt{\varepsilon}\left|V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|+\sqrt{\varepsilon}\left|V(0)\right|\right)>\delta(\varepsilon)\right\}\right]. \tag{26}$$

В работе [10] доказана оценка

$$\mathrm{M}\sup_{0\le t\le T}\left|V(t)\right|^{2m} \le (T+1)3^{2m-1}(C_{2m}^{V}+C_{2m}^{\xi}+\sigma^{2m}4^m C_{2m}^{\tilde{\nu}}) = D(2m). \tag{27}$$

Из (27) следует оценка

$$\mathrm{M}\,\varepsilon^m\sup_{0\le t\le T/\varepsilon}\left|V(t)\right|^{2m} \le \varepsilon^{m-1}(T+1)D(2m). \tag{28}$$

Поскольку в силу (28) имеем

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left(\sqrt{\varepsilon}\left|V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|+\sqrt{\varepsilon}\left|V(0)\right|\right)>\delta(\varepsilon)\right\} \le$$

$$\le \mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\sqrt{\varepsilon}\left|V\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|>\frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right\}+\mathrm{P}\left\{\sqrt{\varepsilon}\left|V(0)\right|>\frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right\} \le$$

$$\le \frac{2^{2m+1}\varepsilon^{m-1}(T+1)D(2m)}{[\delta(\varepsilon)]^{2m}}, \tag{29}$$

подставляя (29) в (26), получаем оценку

$$\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}\left|Z_\varepsilon(t)-\bar{Z}_\varepsilon(t)\right| \le$$

$$\le Z(0)\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T+T\sigma^2 e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\left[\sqrt{\delta(\varepsilon)}\exp\left(\frac{\delta(\varepsilon)}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le t\le T}\left(\exp\left\{\frac{\varepsilon}{4}\exp\left\{2c\sqrt{\varepsilon}\right\}\int\limits_0^{+\infty} b^2(s)\,ds\right\}+1\right)\left(\frac{2^{2m+2}\varepsilon^{m-1}(T+1)D(2m)}{(\delta(\varepsilon))^{2m}}\right)^{1/4}\right]. \tag{30}$$

Выбирая $\delta(\varepsilon)=\varepsilon^{\frac{m-1}{2(m+1)}}$, из (30) имеем

$$\sup_{0\le t\le T} \mathrm{M}\left|Z_\varepsilon(t)-\bar{Z}_\varepsilon(t)\right| \le$$

$$\le \varepsilon^{\frac{m-1}{4(m+1)}} Z(0)\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T+T\sigma^2 e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\left[\exp\left(\varepsilon^{\frac{m-1}{4(m+1)}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le t\le T}\left(\exp\left\{\frac{\varepsilon}{4}\exp\left\{2c\sqrt{\varepsilon}\right\}\int_0^{+\infty} b^2(s)\,ds\right\}+1\right)\left(2^{2m+2}(T+1)D(2m)\right)^{1/4}\right]. \quad (31)$$

Лемма 1 доказана.

Пусть $\nu(t)$ — пуассоновский процесс, $\mathrm{M}\,\nu(t)=t$, $\tilde{\nu}(t)=\nu(t)-t$, $W_\varepsilon(t)$ — семейство стандартных винеровских процессов. Из [13] следует: $W_\varepsilon(t)$ можно построить на одном вероятностном пространстве с $\sqrt{\varepsilon}\tilde{\nu}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ так, чтобы выполнялась оценка

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\sqrt{\varepsilon}\tilde{\nu}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-\sqrt{\varepsilon}W\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|>3\sqrt{\varepsilon}\delta(\varepsilon)\right\}\le\gamma(\varepsilon), \quad (32)$$

где

$$\gamma(\varepsilon) = \exp\left\{-\frac{1}{64}\delta(\varepsilon)\right\}\left(1+\frac{1}{8\varepsilon}\right)+\frac{9}{2\varepsilon}\exp\{-\delta(\varepsilon)+e^2\}, \quad (33)$$

причем $\delta(\varepsilon)$ можно выбрать так, чтобы $\delta(\varepsilon)\to+\infty$, $\sqrt{\varepsilon}\delta(\varepsilon)\to 0$, $\frac{1}{\varepsilon}\exp\{-\delta(\varepsilon)\}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Оценка (32) будет использована при доказательстве следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть* $m\ge 2$, *тогда справедлива оценка*

$$\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}\left|\bar{Z}_\varepsilon(t)-\tilde{Z}_\varepsilon(t)\right| \le \varepsilon^{\frac{m-1}{4(m+1)}}C_2(T,m,\varepsilon)+C_3(T,m,\varepsilon)\sqrt{\gamma(m,\varepsilon)}, \quad (34)$$

где

$$C_2(T,m,\varepsilon) = 3Z(0)\exp\left\{3\varepsilon^{\frac{m-1}{4(m+1)}}\right\}\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T+\sigma^2 T\right\},$$

$$C_3(T,m,\varepsilon) = Z(0)\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T\right\}\sqrt{2}\left[\exp\left\{\sigma^2 T\right\}+\exp\left\{T\sigma^2 e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\right],$$

$$(35)$$

$$\gamma(m,\varepsilon) = \exp\left\{-\frac{1}{64}\varepsilon^{\frac{m+3}{4(m+1)}}\right\}\left(1+\frac{1}{8\varepsilon}\right)+\frac{9}{2\varepsilon}\exp\left\{-\varepsilon^{-\frac{m+3}{4(m+1)}}+e^2\right\},$$

$$\tilde{Z}_\varepsilon(t) = Z(0)\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\sqrt{\varepsilon}W\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\sup_{0\le t\le T} \mathrm{M}\left|\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t)\right\}-\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\sqrt{\varepsilon}W\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\}\right| \le$$

$$\le \exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T\right\}\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}\left|\exp\{\sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t)\}-\exp\left\{\sigma\sqrt{\varepsilon}W\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\}\right|\times$$

$$\times\chi\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde{\nu}_\varepsilon(t)-\sqrt{\varepsilon}W\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|\le 3\sqrt{\varepsilon}\delta(\varepsilon)\right\}+$$

$$+\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T\right\}\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}\left|\exp\{\sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t)\}-\exp\left\{\sigma\sqrt{\varepsilon}W\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\}\right|\times$$

$$\times\chi\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde{\nu}_\varepsilon(t)-\sqrt{\varepsilon}W\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|> 3\sqrt{\varepsilon}\delta(\varepsilon)\right\}\le$$

$$\le \exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T+\sigma^2T\right\}\left(\left[\exp\left\{3\sqrt{\varepsilon}\delta(\varepsilon)\right\}-1\right]^2\right)^{1/2}+\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T\right\}\times$$

$$\times\sqrt{2}\left[\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}\exp\{2\sigma\tilde{\nu}_\varepsilon(t)\}+\sup_{0\le t\le T}\exp\left\{2\sigma\sqrt{\varepsilon}W\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\mathrm{P}^{1/2}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|\tilde{\nu}_\varepsilon(t)-\sqrt{\varepsilon}W\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|> 3\sqrt{\varepsilon}\delta(\varepsilon)\right\}\le$$

$$\le 3\sqrt{\varepsilon}\delta(\varepsilon)\exp\{3\sqrt{\varepsilon}\delta(\varepsilon)\}\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T+\sigma^2T\right\}+$$

$$+\exp\left\{\left|\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right|T\right\}\sqrt{2}\left[\exp\left\{\sigma^2T\right\}+\exp\left\{T\sigma^2e^{2\sigma\sqrt{\varepsilon}}\right\}\right]\sqrt{\gamma(\varepsilon)}\,.$$

Полагая $\delta(\varepsilon)=\varepsilon^{-\frac{m+3}{4(m+1)}}$, из последнего получаем (34).

Лемма 2 доказана.

Объединяя оценки (21) и (34), получаем

$$\sup_{0\le t\le T}\mathrm{M}\left|Z_\varepsilon(t)-\tilde{Z}_\varepsilon(t)\right|\le$$

$$\le \varepsilon^{\frac{m-1}{4(m+1)}}Z(0)[C_1(T,m,\varepsilon)+C_2(T,m,\varepsilon)]+C_3(T,m,\varepsilon)\sqrt{\gamma(m,\varepsilon)}\,, \tag{36}$$

где $C_1(T,m,\varepsilon)$, $C_2(T,m,\varepsilon)$, $C_3(T,m,\varepsilon)$ и $\gamma(m,\varepsilon)$ приведены в (22) и (35). Таким образом, процесс $Z_\varepsilon(t)$ будет [12] ε-мартингалом.

Пусть на момент времени t у инвестора имеется капитал $X_\varepsilon(t)$. Долю $(1-u)X_\varepsilon(t)$, $0\le u\le 1$, он положит на банковский счет под процентную ставку $r>0$, на оставшуюся сумму $uX_\varepsilon(t)$ купит акции по цене $Z_\varepsilon(t)$ за каждую. Таких акций он сможет купить $uX_\varepsilon(t)/Z_\varepsilon(t)$ штук (считаем, что возможна покупка и части акции). Нетрудно заметить, что цена акции на момент времени $t+\Delta t$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка такова:

$$Z_\varepsilon(t+\Delta t) = Z_\varepsilon(t) + Z_\varepsilon(t)\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\Delta t\right];$$

на банковском счете к моменту времени $t+\Delta t$ накопится сумма $(1-u)X_\varepsilon(t) \times$ $\times\,(1+r\Delta t)$, потребление за промежуток от t до $t+\Delta t$ составит величину $u_1(t, X_\varepsilon(t))\Delta t$.

С учетом изложенного составим балансовое уравнение. С точностью до бесконечно малых высшего порядка имеем равенство

$$X_\varepsilon(t+\Delta t) = (1-u)X_\varepsilon(t)(1+r\Delta t) +$$
$$+\, uX_\varepsilon(t)\left[1+\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\Delta t\right] - u_1(t, X_\varepsilon(t))\Delta t. \qquad (37)$$

Переходя в (37) к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем балансовое уравнение

$$dX_\varepsilon(t) = (1-u)X_\varepsilon(t)rdt +$$
$$+\, uX_\varepsilon(t)\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]dt - u_1\big(t, X_\varepsilon(t)\big)\,dt, \qquad X_\varepsilon(0) = X(0). \qquad (38)$$

Наряду с (38) рассмотрим уравнение

$$dX^\varepsilon(t) = (1-u)X^\varepsilon(t)r\,dt + uX^\varepsilon(t)\mu\,dt + \sigma uX^\varepsilon(t)dW_\varepsilon(t) - u_1\big(t, X^\varepsilon(t)\big)\,dt,$$
$$X^\varepsilon(0) = X(0), \qquad (39)$$

где $W_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}W\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ — некоторый стандартный винеровский процесс, которое является балансовым уравнением задачи Р. Мертона в случае модели П. Самуэльсона.

Рассмотрим задачу Р. Мертона для случая (38). В качестве функционала стоимости опять используем интегральное суммарное потребление

$$V\big(0, X(0), u, u_1\big) = \int_0^T e^{-\rho s}\, \mathrm{M}[u_1(s, X_\varepsilon^u(s))]^\gamma\, ds. \qquad (40)$$

Подставляя в (38) вместо u и $u_1(t,x)$ управления $\bar{u}$ и $\bar{u}_1(t,x)$ из (3), для описания эволюции капитала получаем линейное уравнение

$$dX_\varepsilon(t) = (1-\bar{u})X_\varepsilon(t)r\,dt + \bar{u}X_\varepsilon(t)\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt +$$
$$+\, \bar{u}X_\varepsilon(t)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt - [e^{\rho t}g(t)]^{1/(\gamma-1)}X_\varepsilon(t)\,dt, \qquad X_\varepsilon(0) = X(0). \qquad (41)$$

Решая (41), имеем

$$X_\varepsilon(t) =$$
$$= X(0)\exp\left\{\left[(1-\bar{u})r+\bar{u}\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]t-\int_0^t[e^{\rho s}g(s)]^{1/(\gamma-1)}ds+\bar{u}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right\}. \tag{42}$$

Запишем (42) в несколько ином виде, так как в (42) интеграл

$$\int_0^T[e^{\rho s}g(s)]^{1/(\gamma-1)}ds = +\infty,$$

откуда следует $X_\varepsilon(T)=0$, что соответствует действительности, но не очень удобно для дальнейших выкладок. Пусть $k=\dfrac{\rho-\gamma\nu}{1-\gamma}$, тогда

$$\int_0^t[e^{\rho s}g(s)]^{1/(\gamma-1)}ds = k\int_0^t(1-e^{-k(T-s)})^{-1}ds = \int_{e^{-kT}}^{e^{-k(T-t)}}\frac{dt}{\tau(1-\tau)} =$$
$$= \int_{e^{-kT}}^{e^{-k(T-t)}}\frac{d\tau}{\tau}+\int_{e^{-kT}}^{e^{-k(T-t)}}\frac{d\tau}{1-\tau} = kt-\ln\frac{1-e^{-k(T-t)}}{1-e^{-kT}}. \tag{43}$$

Подставляя (43) в (42), получаем

$$X_\varepsilon(t) =$$
$$= X(0)\exp\left\{\left[(1-\bar{u})r+\bar{u}\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]t-kt\right\}\frac{1-e^{-k(T-t)}}{1-e^{-kT}}\exp\left\{\bar{u}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\xi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\right\}.$$

Нетрудно заметить, что решение задачи (39) при управлениях (3) также можно записать в виде [14]

$$X^\varepsilon(t) = X(0)\exp\left\{\left[(1-\bar{u})r+\bar{u}\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]t-kt\right\}\frac{1-e^{-k(T-t)}}{1-e^{-kT}}\exp\{\bar{u}\sigma W_\omega(t)\},$$

а значение функционала стоимости на траекториях (39) при оптимальном управлении (3) равно

$$\int_0^T e^{-\rho s}\,\mathrm{M}[X^\varepsilon(s)]^\gamma ds = V(0,X(0)) = X^\gamma(0)\left[\frac{1-\gamma}{\rho-\nu\gamma}\left(1-e^{-\frac{(\rho-\nu\gamma)T}{1-\gamma}}\right)\right]^{1-\gamma}.$$

Теорема. *Пусть* $m\ge 2$ *— некоторое фиксированное целое число. Если для управления системой* (38) *инвестор воспользуется оптимальными управлениями* (3), *то будет выполняться неравенство*

$$\mathrm{M}\int_0^T e^{-\rho s}[u_1(s,X_\varepsilon(s))]^\gamma ds \ge X^\gamma(0)\left[\frac{1-\gamma}{\rho-\nu\gamma}\left(1-e^{-\frac{(\rho-\nu\gamma)T}{1-\gamma}}\right)\right]^{1-\gamma} -$$
$$-\varepsilon^{\frac{m-1}{4(m+1)}}C(T)[C_1(T,m,\varepsilon)+C_2(T,m,\varepsilon)]-C(T)C_3(T,m,\varepsilon)\sqrt{\gamma(m,\varepsilon)}, \tag{44}$$

где $u_1(s,x)$ *из* (3), *а*

$$C(T) = \left(\frac{X(0)k}{1-e^{-kT}} \right)^{\gamma} \left[(1-\bar{u})\gamma r + \bar{u}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)\gamma - \rho - k\gamma \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\exp\left\{ (1-\bar{u})\gamma r + \bar{u}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)\gamma - \rho - k\gamma \right\} T - 1 \right],$$

$$k = \frac{\rho - \nu\gamma}{1-\gamma}, \qquad \nu = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)} + r, \qquad m \geq 2.$$

Доказательство. Имеем

$$\left| \int_0^T e^{-\rho s}\, \mathrm{M}[\bar{u}_1(s, X(s))]^{\gamma} ds - \int_0^T e^{-\rho s}\, \mathrm{M}[\bar{u}_1(s, X_\varepsilon(s))]^{\gamma} ds \right| \leq$$

$$\leq k^{\gamma} \int_0^T e^{-\rho s} (1 - e^{-k(T-s)})^{-\gamma}\, \mathrm{M}\left| [X(s)]^{\gamma} - [X_\varepsilon(s)]^{\gamma} \right| ds, \tag{45}$$

$$\mathrm{M}\left| [X(s)]^{\gamma} - [X_\varepsilon(s)]^{\gamma} \right| \leq$$

$$\leq X^{\gamma}(0) \exp\left\{ \left[(1-\bar{u})r + \bar{u}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]\gamma s - \gamma k \right\} \left(\frac{1 - e^{-k(T-s)}}{1 - e^{-kT}} \right)^{\gamma} \times$$

$$\times \sup_{0 \leq s \leq T} \mathrm{M}\left| \exp\{\gamma\bar{u}\sigma W_\varepsilon(s)\} - \exp\left\{ \gamma\bar{u} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) d\tau \right\} \right|. \tag{46}$$

Далее, аналогично (36) (учитывая, что $\gamma\bar{u} \leq 1$) получаем оценку

$$\mathrm{M}\left| \exp\{\gamma\bar{u}\sigma W_\varepsilon(s)\} - \mathrm{M}\exp\left\{ \gamma\bar{u} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right) d\tau \right\} \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon^{\frac{m-1}{4(m+1)}} [C_1(T, m, \varepsilon) + C_2(T, m, \varepsilon)] + C_3(T, m, \varepsilon)\sqrt{\gamma(m, \varepsilon)}. \tag{47}$$

Подставляя (47) в (46), а затем полученное неравенство в (45), находим оценку (44).

Теорема доказана.

Следствие. *Если в качестве рискового актива инвестор использует акцию с выплатами дивидендов в пуассоновские моменты времени, т. е. модель* (20), *а для управления — управления* (3), *то выполняется неравенство*

$$\mathrm{M}\int_0^T e^{-\rho s} [u_1(s, X_\varepsilon(s))]^{\gamma} ds \geq X^{\gamma}(0) \left[\frac{1-\gamma}{\rho - \nu\gamma} \left(1 - e^{-\frac{(\rho - \nu\gamma)T}{1-\gamma}} \right) \right]^{1-\gamma} -$$

$$- \varepsilon^{\frac{m-1}{2(m+1)}} C(T) C_2(T, m, \varepsilon) - C(T) C_3(T, m, \varepsilon)\sqrt{\gamma(m, \varepsilon)}.$$

3. Выводы. Допустим, что поставлена задача: для заданного функционала стоимости найти оптимальное управление некоторой детерминированной системой, которая находится под воздействием семейства случайных возмущений достаточно сложной структуры, зависящего от числового параметра $\varepsilon > 0$. Предположим, что интеграл от этих возмущений при стремлении параметра к нулю сходится в том или ином смысле к винеровскому процессу. При некоторых условиях можно показать, что полученное путем такого предельного перехода уравнение, описывающее динамику управляемого процесса, будет диффузионным уравнением Ито, для которого нахождение оптимальных управлений и цены управления — задача значительно более решаемая, нежели такая же задача для исходной системы. Используя оптимальные управления, рассчитанные для предельной системы, при управлении исходной системой, можно показать, что эффект (в смысле величины функционала качества) от такого управления будет не меньше, чем некоторая в явном виде записанная величина, зависящая от параметра $\varepsilon > 0$ таким образом, что при уменьшении параметра она возрастает и в пределе превращается в цену от управления предельной системой. Если величина такого эффекта нас устраивает, то будем говорить, что использованные управления для исходной системы ε-достаточны. Смысл изложенного в следующем: предложен метод нахождения управлений достаточно сложными системами и расчета эффекта от таких управлений. Применяемые управления не являются оптимальными для исходной системы, однако эффект от таких управлений, в смысле взятого функционала качества, может нас вполне удовлетворить. Как представляется авторам, такой подход к управлению стохастическими системами заслуживает внимания исследователей, в особенности занимающихся прикладными вопросами.

1. *Samuelson P. A.* Rational theory of warrant pricing // Industr. Manag. Rev. – 1965. – № 6. – P. 13 – 31.
2. *Леоненко М. М., Мішура Ю. С., Пархоменко В. М., Ядренко М. Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – Київ: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
3. *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in continuous time model // J. Econ. Theory. – 1971. – № 3. – P. 373 – 413.
4. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Мартингалы и предельные теоремы для случайных процессов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1989. – **45**. – С. 159 – 251.
5. *Чикин Д. О.* Функциональная предельная теорема для стационарных процессов: мартингальный подход // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – **14**, № 4. – С. 731 – 741.
6. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов. – Пер. с англ. – М.: Физматлит, 1994. – Т. 2. – 368 с.
7. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
8. *Скороход А. В.* Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів. – Київ: Вища шк., 1975. – 296 с.
9. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – Киев: Наук. думка, 1978. – 582 с.
10. *Бондарев Б. В., Козырь С. М.* Об оценке скорости сближения решения обыкновенного дифференциального уравнения, возмущенного физическим белым шумом, и решения соответствующего уравнения Ито. I // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2006. – № 2. – С. 63 – 91.
11. *Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств. – М.: ГУВШЭ, 2001. – 260 с.
12. *Гнеденко Б. Д.* Об одном расширении понятия мартингала // Теория вероятностей и ее применения. – 2005. – **50**, № 34. – С. 763 – 767.
13. *Бондарев Б. В., Шурко И. Л.* Диффузионная аппроксимация по вероятности случайных процессов с независимыми приращениями // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1988. – № 9. – С. 3 – 4.
14. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 324 с.

Получено 07.02.08,
после доработки — 07.04.09