УДК 517.977

Л. А. Власенко (Харьков. нац. ун-т),
А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ИМПУЛЬСНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ НЕЯВНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

We study the problem of optimal control with pulsed component for systems governed by abstract Sobolev-type differential equations with unbounded operator coefficients in Hilbert spaces. An operator multiplying the time derivative can be noninvertible. The main assumption is a restriction imposed on the resolvent of the characteristic operator pencil in a certain right half plane. The applications to Sobolev-type partial differential equations are discussed.

Вивчається задача оптимального керування з імпульсною складовою системами, що описуються абстрактними диференціальними рівняннями типу Соболєва з необмеженими операторними коефіцієнтами у гільбертових просторах. Оператор при похідній за часом може бути необоротним. Основне припущення полягає в обмеженні резольвенти характеристичного операторного жмутка у деякій правій півплощині. Наведено застосування до диференціальних рівнянь з частинними похідними типу Соболєва.

1. Введение. Теория оптимального управления в бесконечномерных пространствах (см., например, [1–3] и приведенную в них библиографию) развивается уже несколько десятилетий и позволяет изучать системы управления с распределенными параметрами, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных (см. модели в [4]). В общем случае уравнения в частных производных являются не разрешенными относительно старшей производной по времени — уравнениями не типа Ковалевской или уравнениями типа Соболева [5, 6]. Абстрактной формой этих уравнений являются неявные дифференциально-операторные уравнения, не разрешенные относительно старшей производной. Мы изучаем задачу оптимального импульсного управления для системы, эволюцию которой описывает дифференциально-операторное уравнение

$$\frac{d}{dt}[Ay(t)]+By(t)=f(t)+K_1u_1(t)+K_2u_2, \qquad u_2=\sum_{k=1}^{N}z_k\delta(t-\tau_k), \quad t_0\le t\le T. \tag{1}$$

Здесь A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из комплексного гильбертова пространства Y в комплексное гильбертово пространство X, с областями определения D_A, D_B соответственно, $D=D_A\cap D_B\neq\{0\}$; K_1, K_2 — ограниченные линейные операторы, действующие соответственно из комплексных гильбертовых пространств U_1, U_2 в пространство X; $f(t)$ — вектор-функция со значениями в X; $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Управление системой (1) осуществляется с помощью „обычного" управления $u_1(t)$, которое принимает значения в U_1, и чисто импульсного управления u_2, для которого веса или интенсивности z_k принадлежат U_2, а моменты приложения импульсов τ_k принимают значения из отрезка $[t_0,T]$. Оператор K_2 действует на веса z_k так, что $K_2u_2=\sum_{k=1}^{N}K_2z_k\delta(t-\tau_k)$. Равенство и операции в (1) понимаются в смысле теории распределений или обобщенных функций со значениями в гильбертовом пространстве (см., например, [7], гл. 1).

В общем случае уравнение (1) является *неявным*, а если оператор A имеет нетривиальное ядро, то уравнение (1) и оператор A называются *вырожденными*. Если $X = Y$ и $A = E$ — единичный оператор, то уравнение (1) является *явным* и принимает вид

$$y'(t) + By(t) = f(t) + K_1 u_1(t) + K_2 u_2. \tag{2}$$

Задачи оптимального импульсного управления для явных дифференциальных уравнений (2) с матричными коэффициентами исследовались в [8] (гл. 6), для уравнений в частных производных с чисто импульсным управлением — в [9]. Неявные и вырожденные уравнения (1) с чисто импульсным управлением при иных ограничениях на операторы A, B, чем в данной статье, исследовались в [10]. Системы, описываемые вырожденными конечномерными уравнениями с обычным управлением, т. е. при отсутствии импульсной составляющей, когда $K_2 = 0$, называют дескрипторными [11].

Будем использовать следующую систему обозначений: $\mathcal{L}(X,Y)$ — пространство ограниченных линейных операторов из X в Y, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$; $L_2(a,b;Y)$ — пространство интегрируемых по Бохнеру с квадратом на $[a,b]$ Y-значных функций, $H_Y = L_2(t_0,T;Y)$; $C^p(I,Y)$ — класс Y-значных функций, p раз непрерывно дифференцируемых на $I \subset \mathbb{R}$, $C(I,Y) = C^0(I,Y)$; $W_2^1(a,b;Y)$ — пространство функций из $L_2(a,b;Y)$, обобщенные производные которых принадлежат $L_2(a,b;Y)$; $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A; $\operatorname{Im} A$ — образ оператора A; $\operatorname{Lin}\{a,b,\ldots\}$ — линейная оболочка векторов $a,b,\ldots$; A^* — сопряженный оператор к оператору A; $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ — скалярное произведение в пространстве Y. Функции из $W_2^1(a,b;Y)$ будем считать непрерывными на $[a,b]$, т. е. принадлежащими $C\big([a,b],Y\big)$, изменив их, если это необходимо, на множестве меры нуль.

Уравнению (1) соответствует пучок операторов $\lambda A + B$, определенный на D. Мы предполагаем, что пучок $\lambda A + B$ имеет резольвенту $(\lambda A + B)^{-1} \in \mathcal{L}(X,Y)$ в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geq C_1$ и оператор-функция $A(\lambda A + B)^{-1} \in$ $\in \mathcal{L}(X)$ удовлетворяет оценке

$$\big\|A(\lambda A + B)^{-1}\big\| \leq \frac{C_2}{1 + |\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq C_1, \tag{3}$$

с константой $C_2 > 0$. В этом случае пучок $\lambda A + B$ и уравнение (1) будем называть *параболическими* (по аналогии с явными уравнениями [12], гл. 1, § 3).

Согласно определению в [13, с. 299], оператор-функция $A(\lambda A + B)^{-1}$ является псевдорезольвентой. Оценка (3) позволяет применить эргодические теоремы Хилле для псевдорезольвент [13, с. 299–303] и получить следующие утверждения (подробное изложение см. в [14], п. 4.3.2). Имеют место прямые разложения

$$\begin{gathered} X = X_1 \dot{+} X_2, \qquad X_1 = \overline{AD}, \qquad X_2 = B(\operatorname{Ker} A \cap D), \\ D = D_A \cap D_B = D_1 \dot{+} D_2, \qquad D_1 = (\lambda A + B)^{-1} X_1, \qquad D_2 = \operatorname{Ker} A \cap D. \end{gathered} \tag{4}$$

Пусть Q_1, Q_2 — ограниченные взаимно дополнительные проекторы в X на X_1, X_2 соответственно, P_1, P_2 — взаимно дополнительные проекторы в D на D_1, D_2 соответственно. Оператор

$$G = A + BP_2 = A + Q_2 B, \quad D_G = D$$

переводит D_k в X_k, $k = 1, 2$, и имеет обратный оператор G^{-1}, определенный на $AD\dot{+}X_2$, причем $G^{-1}Q_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$. Оператор

$$W = -Q_1 B G^{-1}, \qquad D_W = AD\dot{+}X_2$$

является генератором аналитической полугруппы S_t на X. Через D_G, D_W обозначим области определения операторов G, W соответственно. Для полугруппы S_t можно записать представление с помощью интеграла от псевдорезольвенты $A(\lambda A + B)^{-1}$, если учесть, что оценка типа (3) выполнена в более широкой области Σ:

$$\left\|A(\lambda A + B)^{-1}\right\| \leq \frac{C_2'}{1 + |\lambda|}, \qquad \lambda \in \Sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\lambda \geq C_1 - \beta \frac{1 + |\operatorname{Im}\lambda|}{C_2}\right\},$$

$$C_2' = \frac{C_2}{1 - \beta}\left(1 + \frac{\beta}{C_2}\right), \quad 0 < \beta < 1.$$

Пусть Γ — контур, состоящий из двух лучей в Σ, которые параллельны соответствующим лучам, образующим границу области Σ. Контур Γ ориентирован так, что область $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ при обходе контура остается слева. Тогда

$$S_t w = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} A(\lambda A + B)^{-1} Q_1 w d\lambda + Q_2 w, \qquad w \in X, \quad t > 0. \tag{5}$$

***Замечание* 1.** В случае явного уравнения (2) разложения (4) принимают вид $Y = X = X_1 = \overline{D} = \overline{D_1} = \overline{D_B}$, $X_2 = D_2 = \{0\}$. При этом представление (5) для аналитической полугруппы S_t с генератором $-B$ упрощается

$$S_t w = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda E + B)^{-1} w d\lambda, \qquad w \in X, \quad t > 0,$$

и является известным (см., например, [13, с. 354, 355]).

2. Неявные параболические дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями в гильбертовых пространствах. Явные параболические дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями исследовались в [15, 16].

Из чисел $t_0, T, \tau_1, \ldots, \tau_N$ выберем все различные и расположим их в порядке возрастания так, чтобы $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = T$. Тогда чисто импульсное управление u_2 в (1) допускает представление

$$u_2 = \sum_{j=0}^{n+1} h_j \delta(t - t_j), \qquad h_j = \sum_{\tau_k = t_j} z_k. \tag{6}$$

Если среди чисел τ_k нет равных t_0 или T, то $h_0 = 0$ или $h_{n+1} = 0$. Будем предполагать, что $f(t) \in L_2(t_0, T; X)$, $u_1(t) \in L_2(t_0, T; U_1)$. Под *решениями уравнения* (1) будем понимать распределения типа функций $y(t) \in L_2(t_0, T; Y)$ таких, что $y(t) \in D$ для почти всех $t \in [t_0, T]$, $Ay(t) \in W_2^1(t_j, t_{j+1}; X)$ для $j = 0, \ldots, n$, $By(t) \in L_2(t_0, T; X)$, для почти всех $t \in [t_0, T]$ справедливо уравнение

$$\frac{d}{dt}[Ay(t)] + By(t) = f(t) + K_1 u_1(t) \tag{7}$$

и в точках t_j выполняются равенства (импульсные воздействия)

$$(Ay)(t_j+0)-(Ay)(t_j-0)=K_2h_j, \quad j=0,\ldots,n. \tag{8}$$

Здесь значения $(Ay)(t_0+0),(Ay)(t_{n+1}-0)$ и $(Ay)(t_j\pm 0)$ для $j=1,\ldots,n$ имеют смысл, поскольку функция $Ay(t)\in W_2^1(t_j,t_{j+1};X)$ является непрерывной на $[t_j,t_{j+1}]$ после возможного изменения на множестве нулевой меры; значение $(Ay)(t_0-0)$ задается:

$$(Ay)(t_0-0)=q, \tag{9}$$

значение $(Ay)(t_{n+1}+0)=(Ay)(T+0)$ определяется как

$$(Ay)(t_{n+1}+0)=(Ay)(t_{n+1}-0)+K_2h_{n+1}.$$

Соотношение (9) является начальным условием для уравнения (1). Управлению $u=\{u_1(t),u_2\}$ соответствует решение $y(t)=y(t,u)$ начальной задачи (1), (9). Импульсные воздействия (8) и начальное условие (9) содержат оператор A. Для явного уравнения с единичным оператором $A=E$ ограничения (8), (9) соответствуют определению системы с толчками в заданные моменты времени [17]. Неявные параболические уравнения с непрерывными правыми частями исследовались в [18] при начальных условиях и импульсных воздействиях, не содержащих оператор A.

Теорема 1. *Пусть выполнена оценка* (3), *оператор G^{-1} ограничен на своей области определения,* $\operatorname{Im} Q_1K_1\subset AD$, $\operatorname{Im} K_2\subset AD$, $q\in AD$, $f(t)\in L_2(t_0,T;X)$, $u_1(t)\in L_2(t_0,T;U_1)$, *значения функции $Q_1f(t)$ принадлежат AD для почти всех $t_0\le t\le T$ и $BG^{-1}Q_1f(t)\in L_2(t_0,T;X)$. Тогда существует единственное решение $y(t)$ задачи* (1), (9), *допускающее представление*

$$y(t)=G^{-1}\Bigg[S_{t-t_0}q+\int\limits_{t_0}^{t}S_{t-s}Q_1\big[f(s)+K_1u_1(s)\big]ds+Q_2\big[f(t)+K_1u_1(t)\big]+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\chi(t-\tau_k)S_{t-\tau_k}K_2z_k\Bigg] \quad \text{для почти всех} \quad t_0\le t\le T, \tag{10}$$

где $\chi(t)$ — функция Хевисайда, которая для отрицательных значений аргумента равна нулю, а для положительных — единице.

Доказательство. Согласно разложению (4) уравнение (7) распадается:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\big[Ay(t)\big]-W\big[Ay(t)\big]=Q_1\tilde f(t),\\ Q_2By(t)=Q_2\tilde f(t), \qquad \tilde f(t)=f(t)+K_1u_1(t).\end{gathered} \tag{11}$$

В силу теоремы 2.9 [19] (гл. 4) первое уравнение в (11) имеет единственное сильное решение $Ay(t)$, удовлетворяющее начальному условию $(Ay)(t_0+0)=a\in AD$. Поэтому для любого вектора $a\in AD$ существует единственная функция $y(t)\in$ $\in L_2(t_0,T;Y)$ такая, что $y(t)\in D$ для почти всех $t\in[t_0,T]$, $Ay(t)\in W_2^1(t_0,T;X)$, $By(t)\in L_2(t_0,T;X)$, $y(t)$ удовлетворяет соотношениям (11) для почти всех $t\in$ $\in[t_0,T]$ и начальному условию $(Ay)(t_0+0)=a$. Почти всюду на $[t_0,T]$ имеем

$$y(t)=P_1y(t)+P_2y(t)=G^{-1}\big[Ay(t)+Q_2By(t)\big]=$$

$$= G^{-1}\left[S_{t-t_0}a + \int\limits_{t_0}^{t} S_{t-s}Q_1\tilde{f}(s)ds + Q_2\tilde{f}(t)\right].$$

Последовательно применим этот результат к уравнению (7) на отрезках $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, n+1$, с начальными условиями $(Ay)(t_j + 0) = q_j = (Ay)(t_j - 0) + K_2h_j \in AD$. Тогда получим, что существует единственное решение $y(t)$ задачи (1), (9) на $[t_0, T]$, причем

$$y(t) = G^{-1}\left[S_{t-t_j}q_j + \int\limits_{t_j}^{t} S_{t-s}Q_1\tilde{f}(s)ds + Q_2\tilde{f}(t)\right] \tag{12}$$

$$\text{для почти всех} \quad t_j \le t \le t_{j+1},$$

и для $j = 0, 1, \ldots, n+1$.

Убедимся в справедливости формулы (10). Непосредственно из (12) при $j = 0$ устанавливаем, что формула (10) справедлива при почти всех $t_0 \le t \le t_1$. Далее, в (12) при $j = 1$ подставим выражение для q_1, в котором $(Ay)(t_1 - 0)$ представим с помощью (12) при $j = 0$. Это позволяет установить, что функция $y(t)$ (12) допускает представление (10) также при почти всех $t_1 \le t \le t_2$. Проводя аналогичные рассуждения последовательно для отрезков $[t_2, t_3], \ldots, [t_n, t_{n+1}]$, получаем требуемый результат.

Теорема доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что выполняются условия теоремы 1, обеспечивающие существование и единственность решения задачи (1), (9).

***Замечание* 2.** Если оценка (3) выполняется в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, то оператор G^{-1} ограничен и $AD = X_1$ [14] (п. 2.3.1). Поэтому также выполняются следующие условия теоремы 1: $\operatorname{Im} Q_1K_1 \subset AD$; $Q_1f(t) \in AD$; $BG^{-1}Q_1f(t) \in L_2(t_0, T; X)$, если $f(t) \in L_2(t_0, T; X)$.

3. Оптимальное импульсное управление в фиксированные моменты времени. Обозначим через $z = \{z_1, \ldots, z_N\}$ вектор пространства $U_2^N = U_2 \times \ldots \times U_2$, через $h = \{h_0, h_1, \ldots, h_{n+1}\}$ вектор пространства U_2^{n+2} и через $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$ вектор пространства $\mathbb{R}^N$. Введем множество векторов $\Theta = \{\tau \in \mathbb{R}^N : \tau_k \in [t_0, T]\}$.

Для оценки качества управления $u = \{u_1(t), u_2\}$, которое управляет системой (1), (9), определим функционал

$$J(u) = J(u_1, u_2) = J(u_1, \tau, z) =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \left[\langle Ry(t), y(t)\rangle_Y + \langle F_1u_1(t), u_1(t)\rangle_{U_1}\right] dt + \langle F_2z, z\rangle_{U_2^N}. \tag{13}$$

Здесь операторы $R \in \mathcal{L}(Y)$, $F_1 \in \mathcal{L}(U_1)$ и $F_2 \in \mathcal{L}(U_2^N)$ являются неотрицательно определенными и, более того, $F_1 \ge \alpha E$, $F_2 \ge \alpha E$, $\alpha > 0$, E — единичный оператор в соответствующем пространстве; векторы $\tau \in \Theta$ и $z \in U_2^N$ соответствуют чисто импульсному управлению u_2 в (1). Пусть сначала управление системой (1), (9) осуществляется путем изменения „обычного” управления $u_1(t)$ и интенсивностей $z_1, \ldots, z_N$ в фиксированные моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_N$. Задача заключается в нахождении минимума

$$\min_{\substack{u_1 \in L_2 \\ z \in U_2^N}} J(u_1, \tau, z) \tag{14}$$

функционала качества (13) на решениях $y(t) = y(t, u)$ системы (1), (9). Управление $u_{*\tau}$, на котором достигается минимум (14) функционала качества (13), будем называть *τ-оптимальным управлением*, а соответствующее решение $y_{*\tau}(t) = y(t, u_{*\tau})$ системы (1), (9) — *τ-оптимальным решением*. В следующей теореме устанавливаются существование и единственность τ-оптимального управления задачи (1), (9), (14).

Теорема 2. *Пусть выполнена оценка* (3), *оператор G^{-1} ограничен на своей области определения,* $\operatorname{Im} Q_1 K_1 \subset AD$, $\operatorname{Im} K_2 \subset AD$, $q \in AD$, $f(t) \in L_2(t_0, T; X)$, *значения функции $Q_1 f(t)$ принадлежат AD для почти всех $t_0 \le t \le T$ и $BG^{-1} Q_1 f(t) \in L_2(t_0, T; X)$. Тогда для любого $\tau \in \Theta$ существуют единственные управление $u_{1*\tau}(t) \in L_2(t_0, T; U_1)$, вектор $z_{*\tau} \in U_2^N$ и соответствующее им импульсное управление $u_{*\tau} = \{u_{1*\tau}(t), u_{2*\tau}\}$ с $u_{2*\tau} = \sum_{k=1}^{N} z_{*\tau k} \delta(t - \tau_k)$, на которых достигается минимум* (14) *функционала качества* (13).

Доказательство. При каждом фиксированном $\tau \in \Theta$ представим функционал J (13) как квадратичную форму, определенную на $H_{U_1} \times U_2^N$. Положим

$$\varphi(t) = G^{-1} \left[S_{t-t_0} Q_1 q + \int_{t_0}^{t} S_{t-s} Q_1 f(s) ds + Q_2 f(t) \right].$$

Понятно, что $\varphi(t) \in H_Y$. Введем в рассмотрение ограниченный линейный оператор Ψ_1 из H_{U_1} в H_Y:

$$(\Psi_1 w)(t) = G^{-1} \int_{t_0}^{t} S_{t-s} Q_1 K_1 w(s) ds + G^{-1} Q_2 K_1 w(t). \tag{15}$$

Для каждого $\tau \in \Theta$ определим ограниченный линейный оператор Ψ_2 из U_2^N в H_Y:

$$\Psi_2 v = G^{-1} \sum_{k=1}^{N} \chi(t - \tau_k) S_{t-\tau_k} Q_1 K_2 v_k. \tag{16}$$

Ограниченный линейный оператор $\Psi = \big[\Psi_1; \Psi_2\big] \colon H_{U_1} \times U_2^N \to H_Y$ действует по правилу

$$\Psi\{w, v\} = \Psi_1 w + \Psi_2 v, \tag{17}$$

а ограниченный линейный оператор $F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \colon H_{U_1} \times U_2^N \to H_{U_1} \times U_2^N$ — по правилу

$$F\{w, v\} = \{F_1 w, F_2 v\}.$$

В силу теоремы 1 для любых управления $u_1 \in H_{U_1}$, моментов приложения импульсов $\tau \in \Theta$ и интенсивностей $z \in U_2^N$ существует единственное решение $y(t, u) \in H_Y$ задачи (1), (9) и это решение имеет вид

$$y(t, u) = (\Psi_1 u_1)(t) + (\Psi_2 z)(t) + \varphi(t) = (\Psi\{u_1, z\})(t) + \varphi(t). \tag{18}$$

Тогда функционал $J(u)$ (13) может быть представлен в виде

$$J(u) = \langle R(\Psi\{u_1, z\} + \varphi), \Psi\{u_1, z\} + \varphi\rangle_{H_Y} + \langle F_1 u_1, u_1\rangle_{H_{U_1}} + \langle F_2 z, z\rangle_{U_2^N}.$$

В декартовом произведении пространств $H_{U_1} \times U_2^N$ рассмотрим ограниченный линейный оператор

$$M = F + \Psi^* R\Psi \colon H_{U_1} \times U_2^N \to H_{U_1} \times U_2^N. \tag{19}$$

Оператор M является самосопряженным, а так как

$$\big\langle M\{w, v\}, \{w, v\}\big\rangle_{H_{U_1}\times U_2^N} \geq \alpha\big\|\{w, v\}\big\|^2_{H_{U_1}\times U_2^N},$$

существует ограниченный обратный $M^{-1} \in \mathcal{L}(H_{U_1} \times U_2^N)$ и справедлива оценка

$$\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}. \tag{20}$$

Покажем, что управление $u_{*\tau} = \big\{u_{1*\tau}(t), u_{2*\tau}\big\}$ с $u_{2*\tau} = \sum_{k=1}^N z_{*\tau k}\delta(t-\tau_k)$ является τ-оптимальным, если

$$\big\{u_{1*\tau}(t), z_{*\tau}\big\} = -M^{-1}\Psi^* R\varphi. \tag{21}$$

Действительно, прежде всего заметим, что

$$J(u) = \big\langle M\{u_1, z\}, \{u_1, z\}\big\rangle_{H_{U_1}\times U_2^N} + 2\operatorname{Re}\big\langle \Psi^* R\varphi, \{u_1, z\}\big\rangle_{H_{U_1}\times U_2^N} + \langle R\varphi, \varphi\rangle_{H_Y}. \tag{22}$$

Отсюда получаем

$$J(u) - J(u_{*\tau}) = \Big\langle M\{u_1 - u_{1*\tau}, z - z_{*\tau}\}, \{u_1 - u_{1*\tau}, z - z_{*\tau}\}\Big\rangle_{H_{U_1}\times U_2^N} \geq$$

$$\geq \alpha\Big\|\{u_1 - u_{1*\tau}, z - z_{*\tau}\}\Big\|^2_{H_{U_1}\times U_2^N}.$$

Это означает, что $u_{*\tau}$, которое определяется с помощью (21), является единственным τ-оптимальным управлением.

Теорема доказана.

Из (18), (19), (21) следует, что соотношение

$$F\{u_1, z\} + \Psi^* Ry(u) = 0 \tag{23}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $u = u_{*\tau}$ является τ-оптимальным управлением, а $y = y(u_{*\tau})$ — τ-оптимальным решением. Сопряженный оператор $\Psi^* = \begin{bmatrix}\Psi_1^*\\ \Psi_2^*\end{bmatrix} \colon H_Y \to H_{U_1} \times U_2^N$ к оператору Ψ (15)–(17) определяется через операторы $\Psi_1^* \in \mathcal{L}(H_Y, U_2^N)$, $\Psi_2^* \in \mathcal{L}(H_Y, H_{U_1})$:

$$\begin{gathered}(\Psi_1^* w)(t) = K_1^* Q_1^* \int\limits_t^T S_{s-t}^* G^{-1*} w(s)ds + K_1^* Q_2^* G^{-1*} w(t),\\ (\Psi_2^* w)(t) = \left\{K_2^* Q_1^* \int\limits_{\tau_k}^T S_{s-\tau_k}^* G^{-1*} w(s)ds\right\}_{k=1}^N.\end{gathered} \tag{24}$$

Здесь S_t^* — сопряженная полугруппа к полугруппе S_t с генератором W^* [19] (раздел 1.10). Заметим, что $G^{-1*} = \overline{G^{-1}}^*$. Имеем

$$Q_2^* W^* x = W^* Q_2^* x = 0, \qquad Q_1^* W^* x = W^* Q_1^* x = x \quad \forall x \in D_{W^*},$$

$$Q_1^* S_t^* x = S_t^* Q_1^* x \quad \forall x \in X.$$

Учитывая (24), соотношение (23) переписываем в виде

$$F_1 u_1(t) + K_1^* p(t) = 0, \qquad F_2 z + \{K_2^* Q_1^* p(\tau_k)\}_{k=1}^N = 0, \tag{25}$$

где

$$p(t) = Q_1^* \int\limits_t^T S_{s-t}^* G^{-1*} R y(s) ds + Q_2^* G^{-1*} R y(t). \tag{26}$$

Для явного уравнения (2) функция $p(t)$ (26) принимает вид

$$p(t) = \int\limits_t^T S_{s-t}^* R y(s) ds$$

и является так называемым мягким решением задачи

$$p'(t) - B^* p(t) + R y(t) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad t_0 \le t \le T, \quad p(T) = 0$$

(см. определение в [19]). По аналогии с явным уравнением *мягким решением вырожденной задачи*

$$\big[Q_1^* p(t)\big]' - [BG^{-1}]^* p(t) + G^{-1*} R y(t) = 0 \tag{27}$$

$$\text{для почти всех} \quad t_0 \le t \le T, \quad (Q_1^* p)(T) = 0$$

будем называть функцию $p(t) \in L_2(t_0, T; X)$ такую, что $Q_1^* p(t) \in C([t_0, T], X)$ и $p(t)$ представима в виде (26). Решение задачи (27) будем понимать в смысле мягкого решения. Придерживаясь терминологии для явных систем [1], мягкое решение $p(t)$ (26) задачи (27) будем называть *сопряженным состоянием*. Если $Q_1^* p(t) \in W_2^1(t_0, T; X)$, то из теоремы 2.9, гл. 4 [19, с. 109] следует, что функция $p(t)$ почти всюду удовлетворяет уравнению (27) и поэтому является *сильным решением*.

***Замечание* 3.** Если A, B принадлежат $\mathcal{L}(Y, X)$, т. е. являются ограниченными линейными операторами, то задача (27) принимает вид

$$\big[A^* p(t)\big]' - B^* p(t) + R y(t) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad t_0 \le t \le T, \quad (A^* p)(T) = 0. \tag{28}$$

Теперь можно сформулировать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполнена оценка* (3), *оператор G^{-1} ограничен на своей области определения,* $\operatorname{Im} Q_1 K_1 \subset AD$, $\operatorname{Im} K_2 \subset AD$, $q \in AD$, $f(t) \in L_2(t_0, T; X)$, *значения функции $Q_1 f(t)$ принадлежат AD для почти всех $t_0 \le t \le T$ и* $BG^{-1} Q_1 f(t) \in L_2(t_0, T; X)$. *Тогда для любого $\tau \in \Theta$ задача* (1), (9), (25), (27) *имеет единственное решение* $y(t) = y_{*\tau}(t) \in L_2(t_0, T; Y)$, $p(t) \in L_2(t_0, T; X)$, $u_1(t) = u_{1*\tau}(t) \in L_2(t_0, T; U_1)$, $z = z_{*\tau} \in U_2^N$. *Управление* $u_{*\tau} = \Big\{ u_{1*\tau}(t), \sum_{k=1}^N z_{*\tau k} \times$

$\times\delta(t-\tau_k)\Big\}$ *является* τ*-оптимальным управлением, а функция* $y_{*\tau}(t)$ *— соответствующим* τ*-оптимальным решением.*

С помощью (25) τ-оптимальное управление однозначно определяется через сопряженное состояние $p(t)$. А именно, находим

$$u_{1*\tau}(t) = -F_1^{-1}K_1^*p(t), \qquad z_{*\tau} = -F_2^{-1}\Big\{K_2^*Q_1^*p(\tau_k)\Big\}_{k=1}^{N}. \tag{29}$$

Поэтому для τ-оптимального решения уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d}{dt}[Ay(t)] + By(t) = f(t) - K_1F_1^{-1}K_1^*p(t) - K_2\sum_{k=1}^{N}\varrho_k\delta(t-\tau_k), \quad t_0 \le t \le T, \tag{30}$$

где ϱ_k — компоненты вектора $F_2^{-1}\Big\{K_2^*Q_1^*p(\tau_k)\Big\}_{k=1}^{N} \in U_2^N$:

$$\{\varrho_1, \ldots, \varrho_N\} = F_2^{-1}\Big\{K_2^*Q_1^*p(\tau_k)\Big\}_{k=1}^{N}. \tag{31}$$

Из теоремы 3 вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *Предположим, что выполнены условия теоремы* 3. *Тогда для любого* $\tau \in \Theta$ *задача* (30), (31), (9), (27) *имеет единственное решение* $y(t) = y_{*\tau}(t) \in L_2(t_0,T;Y)$, $p(t) \in L_2(t_0,T;X)$. *Управление* $u_{*\tau} = \Big\{u_{1*\tau}(t), \sum_{k=1}^{N} z_{*\tau k}\delta(t-\tau_k)\Big\}$, *компоненты которого вычисляются по формулам* (29), *является* τ*-оптимальным, а функция* $y_{*\tau}(t)$ *— соответствующим* τ*-оптимальным решением.*

***Замечание* 4.** Из замечания 2 следует, что в случае оценки (3) в окрестности бесконечно удаленной точки выполняются следующие условия теорем 2, 3: оператор G^{-1} ограничен, $\operatorname{Im} Q_1K_1 \subset AD$, $Q_1f(t) \in AD$, $BG^{-1}Q_1f(t) \in L_2(t_0,T;X)$, если $f(t) \in L_2(t_0,T;X)$. Более того, мягкое решение $p(t)$ задачи (27) является таким, что $Q_1^*p(t) \in W_2^1(t_0,T;X)$ и разрешает задачу в сильном смысле.

4. Оптимизация по моментам времени. Теперь управление системой (1), (9) будем осуществлять путем изменения управления $u_1(t) \in L_2(t_0,T;U_1)$, моментов импульсных воздействий $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_N\} \in \Theta$ и соответствующих интенсивностей импульсов $z = \{z_1, \ldots, z_N\} \in U_2^N$. Множество всевозможных импульсных управлений $u = \Big\{u_1(t), u_2 = \sum_{k=1}^{N} z_k\delta(t-\tau_k)\Big\}$ обозначим через U. Ищем минимум функционала качества $J(u)$ (13)

$$\min_{u\in U} J(u). \tag{32}$$

Управление $u_* = \Big\{u_{1*}(t),\ u_{2*} = \sum_{k=1}^{N} z_{*k}\delta(t-\tau_{*k})\Big\}$, на котором достигается этот минимум, будем называть *оптимальным управлением*, а соответствующее решение $y_*(t) = y(t,u_*)$ системы (1), (9) — *оптимальным решением*. Здесь $\tau_* = \{\tau_{*1}, \ldots, \tau_{*N}\}$, $z_* = \{z_{*1}, \ldots, z_{*N}\}$.

Напомним, что мы предполагаем выполнение условий теоремы 1, которые обеспечивают существование и единственность решения задачи (1), (9). Оператор

$\Psi = \Psi(\tau)$ (15)–(17) является сильно непрерывным по $\tau \in \Theta$. Его сопряженный $\Psi^* = \Psi^*(\tau)$, который определяется с помощью операторов Ψ_1^*, Ψ_2^* (24), также является сильно непрерывным по $\tau \in \Theta$. Поэтому сильно непрерывен по $\tau \in \Theta$ оператор $M = M(\tau)$ (19). В силу оценки (20) обратный оператор $M^{-1}(\tau)$ равномерно ограничен и, следовательно, сильно непрерывен по $\tau \in \Theta$. Отсюда получаем, что $\{u_{1*\tau}(t), z_{*\tau}\}$ (21), как вектор-функция от $\tau \in \Theta$ со значениями в $H_{U_1} \times U_2^N$, непрерывна. Используя представление (22), устанавливаем, что

$$\min_{\substack{u_1 \in L_2 \\ z \in U_2^N}} J(u_1, \tau, z) = J(u_{*\tau})$$

является функцией, непрерывной по $\tau \in \Theta$. Поэтому существует элемент $\tau_* \in \Theta$, на котором достигается минимум функции $J(u_{*\tau})$:

$$\min_{\tau \in \Theta} J(u_{*\tau}) = J(u_{*\tau_*}).$$

Тогда оптимальное управление u_* есть

$$u_* = u_{*\tau_*} = \left\{ u_{1*}(t), \sum_{k=1}^{N} z_{*k}\delta(t - \tau_{*k}) \right\}, \qquad \big\{u_{1*}(t), z_*\big\} = -M^{-1}(\tau_*)\Psi^*(\tau_*)R\varphi. \tag{33}$$

Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Пусть выполнена оценка* (3), *оператор* G^{-1} *ограничен на своей области определения,* $\operatorname{Im} Q_1K_1 \subset AD$, $\operatorname{Im} K_2 \subset AD$, $q \in AD$, $f(t) \in L_2(t_0, T; X)$, *значения функции* $Q_1 f(t)$ *принадлежат* AD *для почти всех* $t_0 \le t \le T$ *и* $BG^{-1}Q_1 f(t) \in L_2(t_0, T; X)$. *Тогда существует оптимальное управление* u_* (33), *на котором достигается минимум* (32) *функционала качества* (13).

***Замечание* 5.** Чтобы получить утверждения теорем 1–4 в частном случае явного уравнения (2), достаточно положить $X = Y$, $A = E$, $P_1 = Q_1 = E$, $P_2 = Q_2 = 0$, $G = G^{-1} = E$, $W = -B$, $D = D_B$.

5. Приложение к дифференциальным уравнениям в частных производных. Покажем, как полученные абстрактные результаты применяются к управлению системами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных. Любую функцию $g\colon t, x \to g(t, x)$ будем также рассматривать как функцию от t со значениями в пространстве функций от x и записывать как $g(t)(x)$. Исследуем систему, описываемую дифференциальным уравнением в частных производных

$$\begin{gathered} -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + y(t,x)\right] + \frac{\partial^4 y(t,x)}{\partial x^4} = K_1 u_1(t,x) + K_2 u_2 + f(t,x), \\ u_2 = \sum_{k=1}^{N} z_k(x)\delta(t - \tau_k) \quad \text{для почти всех} \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le \pi, \end{gathered} \tag{34}$$

с краевыми условиями

$$y(t,0) = y(t,\pi) = \frac{\partial^2 y(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(t,\pi)}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{для почти всех} \quad 0 \le t \le T \tag{35}$$

и начальным условием

$$-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+y\right)(-0,x)=q(x)\quad \text{для почти всех}\quad 0\le x\le\pi. \tag{36}$$

Здесь $q(x),\ z_k(x)\in L_2(0,\pi),\ f(t,x),\ u_1(t,x)\in L_2(0,T;L_2(0,\pi))=L_2([0,T]\times\times[0,\pi]),\ K_1,K_2\in\mathcal{L}(L_2(0,\pi))$.

Исследуем задачу оптимального импульсного управления, которая заключается в нахождении управления $u_1(t,x)\in L_2\big([0,T]\times[0,\pi]\big)$, моментов приложения импульсов $\tau=\{\tau_1,\ldots,\tau_N\}\in\Theta=\{\tau\colon \tau_k\in[0,T]\}$ и соответствующих интенсивностей $z(x)=\{z_1(x),\ldots,z_N(x)\}\in[L_2(0,\pi)]^N$, минимизирующих критерий качества

$$J(u)=\int\limits_0^T\int\limits_0^\pi\Big[\big|y(t,x)\big|^2+\big|u_1(t,x)\big|^2\Big]dxdt+\sum_{k=1}^N\int\limits_0^\pi|z_k(x)|^2dx \tag{37}$$

на решениях $y(t,x)$ смешанной задачи (34) – (36). Уравнение (34) является уравнением в частных производных не типа Ковалевской или типа Соболева. Задачи оптимального управления для некоторых классов уравнений в частных производных типа Соболева с обратимым оператором при старшей производной по времени изучались в работах [20, 9, 21].

В пространстве $X=Y=L_2(0,\pi)$ смешанная задача (34) – (36) записывается в абстрактной форме (1), (9) с дифференциальными операторами

$$\begin{gathered}Ag=-\frac{d^2g(x)}{dx^2}-g(x),\quad Bg=\frac{d^4g(x)}{dx^4},\\ D_A=\Big\{g(x)\in W_2^2(0,\pi),\ g(0)=g(\pi)=0\Big\},\\ D_B=\Big\{g(x)\in W_2^4(0,\pi),\ g(0)=g(\pi)=g''(0)=g''(\pi)=0\Big\},\end{gathered} \tag{38}$$

где $W_2^m(0,\pi)$ — пространство Соболева порядка m функций из $L_2(0,\pi)$. Следуя [1], решение задачи (34) – (36) будем понимать в смысле решения абстрактной задачи (1), (9). Оператор A является вырожденным: $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Lin}\{\sin x\}$. Пучок операторов $\lambda A+B$ имеет резольвенту:

$$(\lambda A+B)^{-1}g(x)=\sum_{m=1}^\infty\frac{g_m\sin mx}{m^4+\lambda(m^2-1)},\qquad \lambda\ne\frac{m^4}{1-m^2},\quad m=2,3,\ldots. \tag{39}$$

Здесь и в дальнейшем через g_m обозначены коэффициенты Фурье в разложении функции $g(x)\in L_2(0,\pi)$:

$$g(x)=\sum_{m=1}^\infty g_m\sin mx,\qquad g_m=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi g(x)\sin mxdx,\quad m=1,2,\ldots.$$

Резольвента (39) удовлетворяет оценке (3) в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\ge 0$. Находим

$$X_1=\operatorname{Ker}A^\perp,\qquad X_2=D_2=\operatorname{Ker}A=\operatorname{Lin}\{\sin x\},\quad D_1=D_B\cap\operatorname{Ker}A^\perp,$$

$$P_2g=Q_2g=g_1\sin x,\qquad G^{-1*}g=g_1\sin x+\sum_{m=2}^\infty\frac{g_m\sin mx}{m^2-1},$$

$$Wg = W^* g = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m^4 g_m \sin mx}{1 - m^2}, \qquad G^{-1} \subset G^{-1*}, \qquad D_{G^{-1}} = D_W = D_A.$$

Оператор W является генератором аналитической полугруппы S_t. С помощью (5) получаем представление для полугруппы S_t:

$$S_t g = g_1 \sin x + \sum_{m=2}^{\infty} e^{\alpha_m t} g_m \sin mx, \qquad \alpha_m = \frac{m^4}{1 - m^2}.$$

Утверждение. *Предположим, что выполняются следующие ограничения: для почти всех* $0 \le t \le T$ *значения* $f(t)(x)$, *как функции от* t, *принадлежат* D_A *и* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) \in L_2\big([0,T] \times [0,\pi]\big)$; $\operatorname{Im} K_1, \operatorname{Im} K_2 \subset D_A$, *и* $K_2^* \sin x = 0$; $q(x) \in D_A$ *и* $\displaystyle\int_0^\pi q(x) \sin x dx = 0$. *Тогда смешанная задача* (34) – (36) *имеет единственное решение* $y(t,x)$, *которое представимо в виде*

$$y(t,x) = \big[f_1(t) + (K_1 u_1)_1(t)\big] \sin x + \sum_{m=2}^{\infty} y_m(t) \sin mx,$$

$$y_m(t) = \frac{1}{m^2 - 1} \left[e^{\alpha_m t} q_m + \int\limits_0^t e^{\alpha_m (t-s)} \big(f_m(s) + (K_1 u_1)_m(s)\big) ds + \right. \tag{40}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N} \chi(t - \tau_k) e^{\alpha_m (t - \tau_k)} (K_2 z_k)_m \right].$$

Задача оптимального управления (34) – (37) *разрешима. Для любого* $\tau \in \Theta$ *существует единственное* τ*-оптимальное управление, которое определяется через сопряженное состояние* $p(t,x)$ *по формулам*

$$u_{1*\tau}(t,x) = -K_1^* p(t,x), \qquad z_{*\tau}(x) = -\Big\{K_2^* Q_1 p(\tau_k, x)\Big\}_{k=1}^{N}, \tag{41}$$

а сопряженное состояние $p(t,x)$ *является сильным решением задачи*

$$\frac{\partial}{\partial t}\big[Ap(t,x)\big] - Bp(t,x) + y(t,x) = 0, \qquad (Ap)(T)(x) = 0 \tag{42}$$

$$\text{для почти всех} \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le \pi,$$

с операторами A, B (38).

Доказательство. Предположения утверждения гарантируют выполнение условий теорем 1 – 4. В силу теоремы 1 существует единственное решение $y(t,x)$ смешанной задачи (34) – (36). Представление (10) для $y(t,x)$ принимает вид (40). Применение теорем 2 – 4 позволяет решить задачу минимизации функционала (37) на решениях $y(t,x)$ смешанной задачи (34) – (36).

Сопряженное состояние $p(t,x)$ (26) допускает представление

$$p(t,x) = \big[f_1(t) + (K_1 u_1)_1(t)\big] \sin x + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin mx}{m^2 - 1} \int\limits_t^T e^{\alpha_m (s-t)} y_m(s) ds,$$

в котором компоненты $y_m(s)$ вычисляются по формулам (40). Задача (27) для сопряженного состояния в области $[0,T]\times[0,\pi]$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\big[Q_1 p(t,x)\big]-\big[BG^{-1}\big]p(t,x)+G^{-1}y(t,x)=0,\quad (Q_1 y)(T)(x)=0. \tag{43}$$

Поскольку $Q_1 p(t)(x)\in W_2^1(0,T,L_2(0,\pi))$, $p(t,x)$ является сильным решением задачи (43). Задача (43) эквивалентна задаче (42).

Доказательство утверждения завершается, если учесть, что соотношения (29) для τ-оптимальных управления $u_{1*\tau}(t,x)$ и интенсивностей $z_{*\tau}(x)$ имеют вид (41).

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 415 с.
2. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. *Lasiecka I., Triggiani R.* Control theory for partial differential equations: continuous and approximation theories. Abstract parabolic systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. – 644 p.
4. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965 – 476 с.
5. *Соболев С. Л.* Задача Коши для частного случая систем, не принадлежащих типу Ковалевской // Докл. АН СССР. – 1952. – **82**, № 2. – С. 205 – 208.
6. *Гальперн С. А.* Задача Коши для уравнений типа С.Л. Соболева // Успехи мат. наук. – 1953. – **8**, № 5. – С. 191 – 193.
7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
9. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами. – Киев: Наук. думка, 1998. – 465 с.
10. *Власенко Л. А., Руткас А. Г., Самойленко А. М.* Проблема импульсного регулятора для одной динамической системы типа Соболева // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 8. – С. 1027 – 1034.
11. *Bender D. J., Laub A.* The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // IEEE Trans. Automatic Control. – 1987. – **AC-32**, № 8. – P. 672 – 688.
12. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
13. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
14. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Систем. технологии, 2006. – 273 с.
15. *Самойленко А. М., Илолов М.* К теории эволюционных уравнений с импульсными воздействиями // Докл. АН СССР. – 1991. – **316**, № 4. – С. 822 – 825.
16. *Самойленко А. М., Илолов М.* Неоднородные эволюционные уравнения с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 1. – С. 93 – 100.
17. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. – 1967. – **74**, № 2. – С. 202 – 208.
18. *Власенко Л. А., Мышкис А. Д., Руткас А. Г.* Об одном классе дифференциальных уравнений параболического типа с импульсными воздействиями // Дифференц. уравнения. – 2008. – **44**, № 2. – С. 222 – 231.
19. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York etc.: Springer, 1983. – 279 p.
20. *White L. W.* Control problems governed by a pseudo-parabolic partial differential equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1979. – **250**. – P. 235 – 246.
21. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.

Получено 12.05.09