УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ),
В. А. Літовченко (Чернів. нац. ун-т)

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ДОДАТНИМ РОДОМ

We investigate properties of the fundamental solution and establish the correct solvability of the Cauchy problem for a class of degenerate Kolmogorov-type equations with $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-parabolic part with respect to the main group of variables and with positive vector genus in the case, where solutions are infinitely differentiable functions and their initial values may be generalized functions of Gevrey-ultradistribution-type.

Досліджено властивості фундаментального розв'язку та встановлено коректну розв'язність задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічною частиною за основною групою змінних і додатним векторним родом у випадку, коли розв'язки є нескінченно диференційовними функціями, а їх початкові значення можуть бути узагальненими функціями типу ультрарозподілів Жевре.

При математичному моделюванні броунівського руху фізичної системи з багатьма ступенями вільності А. М. Колмогоров [1] прийшов до рівняння дифузії з інерцією, яке є виродженим за однією групою просторових змінних параболічним рівнянням. Це рівняння багаторазово узагальнювалось, і узагальнення досліджувались різними авторами (див. [2] і наведену там бібліографію). При цьому виродження може бути не тільки за однією, але й за двома і більше групами змінних.

У статті [2] розглядається переважно випадок виродження за двома групами змінних. Для цього вважається, що n-вимірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної змінної $x_1 := (x_{11}; \ldots; x_{1n_1})$, n_2-вимірної змінної $x_2 := (x_{21}; \ldots; x_{2n_2})$ і n_3-вимірної змінної $x_3 := (x_{31}; \ldots; x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1; x_2; x_3)$. Тут n_1, n_2 і n_3 — такі натуральні числа, що $n_3 \le n_2 \le n_1$ і $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Розглянуті рівняння мають вигляд

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - A(t, x, \partial_{x_1})\right)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де $A(t, x, \partial_{x_1})$ — деякий диференціальний вираз за змінною x_1 з коефіцієнтами, залежними від часової t і просторової x змінних, а $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x) | t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$. Змінні t і x_1 називаються основними. Припускається, що диференціальний вираз $\partial_t - A(t, x, \partial_{x_1})$ за основними змінними може бути параболічним за Петровським [3] чи за Ейдельманом [4].

У цій статті будемо розглядати новий клас вироджених рівнянь, які є ще одним узагальненням рівняння дифузії з інерцією Колмогорова. Вони мають вигляд (1), де $f = 0$, коефіцієнти диференціального виразу $A(t, x, \partial_{x_1})$ не залежать від x, тобто $A(t, x, \partial_{x_1}) = A(t, \partial_{x_1})$, а вираз

$$\partial_t - A(t, \partial_{x_1}) \tag{2}$$

за основними змінними є $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічним з додатним векторним родом у сенсі [5] (зокрема, він може бути параболічним у сенсі Петровського, Ейдельмана, а також у сенсі Шилова з додатним родом [6]). Для такого класу рівнянь встановлено властивості фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК), які дали змогу використати простори типу S із [7] як основне середовище, в якому досліджено зазначену задачу. З'ясовано, що топологічно спряжений простір з тим простором типу S, до якого належить ФРЗК, становить множину початкових даних, з якими відповідна задача Коші коректно розв'язна, а її розв'язок є звичайною нескінченно диференційовною функцією за просторовою змінною. Зазначимо, що аналогічні результати для випадку, коли вираз (2) є параболічним за Петровським і Ейдельманом, одержано в [8 – 10].

1. Допоміжні відомості. Постановка задачі. Крім уведених вище натуральних чисел n, n_1, n_2 і n_3, а також точок x, x_1, x_2 і x_3 використовуватимемо такі позначення та означення: $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел; $\mathbb{N}_m := \{1;\ldots;m\}$; $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{C}^m$ — відповідно дійсний і комплексний простори розмірності $m \geq 1$; $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{C} := \mathbb{C}^1$; $\mathbb{R}_+ := (0;+\infty)$; $\mathbb{Z}_+^m$ — множина всіх m-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$; i — уявна одиниця; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^m$; $\|x\| := (x,x)^{1/2}$ для $x \in \mathbb{R}^m$; $|x+iy| := (x^2+y^2)^{1/2}$, якщо $\{x,y\} \subset \mathbb{R}$; $z^l := z_1^{l_1}\ldots z_m^{l_m}$, $|z|^l := |z_1|^{l_1}\ldots|z_m|^{l_m}$, якщо $z := (z_1;\ldots;z_m) \in \mathbb{C}^m$, $l := (l_1;\ldots;l_m) \in \mathbb{Z}_+^m$; $\overrightarrow{\gamma} := (\gamma_1;\ldots;\gamma_m)$ — m-вимірний вектор, $\overrightarrow{0} := (0;\ldots;0)$, $\overrightarrow{1} := (1;\ldots;1)$; просторові точки та мультиіндекси, як вектори, позначатимемо без стрілочки зверху; запис $\overrightarrow{\alpha}\mho\overrightarrow{\beta}$, де $\mho$ — деяке відношення, означатиме, що це відношення виконується для всіх відповідних координат векторів $\overrightarrow{\alpha}$ і $\overrightarrow{\beta}$, при цьому якщо $q := (q_1;\ldots;q_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, $\{\overrightarrow{\alpha},\overrightarrow{\gamma}\} \subset \mathbb{R}^m$, то $q^{q\overrightarrow{\gamma}} := q_1^{q_1\gamma_1}\ldots q_m^{q_m\gamma_m}$; $|\overrightarrow{\alpha}|_*^{\overrightarrow{\gamma}} := |\alpha_1|^{\gamma_1}+\ldots+|\alpha_m|^{\gamma_m}$, $|\overrightarrow{\alpha}|_* := |\overrightarrow{\alpha}|_*^{\overrightarrow{1}}$ — скалярні величини (якщо $\overrightarrow{\alpha}$ є мультиіндексом або просторовою точкою, то замість $\overrightarrow{\alpha}$ будемо писати α); якщо $x := (x_1;x_2;x_3)$ і $x_j := (x_{j1};\ldots;x_{jn_j})$ — точки відповідно з $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, то $x'_j := (x_{j1};\ldots;x_{jn_3})$, $x''_j := (x_{j(n_3+1)};\ldots;x_{jn_2})$, $\widehat{x}_1 := (x_{1(n_2+1)};\ldots;x_{1n_1})$; такі самі позначення використовуватимемо для інших аналогічних точок, а також векторів.

Спочатку нагадаємо необхідні відомості з [7] про простори типу S, де S — простір основних функцій Шварца, а потім наведемо леми про властивості спеціальних операторів у цих просторах.

Для довільних $\overrightarrow{\alpha} > \overrightarrow{0}$ і $\overrightarrow{\beta} > \overrightarrow{0}$ покладемо

$$S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}} := \Big\{\varphi \in S \mid \exists\{c,A,B\} \subset \mathbb{R}_+ \ \ \forall\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+^n \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n:$$

$$|x^k\partial_x^m\varphi(x)| \leq cA^{|k|_*}B^{|m|_*}k^{k\overrightarrow{\alpha}}m^{m\overrightarrow{\beta}}\Big\}.$$

З відповідною топологією $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ є об'єднанням повних досконалих зліченно-нормованих просторів з неперервними операціями додавання, віднімання, множення, диференціювання та звичайного зсуву τ_h на крок $h \in \mathbb{R}^n$, до того ж операція τ_h є не лише неперервною, але й нескінченно диференційовною. Згідно з [5], функція $\mu(\cdot)$ є мультиплікатором у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ тоді й тільки тоді, коли

$$\forall\delta > 0 \quad \exists\{c,B\} \subset \mathbb{R}_+ \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: \ \ |\partial_x^m\mu(x)| \leq cB^{|m|_*}m^{m\overrightarrow{\beta}}e^{\delta|x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}}}.$$

Простір $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ нетривіальний лише тоді, коли $\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta} \geq \overrightarrow{1}$. Він містить тільки ті нескінченно диференційовні в $\mathbb{R}^n$ функції φ, для яких справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^m \varphi(x)\right| \le cB^{|m|_*} m^{m\overrightarrow{\beta}} e^{-\delta|x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}}}, \quad m \in \mathbb{Z}_+^n, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

з деякими додатними сталими c, B і δ, залежними лише від φ. Крім цього, у випадку, коли $\overrightarrow{0} < \overrightarrow{\beta} < \overrightarrow{1}$, простір $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ складається лише з тих функцій φ, які продовжуються з $\mathbb{R}^n$ до цілих функцій $\varphi(x+iy)$, $(x+iy) \in \mathbb{C}^n$, таких, що

$$\left|\varphi(x+iy)\right| \le c \exp\left\{-\delta_1 |x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}} + \delta_2 |y|_*^{\frac{\overrightarrow{1}}{\overrightarrow{1}-\overrightarrow{\beta}}}\right\}, \quad (x+iy) \in \mathbb{C}^n,$$

де $c > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Якщо ж $\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{1}$, то елементи φ відповідного простору $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ допускають аналітичне продовження в деяку залежну від φ множину $\{(x+iy) \in \in \mathbb{C}^n \,|\, \|y\| < \delta\}$. При $\overrightarrow{\beta} > \overrightarrow{1}$ серед елементів $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ є вже фінітні функції.

Простори типу S тісно пов'язані між собою перетворенням Фур'є F, а саме, справджується рівність $F\left[S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}\right] = S_{\overrightarrow{\beta}}^{\overrightarrow{\alpha}}$, де

$$F[X] := \left\{\psi \;\middle|\; \psi(\cdot) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i(x,\cdot)} dx, \;\; \varphi \in X\right\}.$$

При цьому оператор F відображає $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ у відповідний простір $S_{\overrightarrow{\beta}}^{\overrightarrow{\alpha}}$ взаємно однозначно та неперервно.

У просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ означимо такі оператори:

$$(T_t^{\eta,\xi} f)(x) := f(x_1 - \xi_1, x_2 + t\hat{\eta}_1 - \xi_2, x_3 + t\eta_2' + 2^{-1}t^2\eta_1' - \xi_3),$$

$$(\tilde{T}_t^{x,\xi} f)(\zeta) := e^{i(\xi,\zeta)} e^{-i(t\hat{x}_1,\zeta_2)} e^{-i(tx_2' + 2^{-1}t^2 x_1', \zeta_3)} f(\zeta),$$

$$(\check{T}_t^{\pm} f)(x) := f(x_1' \pm tx_2' + 2^{-1}t^2 x_3,\; x_1'' \pm tx_2'',\; x_1''',\; x_2' \pm tx_3,\; x_2'',\; x_3),$$

де $f \in S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$, $t \ge 0$ і $\{x, \xi, \eta, \zeta\} \subset \mathbb{R}^n$.

Очевидно, що

$$T_t^{x,\xi}\Big(F^{-1}\big[\varphi(\zeta)\big]\Big)(x) = (2\pi)^{-n} F_{\zeta\to\xi}\Big[(\tilde{T}_t^{x,-x}\varphi)(\zeta)\Big](t,\xi,x), \tag{3}$$

$$t \ge 0, \quad \{\xi, x\} \subset \mathbb{R}^n$$

(тут $F_{\zeta\to\xi}$ означає, що оператор Фур'є діє за змінною ζ і переводить її в ξ).

Послідовність $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ збігається в $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ до φ $\Bigg($позначатимемо $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}} \varphi\Bigg)$ при $\overrightarrow{0} < \overrightarrow{\beta} < \overrightarrow{1}$ тоді й лише тоді, коли вона: 1) правильно збігається на $\mathbb{C}^n$, тобто $\varphi_\nu(z) \overset{z\in\mathbb{K}}{\underset{\nu\to+\infty}{\rightrightarrows}} \varphi(z)$ (рівномірно щодо z на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}^n$); 2) обмежена в $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$:

$$\exists \{c, \delta_1, \delta_2\} \subset \mathbb{R}_+ \;\; \forall \nu \ge 1 \;\; \forall (x+iy) \in \mathbb{C}^n :$$

$$|\varphi_\nu(x+iy)| \leq c\exp\left\{-\delta_1|x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}} + \delta_2|y|_*^{\frac{\overrightarrow{1}}{\overrightarrow{1}-\overrightarrow{\beta}}}\right\}.$$

Через $\left(S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'$ позначимо простір, топологічно спряжений з $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$. Якщо f належить до $\left(S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'$, то до цього простору належить також: а) кожна похідна $\partial_x^m f$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$; б) зсув $f(ax+h)$, $a \neq 0$; в) добуток μf, де μ — мультиплікатор у $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}})'$ означається традиційно:

$$\langle F[f], F[\varphi]\rangle := (2\pi)^n\langle f, \varphi\rangle, \quad \varphi \in S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$$

(тут і далі дужками $\langle , \rangle$ позначено результат дії функціонала на основну функцію), тобто пряме перетворення Фур'є елемента f з $\left(S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'$ на просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ є узагальненою функцією, визначеною на $F\left[S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}\right]$. Обернене перетворення Фур'є F^{-1} узагальненої функції $g \in \left(F\left[S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}\right]\right)'$ означається формулою

$$\left\langle F^{-1}[g], F^{-1}[\psi]\right\rangle := (2\pi)^{-n}\langle g, \psi\rangle, \quad \psi \in F[S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}].$$

Співвідношення між просторами типу S й топологічно спряженими з ними характеризують такі неперервні вкладення:

$$S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}} \subset S_{\overrightarrow{\gamma}}^{\overrightarrow{\delta}} \subset S \subset L_2(\mathbb{R}^n) \subset S' \subset (S_{\overrightarrow{\gamma}}^{\overrightarrow{\delta}})' \subset (S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}})',$$

$$\overrightarrow{\gamma} \geq \overrightarrow{\alpha} > \overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{\delta} \geq \overrightarrow{\beta} > \overrightarrow{0},$$

де S' — простір розподілів Шварца, а $L_2(\mathbb{R}^n)$ — відповідний простір Лебега.

Далі вважатимемо, що індекси просторів $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$, які згідно з викладеним на початку цього пункту мають вигляд $\overrightarrow{\alpha} := \left\{\overrightarrow{\alpha}_1; \overrightarrow{\alpha}_2; \overrightarrow{\alpha}_3\right\}$ і $\overrightarrow{\beta} := \left\{\overrightarrow{\beta}_1; \overrightarrow{\beta}_2; \overrightarrow{\beta}_3\right\}$, $\left\{\overrightarrow{\alpha}_j, \overrightarrow{\beta}_j\right\} \subset \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$, задовольняють такі умови: $\overrightarrow{\alpha}_2 = \widehat{\overrightarrow{\alpha}}_1$, $\alpha_3 = \overrightarrow{\alpha}'_1$, $\beta_2 = \widehat{\overrightarrow{\beta}}_1$; $\beta_3 = \overrightarrow{\beta}'_1$, де, як зазначалось, $\widehat{\overrightarrow{\alpha}}_1 := (\alpha_{11}; \ldots; \alpha_{1n_2})$, $\overrightarrow{\alpha}'_1 := (\alpha_{11}; \ldots; \alpha_{1n_3})$, $\widehat{\overrightarrow{\beta}}_1 := (\beta_{11}; \ldots; \beta_{1n_2})$, $\overrightarrow{\beta}'_1 := (\beta_{11}; \ldots; \beta_{1n_3})$.

Лема 1. *Нехай f — мультиплікатор у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$, а φ — елемент із $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$. Тоді функція $\omega_t(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)(\tilde{T}_t^{x,-x}\varphi)(\xi)d\xi$, $x \in \mathbb{R}^n$, належить до простору $S_{\overrightarrow{\beta}}^{\overrightarrow{\alpha}}$ при кожному фіксованому $t \geq 0$.*

Доведення. Зазначимо, що для кожного $m := (m_1; m_2; m_3)$ і $k := (k_1; k_2; k_3)$ із $\mathbb{Z}_+^n$

$$\left|x_1^{m_1}(x_2 + t\hat{x}_1)^{m_2}(x_3 + tx'_2 + 2^{-1}t^2x'_1)^{m_3}\partial_x^k\omega_t(x)\right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\left|\partial_\xi^m\big(r(\xi)P_k(t,\xi)\big)\right|d\xi, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де $r(\cdot) := f(\cdot)\varphi(\cdot)$, а

$$P_k(t,\xi) := \left(\xi_1' + t\xi_2' + 2^{-1}t^2\xi_3\right)^{k_1'}(\xi_1'' + t\xi_2'')^{k_1''}(\xi_1''')^{k_1'''}(\xi_2' + t\xi_3)^{k_2'}(\xi_2'')^{k_2''}\xi_3^{k_3}.$$

Тому для доведення леми досить переконатися, що

$$\forall t \geq 0 \ \ \exists\{c, A, B\} \subset \mathbb{R}_+ \ \ \forall\{m, k\} \subset \mathbb{Z}_+^n:$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\partial_\xi^m (r(\xi)P_k(t,\xi))\right| d\xi \leq cA^{|m|_*}B^{|k|_*}k^{k\overrightarrow{\alpha}}m^{m\overrightarrow{\beta}}. \tag{4}$$

За допомогою формули Лейбніца диференціювання добутку маємо

$$\left|\partial_\xi^m (r(\xi)P_k(t,\xi))\right| \leq \sum_{l\leq m} C_m^l \left|\partial_\xi^l P_k(t,\xi)\right| \left|\partial_\xi^{m-l} r(\xi)\right|,$$

де $C_m^l := \prod_{s=1}^{3}\prod_{j=1}^{n_s} C_{m_{sj}}^{l_{sj}}$, а C_p^q, $\{p,q\} \subset \mathbb{Z}_+$, — біноміальні коефіцієнти. Оцінимо спочатку $|\partial_\xi^l P_k(t,\xi)|$. З огляду на рівність

$$\left|\partial_\xi^l P_k(t,\xi)\right| = \left|\partial_{\xi_1'''}^{l_1'''}(\xi_1''')^{k_1'''}\right| \left|\partial_{\xi_2''}^{l_2''}\left[(\partial_{\xi_1''}^{l_1''}(\xi_1'' + t\xi_2'')^{k_1''})(\xi_2'')^{k_2''}\right]\right| \times$$
$$\times \left|\partial_{\xi_3}^{l_3}\left[\left(\partial_{\xi_2'}^{l_2'}[(\partial_{\xi_1'}^{l_1'}(\xi_1' + t\xi_2' + 2^{-1}t^2\xi_3)^{k_1'})(\xi_2' + t\xi_3)^{k_2'}]\right)(\xi_3^{k_3})\right]\right|$$

необхідно оцінити кожен із співмножників її правої частини. Використавши ще раз формулу Лейбніца, а також те, що

$$\left|\partial_\zeta^q \zeta^p\right| \leq \frac{p!}{(p-q)!}\begin{cases}|\zeta|^{p-q}, & p \geq q,\\ 0, & p < q,\end{cases} \qquad \{p,q\} \subset \mathbb{Z}_+^\nu, \quad \zeta \in \mathbb{R}^\nu,$$

маємо

$$\left|\partial_{\xi_2''}^{l_2''}\left[\left(\partial_{\xi_1''}^{l_1''}(\xi_1'' + t\xi_2'')^{k_1''}\right)(\xi_2'')^{k_2''}\right]\right| \leq$$
$$\leq \sum_{\nu \leq l_2''} C_{l_2''}^{\nu} \frac{k_2''!}{(k_2'' - l_2'' + \nu)!}\begin{pmatrix} |\xi_2''|^{k_2'' - l_2'' + \nu}, & k_2'' + \nu \geq l_2'' \\ 0, & k_2'' + \nu < l_2'' \end{pmatrix} \times$$
$$\times \frac{k_1''!}{(k_1'' - l_1'' - \nu)!}\begin{pmatrix} t^\nu |\xi_1'' + t\xi_2''|^{k_1'' - l_1'' - \nu}, & k_1 \geq l_1'' + \nu \\ 0, & k_1'' < l_1'' \ \text{або} \ k_1'' < l_1'' + \nu \end{pmatrix} \leq$$
$$\leq t_0^{|k_1''|_*} 2^{|k_2'' + k_1'' + l_1'' + 2l_2''|_*} l_1''! l_2''! \begin{pmatrix} (|\xi_1''| + |\xi_2''|)^{k_1'' + k_2'' - l_1'' - l_2''}, & k_1'' + k_2'' \geq l_1'' + l_2'' \\ 0, & k_1'' < l_1'' \ \text{або} \ k_2'' < l_2'' \end{pmatrix},$$

де $t_0 = 1$ при $t < 1$ і $t_0 = t$ при $t \geq 1$. Тут враховано те, що

$$C_{l_2''}^{\nu} \frac{k_1''!}{(k_1'' - l_1'' - \nu)!} \frac{k_2''!}{(k_2'' + \nu - l_2'')!} = l_1''! \, l_2''! \, C_{k_2''}^{l_2'' - \nu} C_{k_1''}^{l_1'' + \nu} C_{l_1'' + \nu}^{\nu}.$$

Далі, використовуючи рівність

$$C_{l_3}^{\nu_3} C_{l_2'}^{\nu_2} C_{\nu_3}^{\nu_1} \frac{k_1!}{(k_1' - \nu_1 - \nu_2 - l_1')!} \frac{k_2'!}{(k_2' + \nu_1 + \nu_2 - \nu_3 - l_2')!} \frac{k_3!}{(k_3 + \nu_3 - l_3)!} =$$

$$= l_1'!\, l_2'!\, l_3!\, C_{k_3}^{l_3-\nu_3} C_{k_1'}^{l_1'+\nu_1+\nu_2} C_{k_2'+\nu_1+\nu_2}^{l_2'+\nu_3} C_{l_1'+\nu_1+\nu_2}^{l_1'} C_{\nu_1+\nu_2}^{\nu_1} \frac{1}{(l_2'-\nu_2)!(\nu_3-\nu_1)!}$$

та нерівність

$$\sum_{\nu_3 \le l_3} \left(\sum_{\nu_1 \le \nu_3} \frac{1}{(\nu_3-\nu_1)!} \right) \le 2^{2|l_3|_*},$$

за аналогією одержуємо

$$\left| \partial_{\xi_3}^{l_3} \left[\left(\partial_{\xi_2'}^{l_2'} \left[(\partial_{\xi_1'}^{l_1'} (\xi_1' + t\xi_2' + 2^{-1}t^2\xi_3)^{k_1'})(\xi_2' + t\xi_3)^{k_2'} \right] \right) (\xi_3^{k_3}) \right] \right| \le$$

$$\le \sum_{\nu_3 \le l_3} C_{l_3}^{\nu_3} \left(\sum_{\nu_2 \le l_2'} C_{l_2'}^{\nu_2} \times \right.$$

$$\times \left(\sum_{\nu_1 \le \nu_3} C_{\nu_3}^{\nu_1} \frac{k_1'!}{(k_1'-\nu_1-\nu_2-l_1')!} \frac{k_2'!}{(k_2'+\nu_1+\nu_2-\nu_3-l_2')!} \frac{k_3!}{(k_3+\nu_3-l_3)!} \times \right.$$

$$\times \begin{pmatrix} t^{\nu_2+2\nu_1} 2^{-\nu_1} |\xi_1' + t\xi_2' + 2^{-1}t^2\xi_3|^{k_1'-l_1'-\nu_1-\nu_2}, & k_1 \ge l_1' + \nu_1 + \nu_2 \\ 0, \ \ k_1' < l_1' \ \text{ або } \ k_1' - \nu_1 < l_1' \ \text{ або } \ k_1' - \nu_1 - \nu_2 < l_1' \end{pmatrix} \times$$

$$\left. \left. \times \begin{pmatrix} t^{\nu_3-\nu_1} |\xi_2' + t\xi_3|^{k_2'+\nu_1+\nu_2-\nu_3-l_2'}, & k_3' + \nu_1 + \nu_2 \ge \nu_3 + l_2' \\ 0 \ \ k_2' + \nu_2 < l_2' \ \text{ або } \ k_2' + \nu_2 + \nu_1 < l_2' + \nu_3 \end{pmatrix} \right) \right) \times$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} |\xi_3|^{k_3+\nu_3-l_3}, & k_3 + \nu_3 \ge l_3 \\ C_{l_2'}^{\nu_2} 0, & k_3 + \nu_3 < l_3 \end{pmatrix} \right) \le$$

$$\le t_0^{|2k_1'+k_2'|_*} 2^{|k_1'+k_2'+k_3+l_1'+4l_2'+5l_3|_*} l_1'! l_2'! l_3! \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (|\xi_1'| + |\xi_2'| + |\xi_3|)^{k_1'+k_2'+k_3-l_1'-l_2'-l_3}, & k_1' + k_2' + k_3 \ge l_1' + l_2' + l_3 \\ 0, \ \ k_1' < l_1' \ \text{ або } \ k_2' < l_2', \ \text{ або } \ k_3 < l_3. \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\left| \partial_\xi^l P_k(t, \xi) \right| \le t_0^{2|k|_*} 2^{|k|_* + |\hat{l}_1|_* + 4|l_2|_* + 5|l_3|_*} l! \times$$

$$\times |\xi_1'''|^{k_1'''-l_1'''} (|\xi_1''| + |\xi_2''|)^{k_1''+k_2''-l_1''-l_2''} \Big(|\xi_1'| + |\xi_2'| + |\xi_3| \Big)^{k_1'+k_2'+k_3-l_1'-l_2'-l_3},$$

якщо

$$k_1''' \ge l_1''', \qquad k_1'' \ge l_1'', \qquad k_2'' \ge l_2'', k_1' \ge l_1', \qquad k_2' \ge l_2', \qquad k_3 \ge l_3, \tag{5}$$

інакше $\partial_\xi^l P_k(\xi) = 0$.

Звідси, враховуючи те, що

$$\exists \{c, \delta, B\} \subset \mathbb{R}_+ \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \colon |\partial_\xi^m r(\xi)| \le c B^{|m|_*} m^{m\overrightarrow{\beta}} e^{-\delta |\xi|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}}},$$

бо $r(\cdot) \in S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$, маємо

$$\left|\partial_\xi^m(r(\xi)P_k(t,\xi))\right| \le cA^{|k|_*}e^{-(\delta/2)|\xi|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}}}\sum_{l\le m} l!(m-l)^{(m-l)\overrightarrow{\beta}}\times$$

$$\times\left\{\sup_{\rho_1'''>\overrightarrow{0}}\left((\rho_1''')^{k_1'''-l_1'''}e^{-|\rho_1'''|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}_1'''}}\right)\left(\sup_{\rho_1''>\overrightarrow{0}}\left((\rho_1'')^{k_1''+k_2''-l_1''-l_2''}e^{-|\rho_1''|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}_1''}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\sup_{\rho_2''>\overrightarrow{0}}\left((\rho_2'')^{k_1''+k_2''-l_1''-l_2''}e^{-|\rho_2''|^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}_2''}}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{\rho_1'>\overrightarrow{0}}\left((\rho_1')^{k_1'+k_2'+k_3-l_1'-l_2'-l_3}e^{-|\rho_1'|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}_1'}}\right)+\right.$$

$$+\sup_{\rho_2'>\overrightarrow{0}}\left((\rho_2')^{k_1'+k_2'+k_3-l_1'-l_2'-l_3}e^{-|\rho_2'|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}_2'}}\right)+$$

$$\left.\left.+\sup_{\rho_3>\overrightarrow{0}}\left(\rho_3^{k_1'+k_2'+k_3-l_1'-l_2'-l_3}e^{-|\rho_3|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}_3}}\right)\right)\right\}\le$$

$$\le c_1A_1^{|k|_*}B_1^{|m|_*}e^{-(\delta/2)|\xi|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}}}k^{k\overrightarrow{\alpha}}m^{m\overrightarrow{\beta}}\times$$

$$\times\sum_{l\le m} l_1!\ldots l_n!/(m^{l\overrightarrow{\beta}}(k_1''')^{l_1'''\overrightarrow{\alpha}_1'''}(k_1''+k_2'')^{(l_1''+l_2'')\overrightarrow{\alpha}_1''}\times$$

$$\times(k_1'+k_2'+k_3)^{(l_1'+l_2'+l_3)\overrightarrow{\alpha}_1'})\le$$

$$\le c_1A_1^{|k|_*}B_1^{|m|_*}e^{-(\delta/2)|\xi|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}}}k^{k\overrightarrow{\alpha}}m^{m\overrightarrow{\beta}}\left(\sum_{l\le m}\frac{1}{(l_1!;\ldots;l_n!)^{\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}-\overrightarrow{1}}}\right)\le$$

$$\le c_1A_1^{|k|_*}(2B_1)^{|m|_*}e^{-(\delta/2)|\xi|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\alpha}}}k^{k\overrightarrow{\alpha}}m^{m\overrightarrow{\beta}},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

де c_1, A_1 і B_1 — додатні сталі, які не залежать від k і m. Тут істотною була умова (5) і те, що $\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\ge\overrightarrow{1}$.

Одержана оцінка гарантує виконання нерівності (4) і, отже, правильність твердження леми.

Лема 2. *Для кожного елемента $\varphi\in S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ відповідна абстрактна функція $g_t(x,\cdot):=(T_t^{x,\cdot}\varphi)(x)$ параметра $x\in\mathbb{R}^n$ зі значеннями в $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ при кожному фіксованому $t\ge 0$ нескінченно диференційовна по x у цьому просторі (інакше кажучи, оператор $T_t^{x,\cdot}$ є нескінченно диференційовним за змінною x у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$).*

Доведення. Насамперед зазначимо, що для всіх $\varphi\in S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$

$$(T_t^{x,\xi}\varphi)(x)=(T_t^{x,-x}\varphi)(-\xi),\quad t\ge 0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Більш того, при $t=0$ оператор $T_t^{x,\xi}$ збігається з $\tau_{(-\xi)}$, який, як зазначалось, є нескінченно диференційовним у просторах типу S (щоправда, по $(-\xi)$, проте, оскільки $(\tau_{(-\xi)}\varphi)(x)=\varphi(x-\xi)=(\tau_x\varphi)(-\xi)$, тобто змінні x і $(-\xi)$ симетричні, $g_0(x,\xi)=\varphi(x-\xi)$, як абстрактна функція параметра x, є нескінченно диференційовною у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$). Звідси, враховуючи властивість неперервності оператора

Фур'є у просторах типу S, одержуємо, зокрема, що функція

$$\check{g}_\psi(x,\cdot) = e^{-i(x,\cdot)}\psi(\cdot), \tag{7}$$

є нескінченно диференційовною за параметром $x \in \mathbb{R}^n$ у просторі $S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$ для кожного елемента ψ з цього простору.

У випадку $t > 0$ для доведення леми досить довести нескінченну диференційовність по x функції $F_{\xi\to\eta}[g_t(x,\xi)]$ у просторі $S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$. З огляду на рівність (6) для $t > 0$ і $\{x,\eta\} \subset \mathbb{R}^n$ одержуємо

$$F^{-1}_{\xi\to\eta}\big[g_t(x,\xi)\big] = (-2\pi)^{-n} e^{-i(x,\eta)} e^{-(t\hat{x}_1,\eta_2)} e^{-i(tx_2'+2^{-1}t^2x_1',\eta_3)} F[\varphi](\eta). \tag{8}$$

Звідси, враховуючи нескінченну диференційовність функції (7), а також те, що при кожних фіксованих $\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $x_2' \in \mathbb{R}^{n_3}$ і $t > 0$ функції $e^{-i(t\hat{x}_1,\eta_2)}$ та $e^{-i(tx_2'+2^{-1}t^2x_1',\eta_3)}$ є мультиплікаторами у просторі $S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$, приходимо до нескінченної диференційовності $F^{-1}_{\xi\to\eta}[g_t]$ за змінною x_3 у цьому просторі.

Щодо нескінченної диференційовності по x_1 та x_2, то спочатку переконаємося в існуванні частинних похідних першого порядку за цими змінними. Для цього у випадку x_{2j} необхідно встановити існування такої границі:

$$\Big(F^{-1}_{\xi\to\eta}\left[g_t((x_1,x_{21},\ldots,x_{2j}+h,\ldots,x_{2n_2},x_3),\xi)\right] - F^{-1}_{\xi\to\eta}[g_t(x,\xi)]\Big)/h \xrightarrow[h\to 0]{S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}} \partial_{x_{2j}} F^{-1}_{\xi\to\eta}[g_t(x,\xi)]. \tag{9}$$

З урахуванням рівності (8) доведення (9) зводиться до встановлення граничних співвідношень

$$\mu_1(\eta)F[\varphi](\eta)\left(e^{-i(x_{2j}+h)\eta_{2j}} - e^{-ix_{2j}\eta_{2j}}\right)/h \xrightarrow[h\to 0]{S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}} \mu_1(\eta)F[\varphi](\eta)(-i\eta_{2j})e^{-ix_{2j}\eta_{2j}},$$

$$\mu_2(\eta)F[\varphi](\eta)\left(e^{-it(x_{2j}+h)\eta_{3j}} - e^{-itx_{2j}\eta_{3j}}\right)/h \xrightarrow[h\to 0]{S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}} \mu_2(\eta)F[\varphi](\eta)(-it\eta_{3j})e^{-itx_{2j}\eta_{3j}},$$

де μ_1, μ_2 — відповідні мультиплікатори в $S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$. Проте виконання зазначених співвідношень безпосередньо випливає з попереднього твердження для функції (7) і властивостей мультиплікаторів μ_1 і μ_2 у просторах $S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$.

Аналогічно встановлюємо існування похідної $\partial_{x_{1j}} F^{-1}_{\xi\to\eta}[g_t]$ у сенсі топології простору $S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$.

На завершення зауважимо, що з огляду на означення похідних вищих порядків, а також на те, що кожен многочлен є мультиплікатором у просторі $S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$, факт існування частинних похідних першого порядку по x абстрактної функції $F^{-1}_{\xi\to\eta}[g_t]$ у $S_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}$ гарантує існування і частинних похідних довільного порядку для цієї функції по x у зазначеному просторі типу S.

Лему 2 доведено.

Розглянемо рівняння

$$\big(\partial_t + P(t,\partial_x)\big)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{10}$$

де $T > 0$, $P(t, \partial_x) := -\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - A(t, i\partial_{x_1})$, а $A(t, i\partial_{x_1}) :=$ $:= \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \leq 1} a_{k_1}(t) i^{|k_1|_*} \partial_{x_1}^{k_1}$ — диференціальний вираз порядку $\overrightarrow{p} := (p_1; \ldots$ $\ldots; p_{n_1}) \geq \overrightarrow{1}$.

Припускатимемо, що коефіцієнти $a_{k_1}(\cdot)\colon [0;T] \to \mathbb{C}^n$ — неперервні функції такі, що диференціальний вираз $L := \partial_t - A(t, i\partial_{x_1})$ в шарі $[0;T] \times \mathbb{R}^{n_1}$ є рівномірно параболічним у сенсі [5] (тут $\overrightarrow{h} := (h_1; \ldots; h_{n_1})$ — векторний показник параболічності, $\overrightarrow{0} < \overrightarrow{h} \leq \overrightarrow{p}$). Через $\overrightarrow{\mu}$ позначимо векторний рід оператора L, тобто вектор з координатами $\mu_j := \sup \nu_j$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$, де вектор $\overrightarrow{\nu} := (\nu_1; \ldots; \nu_{n_1})$ такий, що в області

$$G_{\overrightarrow{\nu}} := \left\{ (\xi + i\eta) \in \mathbb{C}^{n_1} \,\middle|\, |\eta_j| \leq c_j(1 + |\xi_j|)^{\nu_j}, \;\; c_j > 0, \;\; j \in \mathbb{N}_{n_1} \right\}$$

виконується нерівність

$$\operatorname{Re} A(t, \xi + i\eta) \leq -\delta|\xi|_*^{\overrightarrow{h}}, \quad t \in [0;T],$$

зі сталою $\delta > 0$, яка не залежить від t. Із досліджень, проведених у [6], фактично випливає, що $\overrightarrow{\mu} \leq \overrightarrow{1}$. Далі вважатимемо, що для рівняння (10) векторний рід є додатним, тобто $\overrightarrow{0} < \overrightarrow{\mu} \leq \overrightarrow{1}$.

Прикладами рівнянь, для яких виконуються наведені припущення, є рівняння (10), в яких вираз L рівномірно параболічний за Петровським, Ейдельманом (у цих випадках $\overrightarrow{\mu} = \overrightarrow{1}$), а також Шиловим з родом $\mu > 0$ (тут $\overrightarrow{\mu} = (\mu; \ldots; \mu)$).

Якщо для рівняння (10) задати початкову умову

$$u(t, \cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in \big(S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}\big)', \tag{11}$$

то розв'язком задачі Коші (10), (11) назвемо функцію u, яка диференційовна по t, нескінченно диференційовна по x, задовольняє рівняння (10) у звичайному розумінні, а початкову умову (11) у сенсі збіжності у просторі $\big(S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}\big)'$.

2. ФРЗК та його властивості. Насамперед знайдемо ФРЗК для рівняння (10). Для цього розглянемо для рівняння (10) задачу Коші з початковою умовою при $t = \tau$, $\tau \in [0;T)$,

$$u(t, \cdot)|_{t=\tau} = f, \quad f \in (S_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}})', \tag{12}$$

і відповідну їй двоїсту за Фур'є задачу

$$\left(\partial_t + \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{2j}\partial_{\xi_{1j}} + \sum_{j=1}^{n_3} \xi_{3j}\partial_{\xi_{2j}} - A(t, \xi_1) \right) v(t, \xi) = 0, \tag{13}$$

$$v(t, \cdot) \xrightarrow[t \to \tau + 0]{(S_{\overrightarrow{\beta}}^{\overrightarrow{\alpha}})'} F[f](\cdot).$$

Розв'язуючи останню задачу методом характеристик, одержуємо [2]

$$v(t, \xi) = \exp\Bigg\{ \int_\tau^t \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \leq 1} a_{k_1}(\theta)(\xi_1' - (t - \theta)\xi_2' +$$

$$+2^{-1}(t-\theta)^2\xi_3)^{k_1'}(\xi_1''-(t-\theta)\xi_2'')^{k_2''}(\xi_1''')^{k_1'''}d\theta\Bigg\}(\check{T}_{t-\tau}^{-}F[f])(\xi), \quad (t,\xi)\in\Pi_{(\tau;T]}.$$

Звідси, припустивши регулярність функціоналів f і $F[f]$ та врахувавши рівність $u(t,\cdot)=F^{-1}[v](t,\cdot)$, формальними перетвореннями отримаємо формулу

$$u_\tau(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x;\tau,\xi)f(\xi)d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{(\tau;T]}, \tag{14}$$

в якій

$$G(t,x;\tau,\xi):=\Big(T_{t-\tau}^{x;\xi}F_{\eta\to x}^{-1}[V(t,\tau,\eta)]\Big)(t,x;\tau,\xi), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{15}$$

$$V(t,\tau,\eta):=\exp\Bigg\{\sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_*\le 1}\int\limits_\tau^t a_{k_1}(\theta)(\eta_1'+(\theta-\tau)\eta_2'+$$

$$+2^{-1}(\theta-\tau)^2\eta_3)^{k_1'}(\eta_1''+(\theta-\tau)\eta_2'')^{k_1''}(\eta_1''')^{k_1'''}d\theta\Bigg\}, \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \eta\in\mathbb{R}^n.$$

В інтегралі з формули (15) виконаємо заміну змінних інтегрування згідно з правилами

$$\eta_{jl}=(t-\tau)^{1-j-1/p_l}\sigma_{jl}, \qquad l\in\mathbb{N}_{n_j}, \quad j\in\mathbb{N}_3, \quad \theta-\tau=(t-\tau)\chi,$$

тоді для G одержимо формулу

$$G(t,x;\tau,\xi)=(t-\tau)^{-M}\Big(T_{t-\tau}^{x_{t-\tau},\xi_{t-\tau}}F_{\sigma\to x_{t-\tau}}^{-1}[\tilde V(t,\tau,\sigma)]\Big)(t,\tau,x_{t-\tau}), \tag{16}$$

в якій

$$M:=\sum_{j=1}^{n_1}1/p_j+\sum_{j=1}^{n_2}(1+1/p_j)+\sum_{j=1}^{n_3}(2+1/p_j),$$

$$x_t:=\Big(t^{-\overrightarrow{1}/\overrightarrow{p}}x_1;t^{-(\widehat{\overrightarrow{1}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{p}})}x_2;t^{-(\overrightarrow{2}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{p})'}x_3\Big):=$$

$$:=\Big(t^{-1/p_1}x_{11};\ldots;t^{-1/p_{n_1}}x_{1n_1};t^{-(1+1/p_1)}x_{21};\ldots;t^{-(1+1/p_{n_2})}x_{2n_2};$$

$$t^{-(2+1/p_1)}x_{31};\ldots;t^{-(2+1/p_{n_3})}x_{3n_3}\Big),$$

а

$$\tilde V(t,\tau,\eta_{(t-\tau)^{-1}})=V(t,\tau,\eta), \tag{17}$$

тобто

$$\tilde V(t,\tau,\sigma):=\exp\Bigg\{\sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_*\le 1}(t-\tau)^{1-|k_1/\overrightarrow{p}|_*}\int\limits_0^1 a_{k_1}(\tau+\chi(t-\tau))\times$$

$$\times(\sigma_1'+\chi\sigma_2'+2^{-1}\chi^2\sigma_3)^{k_1'}(\sigma_1''+\chi\sigma_2'')^{k_1''}(\sigma_1''')^{k_1'''}d\chi\Bigg\}.$$

Отже, дослідження функції G звелось до дослідження функції $\tilde{V}$.

Лема 3. *Правильним є таке твердження*:

$$\exists\{c_0, c_1\} \subset \mathbb{R}_+ \quad \forall z \in \mathbb{C}^{n_1} : \left| \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \leq 1} z^{k_1} \right| \leq c_0 |z|_*^{\overrightarrow{p}} + c_1.$$

Доведення. Оскільки

$$\left| \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \leq 1} z^{k_1} \right| \leq \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* = 1} |z|^{k_1} + \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* < 1} |z|^{k_1}, \quad z \in \mathbb{C}^{n_1},$$

то для доведення леми досить переконатися в тому, що

$$\exists c > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^{n_1} \setminus \{0\} \colon \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* = 1} |z|^{k_1} \leq c |z|_*^{\overrightarrow{p}}.$$

Нехай $z \in \mathbb{C}^{n_1} \setminus \{0\}$, тоді

$$\left(\sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* = 1} |z|^{k_1} \right) / |z|_*^{\overrightarrow{p}} = \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* = 1} \left(\prod_{j=1}^{n_1} |z_j^{p_j}|^{k_{1j}/p_j} \right) / |z|_*^{\overrightarrow{p}} \leq$$

$$\leq \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* = 1} \left(\prod_{j=1}^{n_1} (\max_j |z_j|^{p_j})^{k_{1j}/p_j} \right) / (\max_j |z_j|^{p_j}) = \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* = 1} 1.$$

Лему 3 доведено.

Наступне твердження характеризує $\tilde{V}$ як функцію просторової змінної.

Лема 4. *Функція* $\tilde{V}(t, \tau, \cdot)$ *при кожних фіксованих* t *і* τ, $0 \leq \tau < t \leq T$, *допускає аналітичне продовження до цілої функції на* $\mathbb{C}^n$, *для якої*

$$\exists\{c, \delta, \delta_1\} \subset \mathbb{R}_+ \quad \forall z := \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n \quad \forall \tau \in [0; T) \quad \forall t \in (\tau; T] \colon$$

$$\left| \tilde{V}(t, \tau, z) \right| \leq c \exp \left\{ - \sum_{j=1}^{n_3} \Big(\delta_j^{t-\tau} (|\xi_{1j}|^{h_j} + |\xi_{2j}|^{h_j} + |\xi_{3j}|^{h_j}) - \right.$$

$$- \delta_1 \big(|\eta_{1j}|^{p_j/\mu_j} + |\eta_{2j}|^{p_j/\mu_j} + |\eta_{3j}|^{p_j/\mu_j} \big) \Big) - \sum_{j=n_3+1}^{n_2} (\delta_j^{t-\tau} (|\xi_{1j}|^{h_j} + |\xi_{2j}|^{h_j}) -$$

$$\left. - \delta_1 \big(|\eta_{1j}|^{p_j/\mu_j} + |\eta_{2j}|^{p_j/\mu_j} \big)) - \sum_{j=n_2+1}^{n_1} \big(\delta_j^{t-\tau} |\xi_{1j}|^{h_j} - \delta_1 |\eta_{1j}|^{p_j/\mu_j} \big) \right\}, \tag{18}$$

де $\delta_j^t := \delta t^{1-h_j/p_j}$, $j \in \mathbb{N}_{n_1}$.

Доведення. Безпосередньо із структури функції $\tilde{V}$ переконуємося, що за просторовою змінною вона аналітично продовжується на весь комплексний простір $\mathbb{C}^n$. При цьому на підставі леми 3, а також обмеженості коефіцієнтів $a_{k_1}(\cdot)$ маємо

$$\left|\tilde{V}(t,\tau,z)\right| \le c\exp\left\{\delta\int\limits_0^1\left(\sum_{j=1}^{n_3}|z_{1j}+\chi z_{2j}+2^{-1}\chi^2 z_{3j}|^{p_j}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=n_3+1}^{n_2}|z_{1j}+\chi z_{2j}|^{p_j}+\sum_{j=n_2+1}^{n_1}|z_{1j}|^{p_j}\right)d\chi\right\},\quad 0\le\tau<t\le T,\quad z\in\mathbb{C}^n,\quad (19)$$

де c і δ — додатні сталі.

Використовуючи означення векторного роду $\overrightarrow{\mu}$ диференціального виразу L, одержуємо, що для всіх $z=\xi+i\eta\in\mathbb{C}^n$ таких, що

$$|\eta_{1j}+\chi\eta_{2j}+2^{-1}\chi^2\eta_{3j}|\le c_j'\big(1+|\xi_{1j}+\chi\xi_{2j}+2^{-1}\chi\xi_{3j}|\big)^{\mu_j},\quad j\in\mathbb{N}_{n_3},$$

$$|\eta_{1j}+\chi\eta_{2j}|\le c_j''\big(1+|\xi_{1j}+\chi\xi_{2j}|\big)^{\mu_j},\quad j\in\{n_3+1;\ldots;n_2\},$$

$$|\eta_{1j}|\le c_j'''(1+|\xi_{1j}|)^{\mu_j},\quad j\in\{n_2+1;\ldots;n_1\}$$

(тут $\chi\in[0;1]$, а c_j', c_j'' і c_j''' — додатні сталі, не залежні від z і χ), справджується нерівність

$$\left|\tilde{V}(t,\tau,z)\right|\le c_1\exp\left\{-\int\limits_0^1\left(\sum_{j=1}^{n_3}\delta_j^{t-\tau}|\xi_{1j}+\chi\xi_{2j}+2^{-1}\chi^2\xi_{3j}|^{h_j}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=n_3+1}^{n_2}\delta_j^{t-\tau}|\xi_{1j}+\chi\xi_{2j}|^{h_j}+\sum_{j=n_2+1}^{n_1}\delta_j^{t-\tau}|\xi_{1j}|^{h_j}\right)d\chi\right\}.\quad (20)$$

За допомогою нерівностей (19), (20) і міркувань, аналогічних використаним при доведенні теореми 2 з [7, с. 256, 284], одержуємо оцінку

$$\left|\tilde{V}(t,\tau,z)\right|\le c_2\exp\left\{-\int\limits_0^1\left(\sum_{j=1}^{n_3}\Big(\delta_j^{t-\tau}|\xi_{1j}+\chi\xi_{2j}+2^{-1}\chi^2\xi_{3j}|^{h_j}-b|\eta_{1j}+\chi\eta_{2j}+\right.\right.$$

$$+2^{-1}\chi^2\xi_{3j}|^{p_j/\mu_j}\Big)+\sum_{j=n_3+1}^{n_2}\Big(\delta_j^{t-\tau}|\xi_{1j}+\chi\xi_{2j}|^{h_j}-b|\eta_{1j}+\chi\eta_{2j}|^{p_j/\mu_j}\Big)+$$

$$\left.\left.+\sum_{j=n_2+1}^{n_1}\Big(\delta_j^{t-\tau}|\xi_{1j}|^{h_j}-b|\eta_{1j}|^{p_j/\mu_j}\Big)\right)d\chi\right\},$$

яка виконується для всіх $\tau\in[0;T)$, $t\in(\tau;T]$ і $z\in\mathbb{C}^n$, причому $c_2:=\max\{c,c_1\}$, а стала $b>0$.

Звідси, враховуючи існування сталих $c_j'>0$, $c_j''>0$, $j\in\mathbb{N}_2$, таких, що для $\overrightarrow{\alpha}:=(\overrightarrow{\alpha}';\overrightarrow{\alpha}'')>\overrightarrow{0}$

$$c_1'\le\int\limits_0^1\left|\zeta_1'/|\zeta'|_*+\chi\zeta_2'/|\zeta'|_*+2^{-1}\chi^2\zeta_3/|\zeta'|_*\right|_*^{\overrightarrow{\alpha}'}d\chi\le c_2',\quad \zeta'\in\mathbb{R}^{3n_3}\setminus\{0\},$$

$$c_1''\le\int\limits_0^1\left|\zeta_1''/|\zeta''|_*+\chi\zeta_2''/|\zeta''|_*\right|_*^{\overrightarrow{\alpha}''}d\chi\le c_2'',\quad \zeta''\in\mathbb{R}^{2(n_2-n_3)}\setminus\{0\},$$

отримуємо оцінку (18).

Наслідок. *Функція* $G(t,x;\tau,\cdot)$ *при кожних фіксованих* $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$ *і* $x\in\mathbb{R}^n$ *належить до простору* $S^{\overrightarrow{\alpha}^*}_{\overrightarrow{\beta}^*}$, *де* $\overrightarrow{\alpha}^*:=\{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{h},\widehat{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{h}},\overrightarrow{1}/\overrightarrow{h}'\}$, *а* $\overrightarrow{\beta}^*:=$
$:=\{\overrightarrow{1}-\overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{p},(\widehat{\overrightarrow{1}-\overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{p}}),(\overrightarrow{1}-\overrightarrow{\mu}/\overrightarrow{p})'\}$.

Це твердження стає очевидним, якщо взяти до уваги лему 4, рівності (3) і (16), властивість двоїстості за Фур'є просторів типу S, а також те, що

$$\tilde{T}^{x,-x}_t\colon S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}\longrightarrow S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}},\quad t\ge 0,\quad x\in\mathbb{R}^n$$

$\big($бо $e^{-i(x,\zeta)}e^{-i(t\hat{x}_1,\zeta_2)}e^{-i(tx_2'+2^{-1}t^2x_1',\zeta_3)}$, як функція ζ, є мультиплікатором у просторах типу S при кожних фіксованих $t\ge 0$ і $x\in\mathbb{R}^n\big)$.

Лема 5. *При кожних фіксованих* $x\in\mathbb{R}^n$ *і* $\tau\in[0;T)$ $G(t,x;\tau,\cdot)$, *як абстрактна функція параметра* t, *диференційовна по* t *на* $(\tau;T]$ *у просторі* $S^{\overrightarrow{\alpha}^*}_{\overrightarrow{\beta}^*}$.

Доведення. Оскільки оператор Фур'є (як прямий, так і обернений) взаємно однозначно і неперервно відображає простори типу S у їм відповідні, то, зважаючи на рівність

$$G(t,x;\tau,\xi)=(2\pi)^{-n}F_{\zeta\to\xi}\Big[(\tilde{T}^{x,-x}_{t-\tau}V)(t,\tau,\zeta)\Big](t,x;\tau,\xi),$$

для доведення леми досить переконатися в існуванні границі

$$\Psi_h(t,x;\tau,\cdot):=\Big((\tilde{T}^{x,-x}_{t^\tau_h}V)(t+h,\tau,\cdot)-(\tilde{T}^{x,-x}_{t-\tau}V)(t,\tau,\cdot)\Big)/h\underset{h\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\partial_t(\tilde{T}^{x,-x}_{t-\tau}V)(t,\tau,\cdot),\quad t^q_p:=t+p-q, \tag{21}$$

у просторі $S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}$ для кожних $x\in\mathbb{R}^n$ і $\tau\in[0;T)$. Оскільки

$$\Psi_h(t,x;\tau,\cdot)=e^{-i(\cdot,x)}\Bigg(\partial_t\mu(t+\theta h,x;\tau,\cdot)V(t+h,\tau,\cdot)+$$
$$+\mu(t,x;\tau,\cdot)\partial_tV(t+\theta h,\tau,\cdot)\Bigg),\quad \theta\in(0;1)$$

(тут $\mu(t,x;\tau,\zeta):=e^{-i((\zeta_2,(t-\tau)\hat{x}_1)+(\zeta_3,(t-\tau)x_2'+2^{-1}(t-\tau)^2x_1'))}$), а

$$\partial_t\big(\tilde{T}^{x,-x}_{t-\tau}V\big)(t,\tau,\cdot)=\partial_t\mu(t,x;\tau,\cdot)V(t,\tau,\cdot)+\mu(t,x;\tau,\cdot)\partial_tV(t,\tau,\cdot),$$

то (21) виконуватиметься, якщо будуть правильними такі твердження:

а) $\partial_t\mu(t+\theta h,x;\tau,\cdot)V(t+h,\tau,\cdot)\xrightarrow[h\to 0]{S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}}\partial_t\mu(t,x;\tau,\cdot)V(t,\tau,\cdot)$,

б) $\partial_tV(t+\theta h,\tau,\cdot)\xrightarrow[h\to 0]{S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}}\partial_tV(t,\tau,\cdot)$

для кожного фіксованого $x\in\mathbb{R}^n$ і $\tau\in[0;T)$.

Переконаємося спочатку в тому, що для будь-якого компакта $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}^n$

$$\Delta:=\Big|\partial_t\mu(t+\theta h,x;\tau,\zeta)V_t(t+h,\tau,\zeta)-\partial_t\mu(t,x;\tau,\zeta)\Big|\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\underset{h\to 0}{\rightrightarrows}}0, \tag{22}$$

де

$$V_t(t+h,\tau,\zeta) := \exp\left\{ \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_* \le 1} \int\limits_t^{t+h} a_{k_1}(\theta)(\zeta_1' + (\theta-\tau)\zeta_2' + \right.$$

$$\left. +2^{-1}(\theta-\tau)^2\zeta_3)^{k_1'}(\zeta_1'' + (\theta-\tau)\zeta_2'')^{k_1''}(\zeta_1''')^{k_1'''} d\theta \right\}.$$

Зважаючи на те, що

$$\partial_t \mu(t+\theta h, x; \tau, \zeta) =$$

$$= e^{-i\theta h((\zeta_2,\hat{x}_1)+(\zeta_3,x_2'+t_{\theta h}^{\tau}x_1'))}\big(\partial_t\mu(t,x;\tau,\zeta) - i\theta h \mu(t,x;\tau,\zeta)(\zeta_3,x_1')\big), \tag{23}$$

одержуємо нерівність

$$\Delta \le \big|\partial_t\mu(t,x;\tau,\zeta)\big| \left| e^{-i\theta h((\zeta_2,\hat{x}_1)+(\zeta_3,x_2'+t_{\theta h}^{\tau}x_1'))} V_t(t+\theta h,\tau,\zeta) - 1\right| +$$

$$+|\theta h|\,\big|\mu(t,x;\tau,\zeta)(\zeta_3,x_1')\big| \left| e^{-i\theta h((\zeta_2,x_1')+(\zeta_3,x_2'+t_{\theta h}^{\tau}x_1'))}\right|.$$

З цієї нерівності, а також обмеженості при кожних t, x і τ функцій

$$\big|\partial_t\mu(t,x;\tau,\zeta)\big|, \quad \big|\mu(t,x;\tau,\zeta)(\zeta_3,x_1')\big|,$$

$$\left| e^{-i\theta h((\zeta_2,\hat{x}_1)+(\zeta_3,x_2'+t_{\theta h}^{\tau}x_1'))}\right|, \quad |h| \le 1, \quad \zeta \in \mathbb{K},$$

випливає, що доведення (22) зводиться до встановлення граничного співвідношення

$$\left| e^{-i\theta h((\zeta_2,\hat{x}_1)+(\zeta_3,x_2'+t_{\theta h}^{\tau}x_1'))} V_t(t+h,\tau,\zeta) - 1\right| \underset{h\to 0}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0. \tag{24}$$

Виконання цього співвідношення стає очевидним, якщо зважити на можливість застосування відомого твердження Лагранжа про скінченні прирости до підмодульного виразу в (24).

Отже, для доведення твердження а) залишається переконатися в обмеженості у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$ сукупності функцій $\partial_t\mu(t+\theta h,x;\tau,\cdot)V(t+h,\tau,\cdot)$, $|h| \ll 1$ (при кожних фіксованих $t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$ і $x \in \mathbb{R}^n$). Для цього ще раз скористаємося рівністю (23). Оскільки $\partial_t\mu(t,x;\tau,\zeta)$ і $\mu(t,x;\tau,\zeta)(\zeta_3,x_1')$, як функції ζ, при кожних фіксованих t, x і τ є мультиплікаторами у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$, то зазначена обмеженість виконуватиметься, якщо $V(t+h,\tau,\zeta)$ і $EV(t+h,x;\tau,\zeta) :=$ $:= e^{-i\theta h((\zeta_2,\hat{x}_1)+(\zeta_3,x_2'+t_{\theta h}^{\tau}x_1'))}V(t+h,\tau,\zeta)$ будуть обмеженими в $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$, як функції ζ, для досить малих значень $|h|$.

Спочатку переконаємося в обмеженості V. Враховуючи зв'язок (17) між V і $\tilde{V}$ та оцінки (18), маємо

$$\big|V(t+h,\tau,\zeta)\big| \le c\exp\left\{ -\sum_{j=1}^{n_3}\Big(\delta_1 t_h^{\tau}(|\xi_{1j}|^{h_j} + |t_h^{\tau}\xi_{2j}|^{h_j} + |(t_h^{\tau})^2\xi_{3j}|^{h_j}) - \right.$$

$$-\delta_2\Big(|(t_h^{\tau})^{1/p_j}\eta_{1j}|^{p_j/\mu_j} + |(t_h^{\tau})^{1+1/p_j}\eta_{2j}|^{p_j/\mu_j} + |(t_h^{\tau})^{2+1/p_j}\eta_{3j}|^{p_j/\mu_j}\Big)\Big) -$$

$$-\sum_{j=n_3+1}^{n_2}\Big(\delta_1 t_h^\tau\big(|\xi_{1j}|^{h_j}+|t_h^\tau\xi_{2j}|^{h_j}\big)-\delta_2\big(|(t_h^\tau)^{1/p_j}\eta_{1j}|^{p_j/\mu_j}+|(t_h^\tau)^{1+1/p_j}\eta_{2j}|^{p_j/\mu_j}\big)\Big)-$$

$$-\sum_{j=n_2+1}^{n_1}\Big(\delta_1 t_h^\tau|\xi_{1j}|^{h_j}-\delta_2|(t_h^\tau)^{1/p_j}\eta_{1j}|^{p_j/\mu_j}\Big)\Bigg\},$$

$$\zeta=\xi+i\eta\in\mathbb{C}^n,\quad 0\le\tau<t\le T,\quad |h|\ll 1. \tag{25}$$

Звідси для $|h|<(t-\tau)/2$ дістаємо потрібну обмеженість функції V.

Обмеженість $EV(t+h,x;\tau,\cdot)$ випливає безпосередньо з щойно встановленої обмеженості $V(t+h,\tau,\cdot)$ та з того, що $\overrightarrow{p}/\overrightarrow{\mu}\ge\overrightarrow{p}\ge\overrightarrow{1}$, $\overrightarrow{0}<\overrightarrow{\mu}\le\overrightarrow{1}$.

Отже, твердження а) доведено.

Перейдемо тепер до встановлення твердження б). Оскільки

$$\partial_t V(t+b,\tau,\cdot)=P_0(t+b,\tau,\cdot)V(t+b,\tau,\cdot), \tag{26}$$

де

$$P_0(t+b,\tau,\zeta):=$$

$$:=\sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_*\le 1}a_{k_1}(t+b)(\zeta_1'+t_b^\tau\zeta_2'+2^{-1}(t_b^\tau)^2\zeta_3)^{k_1'}(\zeta_1''+t_b^\tau\zeta_2'')^{k_1''}(\zeta_1''')^{k_1'''},$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \zeta\in\mathbb{C}^n,\quad |b|\le 1,$$

то

$$\Delta_1:=\big|\partial_t V(t+\theta h,\tau,\cdot)-\partial_t V(t,\tau,\cdot)\big|\le$$

$$\le\big|P_0(t+\theta h,\tau,\cdot)\big|\,\big|V(t+\theta h,\tau,\cdot)-V(t,\tau,\cdot)\big|+$$

$$+\big|V(t,\tau,\cdot)\big|\,\big|P_0(t+\theta h,\tau,\cdot)-P_0(t,\tau,\cdot)\big|.$$

Якщо врахувати рівномірну щодо h обмеженість на кожному компакті $\mathbb{K}$ виразу $|P_0(t+\theta h,\tau,\cdot)|$, то для доведення того, що для кожного компакта $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}^n$

$$\Delta_1\underset{h\to 0}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}0,$$

досить переконатися у правильності таких граничних співвідношень:

1) $\big|V_t(t+\theta h,\tau,\zeta)-1\big|\underset{h\to 0}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}0;$

2) $\big|P_0(t+\theta h,\tau,\zeta)-P_0(t,\tau,\zeta)\big|\underset{h\to 0}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}0.$

Виконання співвідношень 1 і 2 стає очевидним, якщо міркувати так, як і у випадку (24), та зважити на структуру функції $P_0(t,\tau,\cdot)$ і властивості коефіцієнтів $a_{k_1}(\cdot)$.

Обмеженість $\partial_t V(t+\theta h,\tau,\cdot)$, як функції h, $|h|\ll 1$, у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$ також є очевидною, якщо врахувати рівність (26) та раніше встановлений факт обмеженості $V(t+h,\tau,\cdot)$, а також те, що $P_0(t+\theta h,\tau,\cdot)$ є степеневою функцією з обмеженими коефіцієнтами.

Таким чином, правильність твердження б) встановлено.

Лему 5 доведено.

Зазначимо, що досліджені властивості функції G забезпечують коректність здійснених перетворень при одержанні формули (14) для досить „хороших” f. Крім цього, оскільки $V(t,x;\tau,\xi)$ експоненціально спадає за змінною ξ при $\|\xi\|\to\infty$, то перетворення Фур'є у формулі (15) є правомірним. А отже, подіявши оберненим перетворенням Фур'є на (13) та врахувавши зображення (15), одержимо, що $G(t,x;\tau,\xi)$, як функція змінних t і x, задовольняє рівняння (10) в $\Pi_{(\tau;T]}$.

На завершення цього пункту доведемо ще одне допоміжне твердження.

Лема 6. *Нехай* $\psi\in S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}$, $I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x):=\psi(x)\big(\tilde{T}^{x,-x}_{t-\tau}V\big)(t,\tau,\eta)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\eta\}\subset\mathbb{R}^n$, *а* $J^{t,\tau}_{\psi}(\eta):=\int_{\mathbb{R}^n}I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)dx$. *Тоді для всіх* $\tau\in[0;T)$

$$J^{t,\tau}_{\psi}(\cdot)\xrightarrow[t\to\tau+0]{S^{\vec{\beta}^*}_{\vec{\alpha}^*}}(2\pi)^nF^{-1}[\psi](\cdot).$$

Доведення. З огляду на критерій збіжності у просторах типу S досить встановити виконання таких умов:

1) $J^{t,\tau}_{\psi}(\zeta)\underset{t\to\tau+0}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}(2\pi)^nF^{-1}[\psi](\zeta)$ для будь-якого компакта $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}^n$;

2) сукупність $J^{t,\tau}_{\psi}(\cdot)$, $0<t-\tau\ll1$, обмежена у просторі $S^{\vec{\beta}^*}_{\vec{\alpha}^*}$.

Зазначимо, що

$$J^{t,\tau}_{\psi}(\cdot)=(2\pi)^nV(t,\tau,\cdot)\Big(\check{T}^{+}_{t-\tau}F^{-1}[\psi]\Big)(\cdot),\quad \psi\in S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*},\quad 0\le\tau<t\le T. \tag{27}$$

Тоді

$$\big|(2\pi)^{-n}J^{t,\tau}_{\psi}(\zeta)-F^{-1}[\psi](\zeta)\big|\le$$
$$\le\big|V(t,\tau,\zeta)-1\big|\,\Big|(\check{T}^{+}_{t-\tau}F^{-1}[\psi])(\zeta)\Big|+\Big|\Big(\check{T}^{+}_{t-\tau}F^{-1}[\psi]\Big)(\zeta)-F^{-1}[\psi](\zeta)\Big|.$$

Оскільки

$$\big|V(t,\tau,\zeta)-1\big|=\big|V(t,\tau,\zeta)-V(\tau,\tau,\zeta)\big|\underset{t\to\tau+0}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}0,$$

$$\Big|(\check{T}^{+}_{t-\tau}F^{-1}[\psi])(\zeta)-F^{-1}[\psi])(\zeta)\Big|=\Big|(\check{T}^{+}_{t-\tau}F^{-1}[\psi])(\zeta)-(\check{T}^{+}_{0}F^{-1}[\psi])(\zeta)\Big|\underset{t\to\tau+0}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}0$$

(у цьому неважко переконатися, якщо врахувати відповідну теорему про скінченні прирости та гладкість функцій V і ψ) і

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{K}}\Big(\Big|(\check{T}^{+}_{t-\tau}F^{-1}[\psi])(\zeta)\Big|\Big)\le c_T,$$

де c_T не залежить від t і τ, то виконання умови 1 є очевидним.

Далі, використавши зображення (27), оцінку

$$|V(t,\tau,\zeta)|\le c_1e^{\delta_0|\eta|_*^{\overline{\vec{1}-\vec{\beta}^*}}},\quad \zeta=\xi+i\eta\in\mathbb{C}^n,\quad 0\le\tau<t\le T,$$

яка випливає безпосередньо з (25) при $h=0$, а також те, що $F^{-1}[\psi](\cdot)\in S^{\vec{\beta}^*}_{\vec{\alpha}^*}$, тобто нерівність

$$\left|\left(\check{T}^{+}_{t-\tau}F^{-1}[\psi]\right)(\zeta)\right| \leq c\exp\left\{-\delta_1|\xi|_*^{\vec{1}/\vec{\alpha}^*} + \delta_2|\eta|_*^{\frac{\vec{1}}{\vec{1}-\vec{\beta}^*}}\right\},$$

$$\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^n, \quad 0 < t-\tau \ll 1,$$

де c, δ_1 і δ_2 — додатні сталі, дістанемо обмеженість абстрактної функції $J_{\psi}^{t,\tau}(\cdot)$ при досить близьких t до τ у просторі $S_{\vec{\alpha}^*}^{\vec{\beta}^*}$.

Лему 6 доведено.

3. Коректна розв'язність задачі Коші. Належність функції $G(t,x;\tau,\cdot)$ до простору $S_{\vec{\beta}^*}^{\vec{\alpha}^*}$ (при кожних фіксованих t, x і τ, які змінюються відомим способом), а також структура (14) при $\tau = 0$ розв'язку u рівняння (10), побудованого за регулярною узагальненою початковою при $t = \tau$ функцією f (з необхідними властивостями), наводять на думку про можливість поширення розв'язку рівняння (10) на всі елементи f з простору $(S_{\vec{\beta}^*}^{\vec{\alpha}^*})'$ за допомогою білінійної форми $\langle f_\eta, G(t,x;0,\eta)\rangle$ (тут індекс η вказує на змінну, за якою відбувається дія цього функціонала). Виявляється, що така форма є природним зображенням розв'язку, яке дозволяє розширити клас початкових значень класичних розв'язків рівняння (10).

Теорема. *Нехай початкова функція f є елементом простору $(S_{\vec{\beta}^*}^{\vec{\alpha}^*})'$. Тоді для задачі Коші* (10), (11) *існує єдиний неперервно залежний від початкових даних розв'язок, який диференційовний по t, нескінченно диференційовний по x і зображується формулою*

$$u(t,x) = \langle f_\eta, G(t,x;0,\eta)\rangle, \quad t \in \Pi_{(0;T]}.$$

Доведення. Враховуючи структуру (15) функції G, належність $F^{-1}_{\eta\to x}[V(t,\tau,\eta)]$, $0 \leq \tau < t \leq T$, до простору $S_{\vec{\beta}^*}^{\vec{\alpha}^*}$ (див. лему 4 і рівність (17)) та лему 2, одержуємо нескінченну диференційовність $G(t,x;\tau,\cdot)$ за параметром $x \in \mathbb{R}^n$ у просторі $S_{\vec{\beta}^*}^{\vec{\alpha}^*}$. Звідси на підставі наслідку з леми 4 та неперервності функціонала f з $(S_{\vec{\beta}^*}^{\vec{\alpha}^*})'$ дістаємо нескінченну диференційовність по x на $\mathbb{R}^n$ функції $u_\tau(t,x) := \big\langle f_\eta, G(t,x;\tau,\eta)\big\rangle$, $0 \leq \tau < t \leq T$, а також рівність

$$\partial_x^m u_\tau(t,x) = \big\langle f_\eta, \partial_x^m G(t,x;\tau,\eta)\big\rangle, \quad m \in \mathbb{Z}_+^n, \quad (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]}, \quad \tau \in [0;T).$$

Безпосередньо з леми 5 випливає рівність

$$\partial_t u_\tau(t,x) = \big\langle f_\eta, \partial_t G(t,x;\tau,\eta)\big\rangle, \quad (t;x) \in \Pi_{(\tau,T]}, \quad \tau \in [0;T),$$

яка характеризує звичайну диференційовність по t функції u_τ на $(\tau;T]$ для всіх $\tau \in [0;T)$.

Оскільки $G(t,x;\tau,\eta)$ — розв'язок рівняння (10) (при кожних фіксованих $\tau \in [0;T)$ і $\eta \in \mathbb{R}^n$), то на підставі лінійності функціонала f дістанемо рівність

$$(\partial_t + P(t,\partial_x))u_\tau(t,x) = \Big\langle f_\eta, \big(\partial_t + P(t,\partial_x)\big)G(t,x;\tau,\eta)\Big\rangle = 0,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(\tau;T]}, \quad \tau \in [0;T).$$

Отже, функція $\big\langle f_\eta, G(t,x;\tau,\eta)\big\rangle$ для $(t,x) \in (\tau,T] \times \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0;T)$, задовольняє рівняння (10) у звичайному розумінні.

Доведемо виконання початкової умови (11) для функції $u(t,\cdot)$. Зафіксувавши довільно ψ з $S_{\overrightarrow{\beta}^*}^{\overrightarrow{\alpha}^*}$ і врахувавши означення оберненого перетворення Фур'є узагальненої функції, а також регулярність функціонала $u_\tau(t,\cdot)$, одержимо

$$\big\langle u_\tau(t,x),\psi(x)\big\rangle = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\Big\langle F^{-1}_{\xi\to\eta}[f], F^{-1}_{\xi\to\eta}\big[G(t,x;\tau,\xi)\big]\Big\rangle\Big)\psi(x)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\Big\langle F^{-1}_{\xi\to\eta}[f], I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)\Big\rangle\Big)dx, \quad 0\le\tau<t\le T.$$

Доведемо тепер інтегровність абстрактної функції $I^{t,\tau}_{(\cdot),\psi}(x)$ по x (при кожному фіксованому $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$) у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$, тобто встановимо послідовне виконання таких умов:

1) функція $I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)$ інтегровна по x на кожній множині $K(r) := \{x\in\mathbb{R}^n\colon \|x\|\le \le r\}$, $r>0$, у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$;

2) $J^{t,\tau}_{r,\psi}(\eta) := \displaystyle\int_{K(r)} I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)dx \underset{r\to+\infty}{\overset{S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}}{\longrightarrow}} J^{t,\tau}_{\psi}(\eta)$, $\eta\in\mathbb{R}^n$, $0\le\tau<t\le T$.

Згідно із загальною теорією повних досконалих зліченно-нормованих просторів (див. [7, с. 100]) для виконання умови 1 досить переконатися в неперервності у сенсі топології простору $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$ абстрактної функції $I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)$ на множині $K(r)$ (при $\eta\in\mathbb{R}^n$, $0\le\tau<t\le T$). На підставі леми 2 та неперервності оператора Фур'є у просторах типу S функція $I^{t,\tau}_{\eta,\psi}(x)$ є неперервною на $\mathbb{R}^n$ за змінною x, як диференційовна функція в $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$.

Перейдемо до доведення твердження 2. Зважаючи на критерій збіжності у просторі $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$, необхідно переконатися у виконанні наступних умов:

1) $|J^{t,\tau}_{r,\psi}(\zeta) - J^{t,\tau}_{\psi}(\zeta)| \underset{r\to+\infty}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0$, $0\le\tau<t\le T$, для довільного компакта $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}^n$;

2) послідовність $J^{t,\tau}_{r,\psi}(\cdot)$, $r\in\mathbb{N}$, обмежена в $S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}$ при кожних фіксованих $t\in (\tau,T]$ і $\tau\in[0;T)$.

Зазначимо, що оскільки $\psi\in S_{\overrightarrow{\beta}^*}^{\overrightarrow{\alpha}^*}$, то

$$\exists\{c,\delta\}\subset\mathbb{R}_+ \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\colon \big|\psi(x)\big| \le c\exp\Big\{-\delta|x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}\Big\}.$$

Тому для кожної кулі $\overline{K}(\rho) := \Big\{(\zeta_1;\ldots;\zeta_n)\in\mathbb{C}^n \mid \sum\nolimits_{j=1}^n |\zeta_j|\le\rho\Big\}$, $\rho>0$, маємо

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} I^{t,\tau}_{\zeta,\psi}(x)dx\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|\psi(x)\big|\,\big|e^{-i(x,\zeta)}\mu(t,x;\tau,\zeta)V(t,\tau,\zeta)\big|dx \le$$

$$\le c \sup_{\zeta\in\overline{K}(\rho),\, x\in\mathbb{R}^n} \Big\{e^{-(\delta/2)|x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}}\big|e^{-i(x,\zeta)}\mu(t,x;\tau,\zeta)V(t,\tau,\zeta)\big|\Big\}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(\delta/2)|x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}}dx\right) =$$

$$= c_1(t,\tau,\rho) < +\infty, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \rho > 0.$$

Звідси випливає, що інтеграл $\int_{\mathbb{R}^n} I^{t,\tau}_{\zeta,\psi}(x)dx$ збігається рівномірно щодо ζ на довільній кулі $\overline{K}(\rho)$ при кожному фіксованому $t \in (\tau;T]$ і $\tau \in [0;T)$. Використовуючи це та рівність

$$\left| J^{t,\tau}_{r,\psi}(\zeta) - J^{t,\tau}_{\psi}(\zeta) \right| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K(r)} I^{t,\tau}_{\zeta,\psi}(x)dx \right|,$$

приходимо до виконання умови 1.

Умова 2 також виконується. Справді,

$$\left| J^{t,\tau}_{r,\psi}(\zeta) \right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| I^{t,\tau}_{\zeta,\psi}(x) \right| dx \le c|V(t,\tau,\zeta)|\mathcal{R}(t,\tau,\zeta) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(\delta/2)|x|_*^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}} dx,$$

$$r > 0, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad 0 \le \tau < t \le T,$$

де

$$\mathcal{R}(t,\tau,\xi+i\eta) :=$$

$$:= \prod_{j=1}^{n_3} \sup_{x_{1j}\in\mathbb{R}} \left(\exp\left\{ -\frac{\delta}{2}|x_{1j}|^{1/\beta_j^*} + |x_{1j}|\big(|\eta_{1j}| + (t-\tau)|\eta_{2j}| + 2^{-1}(t-\tau)^2|\eta_{3j}|\big) \right\} \right) \times$$

$$\times \prod_{j=n_3+1}^{n_2} \sup_{x_{1j}\in\mathbb{R}} \left(\exp\left\{ -\frac{\delta}{2}|x_{1j}|^{1/\beta_j^*} + |x_{1j}|\big(|\eta_{1j}| + (t-\tau)|\eta_{2j}|\big) \right\} \right) \times$$

$$\times \prod_{j=n_2+1}^{n_1} \sup_{x_{1j}\in\mathbb{R}} \left(\exp\left\{ -\frac{\delta}{2}|x_{1j}|^{1/\beta_j^*} + |x_{1j}|\,|\eta_{1j}| \right\} \right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n_3} \sup_{x_{2j}\in\mathbb{R}} \left(\exp\left\{ -\frac{\delta}{2}|x_{2j}|^{1/\beta_j^*} + +|x_{2j}|\big(|\eta_{2j}| + (t-\tau)|\eta_{3j}|\big) \right\} \right) \times$$

$$\times \prod_{j=n_3+1}^{n_2} \sup_{x_{2j}\in\mathbb{R}} \left(\exp\left\{ -\frac{\delta}{2}|x_{2j}|^{1/\beta_j^*} + |x_{2j}|\,|\eta_{2j}| \right\} \right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n_3} \sup_{x_{3j}\in\mathbb{R}} \left(\exp\left\{ -\frac{\delta}{2}|x_{3j}|^{1/\beta_j^*} + |x_{3j}|\,|\eta_{3j}| \right\} \right).$$

Якщо тепер врахувати рівності

$$\sup_{\rho>0} \big(\exp\{-a\rho^\alpha + b\rho\} \big) = \exp\left\{ (1-1/\alpha)(1/(\alpha a))^{1/(\alpha-1)} b^{1+1/(\alpha-1)} \right\},$$

$$\{a,b\} \subset \mathbb{R}_+, \quad \alpha > 0; \quad \overrightarrow{1} + (\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^* - \overrightarrow{1})^{-1} = \overrightarrow{p}/\overrightarrow{\mu},$$

та оцінку (25) при $h = 0$, то виконання умови 2 стає очевидним.

Отже, доведено рівність

$$\left\langle u_\tau(t,x),\psi(x)\right\rangle = \left\langle F^{-1}_{\xi\to\eta}[f], J^{t,\tau}_{\psi}(\eta)\right\rangle, \quad \psi\in S^{\overrightarrow{\alpha}^*}_{\overrightarrow{\beta}^*}, \quad 0\le\tau<t\le T, \tag{28}$$

з якої на підставі леми 6 одержуємо

$$\left\langle u_\tau(t,x),\psi(x)\right\rangle \underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow} (2\pi)^n\left\langle F^{-1}[f](\eta), F^{-1}[\psi](\eta)\right\rangle = \langle f,\psi\rangle$$

для будь-яких $\psi\in S^{\overrightarrow{\alpha}^*}_{\overrightarrow{\beta}^*}$ і $\tau\in[0;T)$. А звідси випливає виконання початкової умови (11) для функції $u(t,\cdot)=u_0(t,\cdot)$.

Доведемо тепер єдиність розв'язку задачі Коші (10), (11). Скористаємось відомим способом Хольмгрена, належно пристосувавши його до даного випадку. Нагадаємо, що цей спосіб характеризується тим, що з існування розв'язку заданого рівняння при довільних початкових даних з певного основного простору випливає єдиність розв'язку задачі Коші для відповідного спряженого рівняння.

Для цього розглянемо таку допоміжну (спряжену) задачу Коші:

$$\big(-\partial_t + P^*(t,\partial_x)\big)v(t,\tau,x)=0, \quad (t,x)\in\Pi_{[0;\tau)}, \tag{29}$$

$$v(t,\tau,\cdot)\ \underset{t\to\tau-0}{\overset{S^{\overrightarrow{\alpha}^*}_{\overrightarrow{\beta}^*}}{\longrightarrow}}\ \varphi(\cdot), \quad \varphi\in S^{\overrightarrow{\alpha}^*}_{\overrightarrow{\beta}^*}, \quad \tau\in(0,T], \tag{30}$$

де $\tau\in(0;T]$, $P^*(t,\partial_x)$ — спряжений з $P(t,\partial_x)$ диференціальний вираз, тобто

$$P^*(t,\partial_x) := \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_*\le 1} \overline{a_{k_1}(t)}(i\partial_{x_1})^{k_1}.$$

Оскільки φ — елемент з $S^{\overrightarrow{\alpha}^*}_{\overrightarrow{\beta}^*}$, то відповідний класичний розв'язок рівняння з (29) зображується рівністю

$$v(t,\tau,\cdot) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)G^*(t,\cdot;\tau,\xi)d\xi, \quad 0\le t<\tau\le T, \tag{31}$$

в якій G^* — ФРЗК (29), (30):

$$G^*(t,x;\tau,\xi) := (2\pi)^{-n}F_{\eta\to\xi}\big[(\tilde{T}^{x,-x}_{t-\tau}V^*)(t,\tau,\eta)\big](t,x;\tau,\xi),$$
$$0\le t<\tau\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де

$$V^*(t,\tau,\eta) := \exp\Bigg\{\sum_{|k_1/\overrightarrow{p}|_*\le 1}\int\limits_t^\tau \overline{a_{k_1}(\theta)}(\eta_1' + (\theta-\tau)\eta_2' + 2^{-1}(\theta-\tau)^2\eta_3)^{k_1'}\times$$
$$\times(\eta_1'' + (\theta-\tau)\eta_2'')^{k_1''}(\eta_1''')^{k_1'''}d\theta\Bigg\}, \quad 0\le t<\tau\le T, \quad \eta\in\mathbb{R}^n.$$

Міркуючи, як і у випадку задачі Коші (10), (11), переконуємося, що при кожних фіксованих t і τ, $0\le t<\tau\le T$, функція $V^*(t,\tau,\cdot)$ є елементом простору $S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}$, до того ж виконується граничне співвідношення (30) для v з формули (31).

Звідси, зважаючи на те, що

$$v(t,\tau,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F^{-1}[\varphi](\eta)(\tilde{T}^{x,-x}_{t-\tau}V^*)(t,\tau,\eta)d\eta, \quad 0\le t<\tau\le T, \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

та враховуючи при цьому лему 1, а також те, що $F^{-1}[\varphi](\cdot) \in S^{\vec{\beta}^*}_{\vec{\alpha}^*}$, одержуємо належність функції $v(t,\tau,\cdot)$ до простору $S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}$ для всіх t і τ, $0 \le t < \tau \le T$.

Далі означимо оператор $Q^t_\tau \colon S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*} \to S^{\vec{\beta}^*}_{\vec{\alpha}^*}$ рівністю

$$(Q^t_\tau \varphi)(\cdot) := v(t,\tau,\cdot), \quad 0 \le t < \tau \le T.$$

Цей оператор є лінійним, неперервним і таким, що для всіх $\varphi \in S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}$

$$\partial_t Q^t_\tau \varphi = P^*(t,\partial_x) Q^t_\tau \varphi, \quad Q^t_\tau \varphi \xrightarrow[t\to\tau-0]{S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}} \varphi. \tag{32}$$

Розглянемо тепер розв'язок $u(t,\cdot) = \big\langle f_\eta, G(t,\cdot;0,\eta)\big\rangle$, $f \in (S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*})'$, задачі Коші (10), (11), який, очевидно, є елементом простору $\left(S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}\right)'$. Для єдиності розв'язку цієї задачі досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (10) при нульовій початковій умові може бути лише $u = 0$.

Застосуємо функціонал u до функції $Q^t_\tau \varphi$, де φ — довільний елемент з $S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}$, і розглянемо $\sum^t_\tau \varphi := \langle u, Q^t_\tau \varphi\rangle$. Диференціюючи $\sum^t_\tau \varphi$ по t та використовуючи рівності (10) і (32), одержуємо

$$\partial_t \sum\nolimits^t_\tau \varphi = \langle \partial_t u, Q^t_\tau \varphi\rangle + \langle u, \partial_t Q^t_\tau \varphi\rangle = -\langle Pu, Q^t_\tau \varphi\rangle + \langle u, P^* Q^t_\tau \varphi\rangle =$$
$$= -\langle Pu, Q^t_\tau \varphi\rangle + \langle Pu, Q^t_\tau \varphi\rangle = 0, \quad \varphi \in S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}, \quad 0 \le t \le \tau \le T$$

(про диференційовність абстрактної функції див. [7, с. 96]). Звідси робимо висновок, що $\sum^t_\tau \varphi$ — стала величина. Враховуючи тепер початкову умову $u(t,\cdot)|_{t=0} = 0$, знаходимо, що для всіх $t \in [0;\tau)$ $\sum^t_\tau \varphi = 0$, $\varphi \in S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}$. Зокрема, при $t \to \tau - 0$, згідно з (32) та тим, що u — неперервний функціонал з $\left(S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}\right)'$, маємо $\sum^\tau_\tau \varphi = \langle u, \varphi\rangle = 0$, $\varphi \in S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}$. Отже, $u(t,\cdot) = 0$ для $t \in [0;\tau]$. Довільність вибору τ з $(0;T]$ забезпечує виконання цієї рівності для всіх $t \in [0;T]$.

Нарешті, переконаємось у неперервній залежності розв'язку задачі (10), (11) від початкових даних. Для цього досить встановити, що для кожної послідовності $\{f; f_\nu, \nu \ge 1\} \subset \left(S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}\right)'$, $f_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\left(S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}\right)'} f$, відповідна послідовність розв'язків $u_\nu := \langle f_\nu, G\rangle \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\left(S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}\right)'} \langle f, G\rangle =: u$, тобто

$$\forall \varphi \in S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}\colon \quad \langle u_\nu, \varphi\rangle \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} \langle u, \varphi\rangle.$$

Цей факт стає очевидним, якщо використати рівність (28) та властивість неперервності оператора Фур'є у просторі $\left(S^{\vec{\alpha}^*}_{\vec{\beta}^*}\right)'$.

Теорему доведено.

1. *Kolmogoroff A. N.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**. – P. 116 – 117.
2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

3. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1 – 72.
4. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40 – 43.
5. *Литовченко В. А.* Задача Коши для $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 3-4. – С. 364 – 379.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
7. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
8. *Івасишен С. Д., Андросова Л. М.* Принцип локалізації для розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. – Чернівці, 1990. – С. 48 – 61.
9. *Возняк О.Г.* Про однозначну розв'язність задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь у просторах узагальнених функцій // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2001. – Вип. 111. – С. 5 – 10.
10. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Однозначна розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь з узагальненими початковими даними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 27 – 39.

Одержано 16.01.09