УДК 517.9

А. В. Арсирий (Одес. нац. ун-т),
А. В. Плотников (Одес. акад. стр-ва и архитектуры)

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

We consider the optimal control problem with terminal quality criterion, in which the condition of a system is described by a set-valued map and an admissible control is a summable function. We describe the algorithm which approximates the admissible control function by a piecewise constant function and prove theorems on the proximity of corresponding trajectories and values of quality criteria.

Розглянуто задачу оптимального керування із термінальним критерієм якості, у якій стан системи описується багатозначним відображенням, а допустиме керування є сумовною функцією. Описано алгоритм апроксимації допустимої функції керування кусково-сталою функцією та доведено теореми про близькість відповідних траєкторій та значень критеріїв якості.

С конца 60-х годов 20 века началось бурное развитие теории многозначных отображений. В работе [1] М. Хукухара ввел производную и интеграл от многозначных отображений и исследовал их связь между собой. Впоследствии в работе [2] были рассмотрены дифференциальные уравнения с производной Хукухары, введены различные определения решений и доказаны теоремы их существования [3], а в работах [4, 5] рассмотрена возможность применения некоторых схем усреднения для них.

Уравнения с производной Хукухары были использованы в работе [6] при изучении некоторых свойств „интегральной воронки” дифференциального включения в банаховом пространстве, а в работах [7, 8] при исследовании уравнений с нечеткими начальными условиями.

В данной статье рассматривается задача управления процессом, описываемым линейным дифференциальным уравнением с производной Хукухары с терминальным критерием качества. Данную задачу можно существенно упростить, если функцию управления аппроксимировать кусочно-постоянной функцией. Поэтому приводится алгоритм построения этого приближенного кусочно-постоянного управления и доказывается близость соответствующих им траекторий и значений критериев качества.

Пусть $\mathrm{Conv}(R^n)$ — пространства непустых компактных и выпуклых подмножеств евклидового пространства R^n с метрикой Хаусдорфа $h(\cdot,\cdot)$.

Рассмотрим управляемую систему, которая описывается линейным дифференциальным уравнением с производной Хукухары вида

$$D_h X(t) = A(t)X(t) + u(t) + F(t), \qquad X(0) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$; $X(\cdot):[0,T] \to \mathrm{Conv}(R^n)$ — многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_h X(t)$ — производная Хукухары [1]; $A(t)$ — $(n\times n)$-матрица; $F(\cdot):[0,T] \to \mathrm{Conv}(R^n)$ — отклонение системы; $u(\cdot) \in U \in \mathrm{Conv}(R^n)$ — управляемое воздействие.

Предположение 1. *Будем предполагать, что система* (1) *удовлетворяет условиям*:

1) *матрица* $A(t)$ *измерима на* $[0,T]$;

2) *существует константа* $a>0$ *такая, что* $\|A(t)\| \le a$ *для почти всех* $t\in[0,T]$;

3) *многозначное отображение* $F(\cdot)$ *измеримо на* $[0,T]$;

4) *существует константа* $f>0$ *такая, что* $h(F(t),0)\le f$ *для почти всех* $t\in[0,T]$.

Определение 1 [3]. *Решением задачи* (1), *соответствующим допустимому управлению* $u(\cdot)\in U$, *называется абсолютно непрерывное многозначное отображение* $X(\cdot,u)$, *удовлетворяющее* (1) *почти всюду на* $[0,T]$.

Наряду с задачей (1) рассмотрим присоединенную к ней задачу

$$X(t) = X_0 + \int_0^t [A(s)X(s)+u(s)+F(s)]\,ds. \tag{2}$$

Интеграл в (2) понимается в смысле Хукухары [1].

Определение 2 [3]. *Решением задачи* (2), *соответствующим допустимому управлению* $u(\cdot)\in U$, *называется абсолютно непрерывное многозначное отображение* $X(\cdot,u)$, *удовлетворяющее* (2) *всюду на* $[0,T]$.

Из дифференцируемости почти всюду интеграла с переменным верхним пределом следует, что любое решение задачи (2) является решением задачи (1) [2, 3].

Пусть качество функционирования системы (1) оценивается критерием

$$I(u) = \Phi(X(T,u)), \tag{3}$$

где $\Phi(\cdot):\mathrm{Conv}(R^n)\to R^1$.

Лемма 1. *Пусть* $u(t)=(u^1(t),u^2(t),\ldots,u^n(t))$ — *измеримая функция на отрезке* $[0,T]$ *такая, что* $u^j(t)\in[u^j_{\min},u^j_{\max}]$, $j=\overline{1,n}$, *для почти всех* $t\in[0,T]$. *Разобьем отрезок* $[0,T]$ *на* k *частей* $[(i-1)h,ih]$, $i=\overline{1,k}$, $h=\dfrac{T}{k}$. *Тогда существует кусочно-постоянная функция* $u^*(t)$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $u^*(t)$ *постоянна на каждом из отрезков* $[(i-1)h,ih]$, $i=\overline{1,k}$;

2) $u_i^*(s) = \{ (u_i^{*1}(s),u_i^{*2}(s),\ldots,u_i^{*n}(s))^T : u_i^{*j}(s)\in\{u^j_{\min},u^j_{\max}\},\ i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,n}\}$ *для всех* $s\in[0,T]$;

3) *для любого* $t\in[0,T]$ *выполняется неравенство*

$$\left\| \int_0^t u(s)ds - \int_0^t u^*(x)ds \right\| \le \frac{1}{2}\|u_{\max}-u_{\min}\|\,h. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим $U_i(t) = (U_i^1,U_i^2,\ldots,U_i^n)^T$, где $U_i^j = \int_{(1-i)h}^{ih} u_j(s)ds$, $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,k}$ и $u^*(t)=u_i=(u_i^1,u_i^2,\ldots,u_i^n)^T:[\,u_i^j\in\{u^j_{\min}, u^j_{\max}\},\ j=\overline{1,n}\,]$, $t\in[(i-1)h,ih]$, $i=\overline{1,k}$.

Сконструируем функцию $u^*(t)$, т. е. определим $u_1, u_2, \ldots, u_n$ следующим образом:

1) $u_1 = (u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^n)$:

$$u_1^j = \begin{bmatrix} u_{\max}^j, & \text{если} & U_1^j \geq \frac{1}{2}(u_{\max}^j + u_{\min}^j)h \\ u_{\min}^j, & \text{если} & U_1^j < \frac{1}{2}(u_{\max}^j + u_{\min}^j)h \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, n};$$

2) предположим, что мы уже определили $u_1, u_2, \ldots, u_i$; тогда $u_{i+1} = (u_{i+1}^1, u_{i+1}^2, \ldots, u_{i+1}^n)$:

$$u_{i+1}^j = \begin{bmatrix} u_{\max}^j, & \text{если} & U_{i+1}^j - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h \geq \frac{1}{2}(u_{\max}^j + u_{\min}^j)h \\ u_{\min}^j, & \text{если} & U_{i+1}^j - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h < \frac{1}{2}(u_{\max}^j + u_{\min}^j)h \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Из определения U_i следует, что $u_{\min}^j h \leq U_i^j - U_{i-1}^j \leq u_{\max}^j h$, $j = \overline{1, n}$, или $u_{\min} h \leq U_i - U_{i-1} \leq u_{\max} h$.

Поэтому если мы конструируем u_i, $i = \overline{1, k}$, по приведенной выше процедуре, то имеют место следующие соотношения:

для $i = 1$ и $j = \overline{1, n}$

если $u_1^j = u_{\max}^j$, то $0 \geq U_1^j - u_1^j h \geq \frac{1}{2}(u_{\max}^j - u_{\min}^j)h$,

если $u_1^j = u_{\min}^j$, то $\frac{1}{2}(u_{\max}^j - u_{\min}^j)h > U_1^j - u_1^j h \geq 0$,

т. е. $\left| U_1^j - u_1^j h \right| \geq \frac{1}{2}(u_{\max}^j - u_{\min}^j)h$, $j = \overline{1, n}$, или

$$\left\| U_1 - u_1 h \right\| \geq \frac{1}{2}\left\| u_{\max} - u_{\min} \right\| h. \tag{5}$$

Аналогично, для $i = \overline{2, k}$ и $j = \overline{1, n}$ имеем:

если $u_{i+1}^j = u_{\max}^j$, то

$$U_i^j - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h \geq U_{i+1}^j - u_{i+1}^j h - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h \geq -\frac{1}{2}(u_{\max}^j - u_{\min}^j)h,$$

если $u_{i+1}^j = u_{\min}^j$, то

$$\frac{1}{2}(u_{\max}^j - u_{\min}^j)h > U_{i+1}^j - u_{i+1}^j h - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h \geq U_i^j - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h,$$

т. е.

$$\left| U_{i+1}^j - \sum_{k=1}^{i+1} u_k^j h \right| \leq \max\left\{ \frac{1}{2}(u_{\max}^j - u_{\min}^j)h, \left| U_i^j - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h \right| \right\}, \quad j = \overline{1, n},$$

или

$$\left\| U_{i+1} - \sum_{j=1}^{i+1} u_j h \right\| \leq \max\left\{ \frac{1}{2}\| u_{\max} - u_{\min} \| h, \left\| U_i - \sum_{j=1}^{i} u_j h \right\| \right\}. \qquad (6)$$

Соотношения (5) и (6) доказывают, что неравенство (4) выполняется для всех $t = ih$, $i = \overline{1,k}$, т. е. для граничных точек отрезков $[(i-1)h, ih]$, $i = \overline{1,k}$. Осталось установить неравенство (4) для внутренних точек этих отрезков.

Пусть $t \in ((i-1)h, ih)$, $i = \overline{1,k}$. Тогда

$$\left\| \int_0^t u(s)ds - \int_0^t u^*(s)ds \right\| = \left\| \left(U_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} u_j h \right) + \int_{(i-1)h}^{t} (u(s) - u_i)ds \right\|.$$

При оценке второго слагаемого в правой части возможны два случая: 1) $u_i^j = u_{\max}^j$, $j = \overline{1,n}$; 2) $u_i^j = u_{\min}^j$, $j = \overline{1,n}$.

Очевидно, что в первом случае для любого $j = 1, \ldots, n$ можно записать оценку

$$0 \geq \int_{(i-1)h}^{t} (u^j(s) - u_i^j)ds \geq \int_{(i-1)h}^{ih} (u^j(s) - u_i^j)ds = U_i^j - U_{i-1}^j - u_i^j h.$$

После преобразований получим

$$U_i^j - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h \leq U_{i-1}^j - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h + \int_{(i-1)h}^{t} (u^j(s) - u_i^j)ds \leq U_{i-1}^j - \sum_{k=1}^{i-1} u_k^j h, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Аналогично, во втором случае для любого $j = \overline{1,n}$

$$U_i^j - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h \geq U_{i-1}^j - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h + \int_{(i-1)h}^{t} (u^j(s) - u_i^j)ds \geq U_{i-1}^j - \sum_{k=1}^{i-1} u_k^j h.$$

Следовательно, для всех $j = \overline{1,n}$ и $t \in ((i-1)h, ih)$

$$\left| \int_0^t u^j(s)ds - \int_0^t u_i^j(s)ds \right| \leq \max\left\{ \left| U_i^j - \sum_{k=1}^{i} u_k^j h \right|, \left| U_{i-1}^j - \sum_{k=1}^{i-1} u_k^j h \right| \right\},$$

т. е.

$$\left\| \int_0^t u(s)ds - \int_0^t u^*(s)ds \right\| \leq \max\left\{ \left\| U_i - \sum_{j=1}^{i} u_j h \right\|, \left\| U_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} u_j h \right\| \right\}.$$

Таким образом, неравенство (4) выполняется для любого $t \in [0, T]$.

Лемма доказана.

Теперь докажем близость решений системы (1) и значений критериев качества, соответствующих исходному измеримому управлению и построенному кусочно-постоянному.

Теорема 1. *Пусть* $u(\cdot)$ *— произвольное допустимое управление,* $X(t, u)$ *— соответствующая ему траектория системы* (1) *с начальным состоянием* $X(t_0, u) = X_0$, *а отображение* $\Phi(\cdot)$ *непрерывно и удовлетворяет условию Липшица с постоянной* λ. *Разобьем отрезок* $[0, T]$ *на* k *частей и сконст-*

руируем управление $u^*(\cdot)$ *согласно лемме* 1, *и пусть* $X(t,u^*)$ — *соответствующая траектория системы* (1) *с начальным условием* $X(t_0,u^*)=X_0$.

Тогда:

1) *существует константа* $C_1=e^{aT}$ *такая, что для всех* $t\in[0,T]$ *выполняется неравенство*

$$h\big(X(t,u),X(t,u^*)\big)\le C_1\,\|u_{\max}-u_{\min}\|\frac{h}{2};\tag{7}$$

2) *существует константа* $C_2>0$ *такая, что для всех* $t\in[0,T]$ *выполняется неравенство*

$$\big|I(u)-I(u^*)\big|\le C_2\,\|u_{\max}-u_{\min}\|\frac{h}{2}.\tag{8}$$

Доказательство. Переходя от уравнения (1) к соответствующему интегральному уравнению, для допустимых управлений $u(t)$ и $u^*(t)$ и соответствующих им траекторий $X(t,u)$ и $X(t,u^*)$ получаем

$$h\big(X(t,u),X(t,u^*)\big)=$$

$$=h\left(\int_0^t[A(s)X(s,u)+u(s)+F(s)]\,ds,\int_0^t[A(s)X(s,u^*)+u^*(s)+F(s)]\,ds\right)\le$$

$$\le h\left(\int_0^t[A(s)X(s,u)+u(s)+F(s)]\,ds,\int_0^t[A(s)X(s,u)+u^*(s)+F(s)]\,ds\right)+$$

$$+h\left(\int_0^t[A(s)X(s,u)+u^*(s)+F(s)]\,ds,\int_0^t[A(s)X(s,u^*)+u^*(s)+F(s)]\,ds\right)\le$$

$$\le\left\|\int_0^t u(s)\,ds-\int_0^t u^*(s)\,ds\right\|+h\left(\int_0^t[A(s)X(s,u)]\,ds,\int_0^t[A(s)X(s,u^*)]\,ds\right)\le$$

$$\le\left\|\int_0^t u(s)\,ds-\int_0^t u^*(s)\,ds\right\|+a\int_0^t h\big(X(s,u),X(s,u^*)\big)\,ds.$$

На основании леммы Гроноулла – Беллмана можно записать

$$h\big(X(t,u),X(t,u^*)\big)\le\left\|\int_0^t u(s)\,ds-\int_0^t u^*(s)\,ds\right\|e^{aT}\le e^{aT}\,\|u_{\max}-u_{\min}\|\frac{h}{2}.$$

Обозначая $C_1=e^{aT}$, получаем (7). Таким образом, близость решений доказана.

Поскольку отображение $\Phi(\cdot)$ непрерывно и удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ, то

$$\left|I(u) - I(u^*)\right| = \left|\Phi\big(X(t,u)\big) - \Phi\big(X(t,u^*)\big)\right| \le$$

$$\le \lambda \left| h\big(X(t,u), X(t,u^*)\big) \right| \le \lambda C_1 \left\| u_{\max} - u_{\min} \right\| \frac{h}{2}.$$

Обозначая $C_2 = \lambda C_1$, получаем (8). Следовательно, доказана близость критериев качества.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** В работе [9] получен аналогичный результат для обыкновенного билинейного дифференциального уравнения со скалярным управлением.

Пусть теперь критерий качества функционирования системы (1) будет многозначным, т. е.

$$J(u) = \Psi\big(X(T,u)\big), \tag{9}$$

где $\Psi(\cdot) : \mathrm{Conv}(R^n) \to \mathrm{Conv}(R^1)$.

Определение 3 [4]. *Управление* $u^* \in U$ *назовем максиминным* (*максимаксным*) *для задачи* (1), (9), *если для любого управления* $u \in U$ *выполняется неравенство*

$$mJ(u) \le mJ(u^*) \qquad \big(MJ(u) \le MJ(u^*)\big),$$

где $mA = \min\{a \mid a \in A, A \in \mathrm{Conv}(R^1)\}$, $MA = \max\{a \mid a \in A, A \in \mathrm{Conv}(R^1)\}$.

Тогда, как и при доказательстве теоремы 1, можно доказать близость максиминных и максимаксных значений критериев качества, соответствующих исходному измеримому и построенному кусочно-постоянному управлениям, т. е. существует такая константа $C_3 > 0$, что для всех $t \in [0, T]$ выполняются неравенства

$$\left| mJ(u) - mJ(u^*) \right| \le C_3 \left\| u_{\max} - u_{\min} \right\| \frac{h}{2},$$

$$\left| MJ(u) - MJ(u^*) \right| \le C_3 \left\| u_{\max} - u_{\min} \right\| \frac{h}{2}.$$

1. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205 – 223.
2. *de Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. – 1969. – **2**, № 4 – 5. – P. 491 – 501.
3. *Brandao Lopes Pinto A. J., de Blast F. S., Iervolino F.* Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Ibid. – 1970. – № 4. – P. 534 – 538.
4. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 354 с.
5. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. mat. – 1976. – **9**, № 3. – P. 397 – 408.
6. *Толстоногов А. Л.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
7. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – **24**, № 3. – P. 301 – 317.
8. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 1990. – **35**. – P. 389 – 396.
9. *Celikovsky S.* On the representation of trajectories of bilinear systems and its applications // Kybernetika. – 1987. – **23**, № 3. – P. 198 – 213.

Получено 03.04.07,
после доработки — 15.05.09