УДК 517. 956

В. М. Кирилич (Львов. нац. ун-т),
А. Д. Мышкис (Моск. ун-т путей сообщения, Россия),
М. В. Прохоренко (Нац. ун-т вод. хоз-ва и природоиспользования, Ривнэ)

КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНЫХ СИЛ

We study the problem of the existence of periodic solutions for a problem of oscillations of a diaphragm with friction and pulse feedback in the case where the times of pulse action are determined by a solution of the system.

Досліджується питання існування періодичних розв'язків задачі про коливання мембрани з тертям та імпульсною зворотною дією у випадку, коли моменти імпульсної дії визначаються розв'язком системи.

Теория колебаний механических систем приводит к изучению дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1]. В работе [2] рассмотрена задача о колебаниях струны с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, в работах [3, 4] — задача о колебаниях струны с рассеиванием энергии, в которой импульсное изменение процесса происходит в моменты времени, когда полная энергия системы достигает заданного критического значения, т. е. моменты импульсов определялись самим процессом.

Целью данной работы является отыскание периодических решений для задачи о колебаниях мембраны с трением и определением моментов импульсов подобно [3, 4].

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le l_1, 0 \le y \le l_2\}$. В области $G = \{(x, y, t) : (x, y) \in \Omega, t \in [0, +\infty)\}$ рассмотрим колебания мембраны, которые заданы уравнением

$$u_{tt} = a^2 \left(u_{xx} + u_{yy}\right) - 2\nu u_t, \quad (x, y, t) \in G, \tag{1}$$

$$a, \nu, l_1, l_2 = \text{const} > 0,$$

начальными

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(0, y, t) = 0, \quad u(l_1, y, t) = 0, \quad 0 \le y \le l_2, \quad t \in [0, +\infty), \\ &u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, l_2, t) = 0, \quad 0 \le x \le l_1, \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \tag{3}$$

где $u(x, y, t)$ — смещение мембраны в момент времени t, $\varphi_0 \in C^4(\Omega)$, $\psi_0 \in C^3(\Omega)$, $\varphi_0\,|_{\partial\Omega} = \psi_0\,|_{\partial\Omega} = 0$.

За регулирующий функционал принимаем полную энергию колебания мембраны $E_u(t)$:

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(a^2 \left((u_x)^2 + (u_y)^2\right) + (u_t)^2\right) dx dy$$

с заданным критическим значением $E_0 > 0$ и импульсным законом

$$\begin{aligned} \left(u(x,y,t+0)-u(x,y,t-0)\right)\big|_{E_u(t)=E_0} &= \alpha(x,y), \\ \left(u_t(x,y,t+0)-u_t(x,y,t-0)\right)\big|_{E_u(t)=E_0} &= \beta(x,y), \qquad (x,y)\in\Omega, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\alpha\in C^4(\Omega)$, $\beta\in C^3(\Omega)$ $\left(\alpha|_{\partial\Omega} = \beta|_{\partial\Omega} = 0\right)$ — заданные функции.

Следовательно, постановка задачи формулируется соотношениями (1) – (4). При этом равенства (1) – (3) применимы лишь в случае $E_u(t)\neq E_0$. Если $E_u(t)=E_0$, то в условии (4) рассматриваем $\varphi_0(x,y)$ вместо $u(x,y,t-0)$, $\psi_0(x,y)$ вместо $u_t(x,y,t-0)$ и 0 вместо $t-0$.

Функция $E_u(t)$ убывает для каждого нетривиального решения u задачи (1) – (3), поскольку $dE_u/dt = -2\nu\int\int_\Omega u_t^2dxdy$. Поэтому полная энергия колебания мембраны в начальный момент времени принимает наибольшее значение, а с течением времени рассеивается, и при заданном E_0 возможны следующие случаи:

а) $E_u(0)<E_0$, тогда импульсы отсутствуют и $E_u(t)\to 0$ при $t\to+\infty$;

б) $E_u(t)\geq E_0$, тогда существует момент времени $t=t_*\geq 0$, в который осуществляется первое импульсное воздействие.

Выполнение неравенства

$$E_0 < \frac{1}{8}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(a^2\left(\alpha_x^2(x,y)+\alpha_y^2(x,y)\right)+\beta^2(x,y)\right)dxdy$$

обеспечит существование бесконечной последовательности импульсов для заданных E_0, α, β. При $E_u(t-0)=E_0$ это следует из

$$\begin{aligned} E_u(t+0) &= \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(a^2\Big((u_x(x,y,t-0)+\alpha_x(x,y))^2+\Big(u_y(x,y,t-0)+\right. \\ &\quad \left. +\alpha_y(x,y)\Big)^2\Big)+\left(u_t(x,y,t-0)+\beta(x,y)\right)^2\right)dxdy \geq \\ &\geq \frac{1}{4}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(a^2\left(\alpha_x^2(x,y)+\alpha_y^2(x,y)\right)+\beta^2(x,y)\right)dxdy - \\ &- \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(a^2\left(u_x^2(x,y,t-0)+u_y^2(x,y,t-0)\right)+u_t^2(x,y,t-0)\right)dxdy = \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left(a^2\left(\alpha_x^2(x,y)+\alpha_y^2(x,y)\right)+\beta^2(x,y)\right)dxdy - E_0 > E_0. \end{aligned}$$

Моменты возникновения последовательности импульсов обозначим $t_1(\geq 0)< < t_2 < t_3 < \ldots$.

2. Разрешимость задачи. Разложим в ряд Фурье заданные функции в области Ω:

$$\varphi_0(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty}\varphi_{n,m}^0\sin\frac{\pi n}{l_1}x\sin\frac{\pi m}{l_2}y,$$

$$\psi_0(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty}\psi_{n,m}^0\sin\frac{\pi n}{l_1}x\sin\frac{\pi m}{l_2}y,$$

$$\alpha(x,y) \;=\; \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{n,m} \sin\frac{\pi n}{l_1}x \sin\frac{\pi m}{l_2}y\,,$$

$$\beta(x,y) \;=\; \sum_{n,m=1}^{\infty} \beta_{n,m} \sin\frac{\pi n}{l_1}x \sin\frac{\pi m}{l_2}y\,,$$

где $(x,y)\in\Omega$, $\varphi^0_{n,m}$, $\psi^0_{n,m}$, $\alpha_{n,m}$, $\beta_{n,m}$ — коэффициенты Фурье.

При указанных условиях решение задачи (1) – (3) перед моментом подачи первого импульса имеет вид

$$u(x,y,t) \;=$$

$$=\; e^{-\nu t}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\varphi^0_{n,m}\cos\omega_{n,m}t + \frac{\nu\varphi^0_{n,m}+\psi^0_{n,m}}{\omega_{n,m}}\sin\omega_{n,m}t\right)\sin\frac{\pi n}{l_1}x\sin\frac{\pi m}{l_2}y\,,$$

где

$$\omega_{n,m} \;=\; \sqrt{(a\pi n/l_1)^2+(a\pi m/l_2)^2-\nu^2} \quad \text{при} \quad (a\pi n/l_1)^2+(a\pi m/l_2)^2>\nu^2$$

и

$$\cos\omega_{n,m}t := \begin{cases} \operatorname{ch}|\,\omega_{n,m}|\,t, & (a\pi n/l_1)^2+(a\pi m/l_2)^2<\nu^2, \\ 1, & (a\pi n/l_1)^2+(a\pi m/l_2)^2=\nu^2, \end{cases}$$

$$\omega^{-1}_{n,m}\sin\omega_{n,m}t := \begin{cases} |\,\omega_{n,m}|^{-1}\operatorname{sh}|\,\omega_{n,m}|\,t, & (a\pi n/l_1)^2+(a\pi m/l_2)^2<\nu^2, \\ t, & (a\pi n/l_1)^2+(a\pi m/l_2)^2=\nu^2. \end{cases}$$

Согласно постановке задачи момент t_1 подачи первого импульса определяется из уравнения

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\left(\left(\frac{a\pi n}{l_1}\right)^2+\left(\frac{a\pi m}{l_2}\right)^2\right)\left(\varphi^0_{n,m}\cos\omega_{n,m}t_1+\frac{\nu^0_{n,m}+\psi^0_{n,m}}{\omega_{n,m}}\sin\omega_{n,m}t_1\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\left(\psi^0_{n,m}\cos\omega_{n,m}t_1-\frac{\left((a\pi n/l_1)^2+(a\pi m/l_2)^2\right)\varphi^0_{n,m}+\nu\psi^0_{n,m}}{\omega_{n,m}}\sin\omega_{n,m}t_1\right)^2\right) =$$

$$=\; \frac{8\,e^{2\nu t_1}}{l_1 l_2}E_0\,.$$

Для $t>t_1$ решаем задачу (1), (3), а вместо условий (2) с учетом (4) имеем

$$u(x,y,t_1) \;=\; \sum_{n,m=1}^{\infty}\left\{e^{-\nu t_1}\left(\varphi^0_{n,m}\cos\omega_{n,m}t_1+\frac{\nu\varphi^0_{n,m}+\psi^0_{n,m}}{\omega_{n,m}}\sin\omega_{n,m}t_1\right)+\right.$$

$$\left.+\;\alpha_{n,m}\right\}\sin\frac{\pi n}{l_1}x\,\sin\frac{\pi m}{l_2}y\,,$$

$$u'_t(x,y,t_1) \;=\; \sum_{n,m=1}^{\infty}\left\{\beta_{n,m}+e^{-\nu t_1}\left(\psi^0_{n,m}\cos\omega_{n,m}t_1\;-\right.\right.$$

$$- \frac{\left((a\pi n/l_1)^2 + (a\pi m/l_2)^2\right)\varphi_{n,m}^0 + \nu\psi_{n,m}^0}{\omega_{n,m}} \sin\omega_{n,m} t_1 \Bigg)\Bigg\} \sin\frac{\pi n}{l_1} x \sin\frac{\pi m}{l_2} y,$$

$$(x, y) \in \Omega.$$

Обозначим выражения в фигурных скобках соответственно $\varphi_{n,m}^1$ и $\psi_{n,m}^1$. Тогда решение задачи (1) – (4) при $t_1 < t < t_2$ примет вид

$$u(x,y,t) = e^{-\nu t} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\varphi_{n,m}^1 \cos\omega_{n,m} t + \frac{\nu\varphi_{n,m}^1 + \psi_{n,m}^1}{\omega_{n,m}} \sin\omega_{n,m} t \right) \sin\frac{\pi n}{l_1} x \sin\frac{\pi m}{l_2} y.$$

Продолжая рассуждение аналогичным образом, получаем решение задачи (1) – (4) для $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, в виде

$$u(x,y,t) = e^{-\nu t} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\varphi_{n,m}^k \cos\omega_{n,m} t + \frac{\nu\varphi_{n,m}^k + \psi_{n,m}^k}{\omega_{n,m}} \sin\omega_{n,m} t \right) \sin\frac{\pi n}{l_1} x \sin\frac{\pi m}{l_2} y \tag{5}$$

и уравнение для определения t_{k+1} момента импульса

$$e^{-2\nu t_{k+1}} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\left(\left(\frac{a\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{a\pi m}{l_2}\right)^2 \right) \left(\varphi_{n,m}^k \cos\omega_{n,m} t_{k+1} + \right.\right.$$

$$+ \left(\left(\left(\frac{a\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{a\pi m}{l_2}\right)^2 \right) \left(\varphi_{n,m}^k \cos\omega_{n,m} t_{k+1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\left((a\pi n/l_1)^2 + (a\pi m/l_2)^2\right)\varphi_{n,m}^k + \nu\psi_{n,m}^k}{\omega_{n,m}} \sin\omega_{n,m} t_{k+1} \right)^2 = \frac{8E_0}{l_1 l_2}, \tag{6}$$

где

$$\varphi_{n,m}^k = e^{-\nu t_k} \left(\varphi_{n,m}^{k-1} \cos\omega_{n,m} t_k + \frac{\nu\varphi_{n,m}^{k-1} + \psi_{n,m}^{k-1}}{\omega_{n,m}} \sin\omega_{n,m} t_k \right) + \alpha_{n,m},$$

$$\psi_{n,m}^k = e^{-\nu t_k} \left(\frac{\left((a\pi n/l_1)^2 + (a\pi m/l_2)^2\right)\varphi_{n,m}^{k-1} + \nu\psi_{n,m}^{k-1}}{\omega_{n,m}} \sin\omega_{n,m} t_k - \right.$$

$$\left. - \psi_{n,m}^{k-1} \cos\omega_{n,m} t_k \right) + \beta_{n,m}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Определение. *Периодическое решение задачи* (1) – (4) *назовем простым, если расстояние между его соседними моментами импульсов постоянно и равно периоду этого решения.*

Обозначим через T расстояние между соседними моментами импульсов простого периодического решения задачи (1) – (4).

Теорема. *Если функции* α, β *при заданном значении* E_0 *удовлетворяют приведенным в п.* 1 *требованиям, то задача* (1) – (4) *имеет простое периодическое решение.*

Доказательство. Из (5) следует, что решение задачи (1) – (4) с некоторыми функциями φ_0, ψ_0 и E_0 будет простым T-периодическим с импульсом при $t = 0$ тогда, когда одновременно справедливы равенства

$$\varphi^0_{n,m} = e^{-\nu T}\left(\varphi^0_{n,m}\cos\omega_{n,m}T + \frac{\nu\varphi^0_{n,m} + \psi^0_{n,m}}{\omega_{n,m}}\sin\omega_{n,m}T\right) + \alpha_{n,m},$$

$$\psi^0_{n,m} = e^{-\nu T}\left(\psi^0_{n,m}\cos\omega_{n,m}T - \right.$$

$$\left. - \frac{\left((a\pi n/l_1)^2 + (a\pi m/l_2)^2\right)\varphi^0_{n,m} + \nu\psi^0_{n,m}}{\omega_{n,m}}\sin\omega_{n,m}T\right) + \beta_{n,m}.$$

Подставив решения $\varphi^0_{n,m} = \varphi^*_{n,m}$, $\psi^0_{n,m} = \psi^*_{n,m}$ этой системы уравнений в (5) и (6), получим соответственно простое периодическое решение в виде

$$u^*(x,y,t) = e^{-\nu t}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left(\varphi^*_{n,m}\cos\omega_{n,m}t + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu\varphi^*_{n,m} + \psi^*_{n,m}}{\omega_{n,m}}\sin\omega_{n,m}t\right)\sin\frac{\pi n}{l_1}x\sin\frac{\pi m}{l_2}y,$$

где $0 \le x \le l_1$, $0 \le y \le l_2$, $0 < t \le T$,

$$\varphi^*_{n,m} = D^{-1}_{n,m}\left(\alpha_{n,m}\left(1 - e^{-\nu T}\right)\cos\omega_{n,m}T + \frac{\alpha_{n,m}\nu + \beta_{n,m}}{\omega_{n,m}}\sin\omega_{n,m}T\right),$$

$$\psi^*_{n,m} = D^{-1}_{n,m}\left(\beta_{n,m}\left(1 - e^{-\nu T}\right)\cos\omega_{n,m}T - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_{n,m}\left((a\pi n/l_1)^2 + (a\pi m/l_2)^2\right) + \nu\beta_{n,m}}{\omega_{n,m}}e^{-\nu T}\sin\omega_{n,m}T\right),$$

$$D_{n,m} = 1 - 2e^{-\nu T}\cos\omega_{n,m}T + e^{-2\nu T}$$

и уравнение для нахождения периода T:

$$e^{-2\nu T}\sum_{n,m=1}^{\infty}D^{-2}_{n,m}\left(\left(\alpha^2_{n,m}\lambda^2_{n,m} + \beta^2_{n,m}\right)\left(\cos^2\omega_{n,m}T - e^{-\nu T}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{\nu\left(\alpha^2_{n,m}\lambda^2_{n,m} - \beta^2_{n,m}\right)}{\omega}\left(\cos^2\omega_{n,m}T - e^{-\nu T}\right)\sin\omega_{n,m}T +$$

$$\left. + \frac{\lambda^2_{n,m}\left(\nu\alpha_{n,m} + \beta_{n,m}\right)^2 + \left(\alpha_{n,m}\lambda^2_{n,m} + \nu\beta_{n,m}\right)^2}{\omega^2_{n,m}}\sin^2\omega_{n,m}T\right) = \frac{8E_0}{l_1 l_2}, \qquad (7)$$

где $\lambda_{n,m} = (a\pi n/l_1)^2 + (a\pi m/l_2)^2$.

Существование решений уравнения (7) для $T \in (0, +\infty)$ эквивалентно существованию нулей функции

$$f(T) = \frac{8E_0}{l_1 l_2} e^{2\nu T} - \sum_{n,m=1}^{\infty} D_{n,m}^{-2} \left(\left(\alpha_{n,m}^2 \lambda_{n,m}^2 + \beta_{n,m}^2\right)\left(\cos^2 \omega_{n,m} T - e^{-\nu T}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{\nu\left(\alpha_{n,m}^2 \lambda_{n,m}^2 - \beta_{n,m}^2\right)}{\omega}\left(\cos^2 \omega_{n,m} T - e^{-\nu T}\right) \sin \omega_{n,m} T +$$

$$\left. + \frac{\lambda_{n,m}^2 \left(\nu \alpha_{n,m} + \beta_{n,m}\right)^2 + \left(\alpha_{n,m} \lambda_{n,m}^2 + \nu \beta_{n,m}\right)^2}{\omega_{n,m}^2} \sin^2 \omega_{n,m} T \right), \quad T \in (0, +\infty).$$

Имеют место пределы $\lim_{T \to +0} f(T) = -\infty$ и $\lim_{T \to +0} f(T) = 8E_0/l_1 l_2$. Отсюда следует, что функция f на промежутке $(0, +\infty)$ по теореме Больцано – Коши [5, с. 168] имеет по крайней мере один нуль. Таким образом, каждому значению E_0 соответствует простое T-периодическое решение задачи (1) – (4).

Теорема доказана.

1. *Samoilenko A.M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
2. *Элгондиев К. К., Хасанов М.* Колебания струны с импульсным воздействием // Крайові задачі для диференціальних задач: Зб. наук. пр. – 2002. – Вип. 10. – С. 96 – 102.
3. *Myshkis A. D.* Vibrations of the string with energy dissipation and impulsive feedback support // Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl. – 1996. – **26**, № 7 – P. 1271 – 1278.
4. *Мышкис А. Д.* Автоколебания струны с импульсной обратной связью // Дифференц. уравнения. – 1998. – **34**, № 12. – С. 1640 – 1644.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 608 с.

Получено 27.11.08