УДК 517.9

О. А. Бойчук* (Ін-т математики НАН України, Київ),
Л. М. Шегда (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ВИРОДЖЕНІ НЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

We obtain necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of weakly nonlinear degenerate boundary-value problems for systems of ordinary differential equations with a Noether operator in a linear part. We propose a continuous iterative procedure of the solution and establish the connection between the necessary condition and the sufficient condition.

Получены необходимое и достаточное условия существования решений слабонелинейных вырожденных краевых задач для систем дифференциальных уравнений с нетеровым оператором в линейной части. Предложена сходящаяся итерационная процедура нахождения решений и установлена связь между необходимым и достаточным условиями.

1. Постановка задачі та допоміжні результати. Систематичному вивченню умов існування розв'язків вироджених диференціальних систем і побудові чисельно-аналітичних методів відшукання розв'язків таких задач присвячено багато робіт (див., наприклад, [1 – 6]). На сьогодні найбільш розвиненою є теорія вироджених лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Для таких систем у достатній мірі розвинено загальну теорію і розроблено ефективні методи знаходження розв'язків. Що ж стосується теорії вироджених систем зі змінними коефіцієнтами, то вона є менш розвиненою, хоча за останній час з'явилася значна кількість праць, що свідчить про розвиток у цій галузі знань [7 – 9].

З використанням псевдообернених за Муром – Пенроузом матриць та за припущення, що породжуюча диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми, в даній статті отримано умови існування та алгоритм знаходження розв'язків слабконелінійних вироджених крайових задач, лінійна частина яких є нетеровим оператором [10, 11].

Отже, розглянемо крайові задачі для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з малим невід'ємним параметром ε вигляду

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + \varepsilon Z(x,t,\varepsilon), \quad t \in [a;b]\,, \tag{1}$$

$$lx = \alpha + \varepsilon J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{2}$$

де $A(t)$, $B(t)$ — $(n\times n)$-вимірні матриці, компоненти яких є дійсними достатню кількість разів неперервно диференційовними на $[a;b]$ функціями: $A(t),\ B\,(t) \in C^{3q-2}\,[a;b]\,;\ \det B\,(t) = 0\ \forall t \in [a;b]\,;$ $f\,(t)$ — n-вимірний вектор-стовпець з простору $C^{q-1}\,[a;b]$ (константу q буде визначено нижче); α — m-вимірний вектор-стовпець констант; $\alpha \in R^m$; l — лінійний векторний функціонал, визначений на просторі n-вимірних неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій: $l = \operatorname{col}\,(l_1,\ldots,l_m) : C\,[a;b] \to R^m$, $l_i \colon C\,[a;b] \to R$; $Z(x,t,\varepsilon)$ — нелінійна по x n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційовна по x в околі породжуючого розв'язку і неперервна по t, ε : $Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[\|x-x_0\| \leqslant \beta]$; $Z(x,\cdot,\varepsilon) \in C^{q-1}[a;b]$; $Z(x,t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$; $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ — нелінійний обмежений m-вимірний вектор-функціонал, неперервно диференційовний по x в розумінні Фреше [12] і неперервний по ε в околі породжуючого розв'язку.

Розглянемо критичний випадок, коли відповідна однорідна породжуюча крайова задача має нетривіальні розв'язки $x_0\,(t,\ c_r)$ [9]. Будемо шукати умову існування і алгоритм побудови розв'язку $x = x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a;b]$, $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$ крайової задачі (1), (2), що перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків $x_0(t,c_r) = x(t,0)$ породжуючої крайової задачі

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a;b]\,, \tag{3}$$

$$lx\,(\cdot) = \alpha \in R^m, \tag{4}$$

який у подальшому будемо називати породжуючим розв'язком крайової задачі (1), (2).

Будемо вважати, що система (3) невиродженим лінійним перетворенням зводиться до центральної канонічної форми [7, с. 53]. Згідно з теоремою 1 [9] породжуюча крайова задача (3), (4) має r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_0\,(t,\ c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)\,(t) + X_{n-s}(t)Q^{+}\alpha \quad \forall c_r \in R^r \tag{5}$$

тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t) \in C^{q-1}[a,\ b]$ в диференціальній системі та $\alpha \in R^m$ у крайовій умові задовольняють d лінійно незалежних умов

$$P_{Q_d^*}\left(\alpha - l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)f(\tau)d\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)f(\cdot)\right)\right) = 0, \quad d = m - n_1, \tag{6}$$

де $X_{n-s}(t)$ — фундаментальна матриця однорідної диференціальної системи (3) розміром $(n \times (n-s))$; $n-s$ — кількість лінійно незалежних розв'язків виродженої однорідної диференціальної системи; $Q := lX_{n-s}\,(\cdot)$ — $(m \times (n-s))$-вимірна матриця; $\operatorname{rank} Q = n_1 \le \min\,(m,\ n-s)$; $P_{Q^*} = I_m - QQ^{+}$ — $(m \times m)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^m на нуль-простір $N\,(Q^*)$, $P_{Q^*}\colon R^m \longrightarrow N\,(Q^*)$; $\operatorname{rank} P_{Q^*} = d$; $P_{Q_d^*}$ — $(d \times m)$-вимірна матриця, яка складається з d лінійно незалежних рядків матриці P_{Q^*}; $P_Q = I_{n-s} - Q^{+}Q$ — $((n-s) \times (n-s))$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^{n-s} на нуль-простір $N\,(Q)$, $P_Q\colon R^{n-s} \longrightarrow N\,(Q)$; $\operatorname{rank} P_Q = r$; P_{Q_r} — $((n-s) \times r)$-вимірна матриця, яка складається з r лінійно незалежних стовпців матриці P_Q; $X_r(t) = X_{n-s}(t)P_{Q_r}$ — матриця розміром $n \times r$; Q^{+} — єдина псевдообернена матриця до Q за Муром – Пенроузом [10, 11]; $(Gf)\,(t)$ — узагальнений оператор Гріна, який діє на довільну вектор-функцію $f(t) \in C^{q-1}\ [a;b]$ таким чином:

$$(Gf)\,(t) := -X_{n-s}(t)Q^{+}l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)f(\tau)d\tau - \right.$$

$$\left. -\ \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*(\cdot)L\Phi\,(\cdot)\right]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)f\,(\cdot)\right) +$$

$$+\int\limits_a^t X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau - \Phi(t)\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi(t)\Big]^{-1}\Psi^*(t)f(t).$$

Тут $Y_{n-s}(t)$ — фундаментальна матриця розміром $n\times(n-s)$, складена з $n-s$ лінійно незалежних розв'язків спряженої до однорідної диференціальної системи (3): $(L^*y)(t) := \dfrac{d}{dt}B^*(t)y + A^*(t)y = 0$, $t\in[a;b]$; фундаментальні матриці $X_{n-s}(t)$, $Y_{n-s}(t)$ задовольняють співвідношення $Y^*_{n-s}(t)B(t)X_{n-s}(t) = C$, де C — деяка неособлива квадратна матриця $(n-s)$-го порядку, елементи якої є сталими числами; $(Lx)(t) := A(t)x - B(t)\dfrac{dx}{dt}$ — оператор, що діє в унітарному просторі n-вимірних вектор-функцій класу $C^1[a;b]$; $\operatorname{rank}B(t) = n - r_1 = \mathrm{const}\ \forall t\in[a;b]$; матриця $B(t)$ має на відрізку $[a;b]$ повний жорданів набір векторів відносно оператора $L(t)$, який складається з r_1 ланцюжків завдовжки s_i, $i=\overline{1,r_1}$; $q=\max s_i$; $s = s_1+s_2+\ldots+s_{r_1}$; $I = \operatorname{diag}\{I_1,\ldots,I_{r_1}\}$, I_j — нільпотентні блоки Жордана порядку s_j, $j=\overline{1,r_1}$; $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ — $(n\times s)$-матриці, складені з векторів, які утворюють жорданові набори матриці $B(t)$ відносно оператора L і матриці $B^*(t)$ відносно оператора L^* [7]:

$$\Phi(t) = \left[\varphi_1^{(1)}(t),\ldots,\varphi_1^{(s_1)}(t);\varphi_2^{(1)}(t),\ldots,\varphi_2^{(s_2)}(t);\ldots;\varphi_{r_1}^{(1)}(t),\ldots,\varphi_{r_1}^{(s_{r_1})}(t)\right],$$

$$\Psi(t) = \left[\psi_1^{(s_1)}(t),\ldots,\psi_1^{(1)}(t);\psi_2^{(s_2)}(t),\ldots,\psi_2^{(1)}(t);\ldots;\psi_{r_1}^{(s_{r_1})}(t),\ldots,\psi_{r_1}^{(1)}(t)\right].$$

2. Основний результат. Спочатку знайдемо *необхідну умову* існування розв'язку $x(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), який при $\varepsilon=0$ перетворюється в породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r)$ (5). Справедливим буде наступне твердження.

Теорема 1 (необхідна умова). *Нехай крайова задача* (1), (2) *має розв'язок* $x = x(t,\varepsilon)\colon x(\cdot,\varepsilon)\in C^1[a,b]$, $x(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$, *який при* $\varepsilon=0$ *перетворюється в породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_r^0)$ (5) *з константою* $c_r = c_r^0$. *Тоді вектор* $c_r^0\in R^r$ *задовольняє рівняння*

$$P_{Q_d^*}\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) - l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0)d\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\left[\Psi^*(t)L\Phi(t)\right]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)Z(x_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0)\right)\right\} = 0. \qquad (7)$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 4.5 [10, с. 109] та теореми 5.4 [11, с. 119]. Позначимо ліву частину рівняння (7) через $F(c_r^0)$ і будемо називати (7) рівнянням для породжуючих констант крайової задачі (1), (2). У випадку періодичних задач константа c_r має фізичний зміст і є амплітудою породжуючого розв'язку, а в класичній періодичній задачі рівняння (7) називають рівнянням для породжуючих амплітуд [13].

Якщо рівняння (7) має розв'язок $c_r = c_r^0\in R^r$, то вектор c_r^0 визначає той породжуючий розв'язок $x_0(t,c_r^0)$, якому може відповідати розв'язок $x(t,\varepsilon)$ вихідної крайової задачі (1), (2), що перетворюється в $x_0(t,c_r^0)$ при $\varepsilon=0$. Якщо ж рівняння

(7) не має розв'язків, то і крайова задача (1), (2) не має шуканого розв'язку. Мова йде про дійсні розв'язки рівняння для породжуючих констант. Таким чином, необхідна умова існування розв'язків крайової задачі (1), (2) задовольняється вибором константи c_r в r-параметричній сім'ї породжуючих розв'язків (5) та полягає в тому, щоб рівняння (7) мало хоча б один дійсний розв'язок $c_r = c_r^0 \in R^r$.

Для отримання *достатньої умови* існування розв'язку виконаємо заміну змінних в крайовій задачі (1), (2)

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t, c_r^0) + y(t,\varepsilon),$$

в якій $x_0(t, c_r^0)$ — породжуючий розв'язок (5) і вектор констант $c_r^0 \in R^r$ задовольняє рівняння (7). Тому в нових змінних будемо шукати умови існування розв'язку $y = y(t,\varepsilon)\colon y(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b]$, $y(t,\cdot) \in C[0;\varepsilon_0]$, $y(t,0) = 0$, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в нульовий розв'язок крайової задачі

$$B(t)\dot{y} = A(t)y + \varepsilon Z\big(x_0(t, c_r^0) + y(t,\varepsilon), t, \varepsilon\big), \tag{8}$$

$$ly = \varepsilon J\big(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon), \varepsilon\big). \tag{9}$$

Використовуючи неперервну диференційовність вектор-функції $Z(x,t,\varepsilon)$ і векторного функціонала $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ по x в околі точки $\varepsilon = 0$, виділяємо у вектор-функції $Z(x_0 + y, t, \varepsilon)$ і у векторному функціоналі $J(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ лінійну частину по y і члени нульового порядку по ε. Тоді має місце розклад

$$Z(x_0 + y, t, \varepsilon) = Z\big(x_0(t, c_r^0), t, 0\big) + A_1(t)y + R(y(t,\varepsilon), t, \varepsilon), \tag{10}$$

$$J\big(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon), \varepsilon\big) = J(x_0(\cdot, c_r^0)) + l_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{11}$$

де

$$Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) \in C[t], \qquad J(x_0(\cdot, c_r^0)) = J(x_0(\cdot, c_r^0), 0),$$

$$A_1(t) = A_1(t, c_r^0) = \left.\frac{\partial Z(x,t,0)}{\partial x}\right|_{x = x_0(t, c_r^0)} \in C[t],$$

$l_1 y(\cdot,\varepsilon)$ — лінійна частина векторного функціонала $J(x_0(\cdot, c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$.

Згідно з [12] лінійний оператор $l_1 := J'(x_0)$ є похідною Фреше від векторного функціонала $J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ в точці $x = x_0(t, c_r^0)$. Нелінійна вектор-функція $R(y(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$ належить до класу $C^1[y]$, $C[t]$, $C[\varepsilon]$ в області $\|y\| \leqslant \beta$, $t \in [a,b]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$. При цьому

$$R(0,t,0) = 0, \qquad \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial y} = 0, \qquad R_1(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial R_1(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Отже, враховуючи заміну, будемо розглядати крайову задачу

$$B(t)\dot{y} = A(t)y + \varepsilon\Big\{Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) + A_1(t)y + R(y(t,\varepsilon), t, \varepsilon)\Big\}, \tag{12}$$

$$ly = \varepsilon\Big\{J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) + l_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big\}, \tag{13}$$

яка має розв'язок

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \overline{y}(t,\varepsilon), \quad c = c(\varepsilon) \in R^r,$$

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big(G\big[Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0) + A_1(\tau)y + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Big)(t) +$$

$$+\varepsilon X_{n-s}(t)Q^+\Big(J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\Big) =$$

$$= \varepsilon\Big(G\big[Z(x_0(\tau,c_r^0) + y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\big]\Big)(t) + \varepsilon X_{n-s}(t)Q^+ J(x_0(\cdot,c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$$

при виконанні умови

$$P_{Q_d^*}\Bigg\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) + l_1 y(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- l\left(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Big\{Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0) + A_1(\tau)y + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau -\right.$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\Big\{Z(x_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0) +$$

$$\left.\left. + A_1(\cdot)y + R(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\Big\}\right)\right\} = 0.$$

В лінійну частину останнього виразу замість y підставимо вираз $X_r(t)c + \overline{y}(t,\varepsilon)$ і, врахувавши, що виконується умова (7), отримаємо алгебраїчну відносно $c \in R^r$ систему

$$B_0 c = -P_{Q_d^*}\Bigg\{l_1\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- l\left(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Big\{A_1(\tau)\overline{y}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau -\right.$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\times$$

$$\left.\left.\times\ \Big\{A_1(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\Big\}\right)\right\}, \tag{14}$$

де $(d \times r)$-вимірна матриця B_0 має вигляд

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left(l_1 X_r(\cdot) - l\left(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau\ -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)A_1(\cdot)X_r(\cdot)\right)\right).$$

Отже, приходимо до операторної системи:

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \overline{y}(t,\varepsilon),$$

$$B_0 c = -P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\ l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Big\{A_1(\tau)\overline{y}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau\ -\right.$$

$$-\ \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\times \tag{15}$$

$$\left.\times\ \Big\{A_1(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\Big\}\right)\Bigg\},$$

$$\overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon\bigg(G\Big[Z(x_0(\tau,c_r^0) + y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon\Big]\bigg)(t) +$$

$$+\,\varepsilon X_{n-s}(t)Q^+ J(x_0(\cdot,c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Для розв'язності відносно $c \in R^r$ другого рівняння операторної системи (15) необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$-\,l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Big\{A_1(\tau)\overline{y}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau\ -\right.$$

$$-\,\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\times$$

$$\left.\times\Big\{A_1(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\Big\}\right)\Bigg\} = 0. \tag{16}$$

При умові $P_{B_0^*} = 0$, яка еквівалентна [14] умові

$$\operatorname{rank} B_0 = d, \tag{17}$$

умова (16), де $P_{B_0^*}$ — $(d\times d)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^d на нуль-простір $N\left(B_0^*\right)$, завжди виконується.

Розв'язавши відносно $c \in R^r$ друге рівняння, операторну систему (15) запишемо у вигляді

$$
\begin{aligned}
& y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + \overline{y}(t,\varepsilon), \\
& c = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - \\
& \quad - \; l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Big\{A_1(\tau)\overline{y}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau - \right. \\
& \quad - \; \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)\times \\
& \quad \times \; \left.\Big\{A_1(\cdot)\overline{y}(\cdot,\varepsilon) + R(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\Big\}\right)\Bigg\}, \\
& \overline{y}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(G\left[Z(x_0(\tau,c_r^0) + y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right]\right)(t) + \\
& \quad + \varepsilon X_{n-s}(t)Q^+ J(x_0(\cdot,c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Введемо нову змінну $u = \operatorname{col}\big(y(t,\varepsilon),\; c(\varepsilon),\; \overline{y}(t,\varepsilon)\big)$ та запишемо систему (18) у нових змінних

$$
u = L^{(1)}u + Fu, \tag{19}
$$

де

$$
L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & X_r(t) & I_n \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
L_1\varphi := -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{ & l_1\varphi(\cdot,\varepsilon) - l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)\,Y_{n-s}^*(\tau)A_1(\tau)\varphi(\tau)d\tau \; - \right. \\
& - \; \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)A_1(\cdot)\varphi(\cdot)\Bigg)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
Fu = \left(\begin{array}{c}
0 \\
-B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{ R_1(y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) - l\left(\displaystyle\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau - \right. \\
- \; \Phi(\cdot)\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)R(y(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\Bigg)\Bigg\} \\
\varepsilon\Big(G\Big[Z(x_0(\tau,c_r^0) + y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big]\Big)(t) + \\
+\varepsilon X_{n-s}(t)Q^+ J(x_0(\cdot,c_r^0) + y(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)
\end{array}\right).
$$

Систему (19) запишемо у вигляді

$$(I_\varrho - L^{(1)})u = Fu, \quad \varrho = 2n + r.$$

Блочно-діагональний матричний оператор $(I_\varrho - L^{(1)})$ завжди має обернений, тому систему (19) можемо записати у вигляді

$$u = Su, \qquad S := (I_\varrho - L^{(1)})^{-1}F.$$

За рахунок вибору ε та околу породжуючого розв'язку, враховуючи структуру оператора F, аналогічно [10, 15] можна показати, що оператор S є оператором стиску [16], який діє з простору $C^1\big([a;b];R^n\big) \times C\big([0;\varepsilon_0];R\big) \times C^1\big([a;b];R^n\big)$ в себе з відповідною нормою. Отже, операторне рівняння $u = Su$ буде мати єдиний розв'язок, який можна знайти як $u = \lim\limits_{\nu \longrightarrow \infty} u_\nu,\ u_0 = 0,\ u_\nu = Su_{\nu-1}$, де $u_0 = \operatorname{col}\big(y_0,\ c_0,\ \overline{y}_0\big) = 0$. Повертаючись до вихідної крайової задачі (1), (2), для знаходження розв'язку будемо мати ітераційний процес, описаний у наступному пункті.

3. Ітераційний процес. На першому кроці ітераційного процесу маємо крайову задачу

$$B(t)\dot{y}_1 = A(t)y_1 + \varepsilon Z(x_0(t, c_r^0), t, 0),$$
$$ly_1 = \varepsilon J(x_0(\cdot, c_r^0), 0),$$

яка розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$\varepsilon P_{Q_d^*}\left\{J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) - l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)Z(x_0(\tau, c_r^0), \tau, 0)d\tau\ - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\ \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\Psi^*(\cdot)Z(x_0(\cdot, c_r^0), \cdot, 0)\right)\right\} = 0.$$

Ця умова виконується, оскільки породжуючий розв'язок задовольняє умову (7) внаслідок вибору $c_r^0 \in R^r$. Перше наближення $y_1(t, \varepsilon)$ до шуканого розв'язку $y(t, \varepsilon)$ крайової задачі (12), (13) вважаємо рівним $\overline{y}_1(t, \varepsilon)$. Тоді

$$y_1(t, \varepsilon) = \overline{y}_1(t, \varepsilon) = \varepsilon\left(G\left[Z(x_0(\tau, c_r^0), \tau, 0)\right]\right)(t) + \varepsilon X_{n-s}\,(t)\,Q^+ J(x_0(\cdot, c_r^0), 0).$$

На другому кроці ітераційного процесу маємо крайову задачу

$$B(t)\dot{y}_2 = A(t)y_2\ +$$
$$+\ \varepsilon\Big\{Z(x_0(t, c_r^0), t, 0) + A_1(t)\left[X_r(t)c_1 + \overline{y}_1(t, \varepsilon)\right] + R(y_1(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\Big\},$$
$$ly_2 = \varepsilon\Big\{J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) + l_1\left[X_r(\cdot)c_1 + \overline{y}_1(\cdot, \varepsilon)\right] + R_1(y_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\Big\}.$$

З необхідної і достатньої умови розв'язності цієї крайової задачі отримаємо алгебраїчну відносно $c_1 \in R^r$ систему

$$B_0 c_1 + P_{Q_d^*}\Big\{l_1\overline{y}_1(\cdot, \varepsilon) + R_1(y_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)\ -$$

$$-l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\tau)\left\{A_1(\tau)\overline{y}_1(\tau,\varepsilon)+R(y_1(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right\}d\tau\,-\right.$$

$$-\,\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\,\Psi^*(\cdot)\times$$

$$\left.\left.\times\left\{A_1(\cdot)\overline{y}_1(\cdot,\varepsilon)+R(y_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right\}\right)\right\}=0,$$

яка розв'язна тоді і тільки тоді, коли

$$P_{B_0^*}P_{Q_d^*}\left\{l_1y_1(\cdot,\varepsilon)+R_1(y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\,-\right.$$

$$-\,l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\tau)\left\{A_1(\tau)y_1(\tau,\varepsilon)+R(y_1(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right\}d\tau\,-\right.$$

$$-\,\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\,\Psi^*(\cdot)\times$$

$$\left.\left.\times\left\{A_1(\cdot)y_1(\cdot,\varepsilon)+R(y_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right\}\right)\right\}=0.$$

Остання умова виконується, оскільки виконується умова (17). Знайдемо перше наближення c_1 до $c(\varepsilon)$:

$$c_1=-B_0^+P_{Q_d^*}\left\{l_1\overline{y}_1(\cdot,\varepsilon)+R_1(y_1(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\,-\right.$$

$$-\,l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\tau)\Big\{A_1(\tau)\overline{y}_1(\tau,\varepsilon)+R(y_1(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau\,-\right.$$

$$-\,\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\,\Psi^*(\cdot)\times$$

$$\left.\left.\times\left\{A_1(\cdot)\overline{y}_1(\cdot,\varepsilon)+R(y_1(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right\}\right)\right\}.$$

Отже, друге наближення $y_2(t,\varepsilon)$ до шуканого розв'язку $y(t,\varepsilon)$ має вигляд

$$y_2(t,\varepsilon)=X_r(t)c_1+\overline{y}_2(t,\varepsilon).$$

Продовжуючи ітераційний процес, з операторної системи (18) для знаходження розв'язку $y(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$, $y(t,0)=0$ крайової задачі (12), (13) отримаємо наступну ітераційну процедуру:

$$y_{p+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_p + \overline{y}_{p+1}(t,\varepsilon), \quad p = 0,1,2,\ldots,$$

$$y_0(t,\varepsilon) = \overline{y}_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$c_p = -B_0^+ P_{Q_d^*}\Bigg\{ l_1\overline{y}_p(\cdot,\varepsilon) + R_1(y_p(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) -$$

$$- l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y^*_{n-s}(\tau)\Big\{A_1(\tau)\overline{y}_p(\tau,\varepsilon) + R(y_p(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\Big\}d\tau - \right.$$

$$- \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\,\Psi^*(\cdot)\times$$

$$\left.\times\left\{A_1(\cdot)\overline{y}_p(\cdot,\varepsilon) + R(y_p(\cdot,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)\right\}\right)\Bigg\}, \tag{20}$$

$$\overline{y}_{p+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(G\left[Z(x_0(\tau,c_r^0) + y_p(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right]\right)(t) +$$

$$+ \varepsilon X_{n-s}(t)Q^+ J(x_0(\cdot,c_r^0) + y_p(\cdot,\varepsilon),\varepsilon).$$

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 2 (достатня умова). *Нехай породжуюча крайова задача* (3), (4) *при умові* (6) *має r-параметричну* ($r = n - s - n_1$) *сім'ю розв'язків* (5). *Тоді для кожного дійсного значення вектора* $c_r = c_r^0 \in R^r$, *який задовольняє рівняння* (7) *для породжуючих констант, при умові* (17) *крайова задача* (1), (2) *має хоча б один розв'язок* $x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, *який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_r^0)$ (5). *Цей розв'язок можна визначити за допомогою збіжного ітераційного процесу* (20) *і формули* $x_p(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y_p(t,\varepsilon)$, $p = 0,1,2,\ldots$.

Якщо $B(t) \equiv E$, то маємо невироджену слабконелінійну крайову задачу для систем звичайних диференціальних рівнянь, що досліджена в [10, 11].

4. Зв'язок між необхідною та достатньою умовами. Розглянемо випадок, коли кількість крайових умов m збігається з кількістю лінійно незалежних розв'язків виродженої однорідної диференціальної системи $(n-s)$, тобто $m = n-s$. Оскільки $d = m - n_1$, $r = n - s - n_1$, $m = n - s$, то $d = r$ і матриця B_0 є квадратною. Якщо $c_r = c_r^0$ є розв'язком рівняння $F(c_r) = 0$, то за аналогією з теоремою Безу для скалярного рівняння маємо розклад для векторного рівняння $F(c_r) = (c_r - c_r^0)F_1(c_r)$, в якому $\det F_1(c_r^0) \neq 0$, якщо c_r^0 — простий корінь рівняння (7).

Враховуючи, що

$$\left(\frac{\partial Z(x,\tau,\varepsilon)}{\partial c_r}\right)_{c_r=c_r^0} = \frac{\partial Z(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}\Bigg|_{x=x_0(\tau,c_r^0),\varepsilon=0} \frac{\partial x_0(\tau,c_r)}{\partial c_r}\Bigg|_{c_r=c_r^0} =$$

$$= A_1(\tau,c_r^0)\frac{\partial\Big(X_r(\tau)c_r + (Gf)(\tau) + X_{n-s}(\tau)Q^+\alpha\Big)}{\partial c_r}\Bigg|_{c_r=c_r^0} = A_1(\tau)X_r(\tau),$$

$$\frac{\partial J(x_0(\cdot,c_r),\varepsilon)}{\partial c_r}\bigg|_{c_r=c_r^0} = \frac{\partial J(x(\cdot,c_r),\varepsilon)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0(\cdot,c_r^0),\varepsilon=0} \frac{\partial x_0(\cdot,c_r)}{\partial c_r}\bigg|_{c_r=c_r^0} = l_1 X_r(\cdot),$$

маємо

$$\frac{\partial F(c_r)}{\partial c_r}\bigg|_{c_r=c_r^0} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial c_r}\left(P_{Q_d^*}\left\{J(x_0(\cdot,c_r^0),0) - l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)Z(x_0(\tau,c_r^0),\tau,0)d\tau\ -\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -\ \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\,\Psi^*(\cdot)Z(x_0(\cdot,c_r^0),\cdot,0)\right)\right\}\right) =$$

$$= P_{Q_d^*}\left(l_1X_r(\cdot) - l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau\ -\right.\right.$$

$$\left.\left. -\ \Phi(\cdot)\left[\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{I}^k\frac{d^k}{dt^k}\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}\right](\cdot)\,\Psi^*(\cdot)A_1(\cdot)X_r(\cdot)\right)\right) = B_0.$$

Отже, якщо $\det B_0 \neq 0$, то корінь $c_r = c_r^0$ рівняння (7) є простим.

У випадку, коли $m \neq n-s$, умова $\operatorname{rank} B_0 = d$ також є умовою простого кореня рівняння для породжуючих констант (7).

Таким чином, маємо наступне твердження.

Теорема 3. *Для того щоб крайова задача* (1), (2) *мала розв'язок, який при* $\varepsilon = 0$ *перетворюється в породжуючий розв'язок* $x_0(t,c_r^0)$ (5) *з константою* $c_r = c_r^0 \in R^r$, *необхідно, щоб константа* c_r^0 *була дійсним коренем рівняння для породжуючих констант* (7), *та достатньо, щоб цей розв'язок був простим коренем цього рівняння.*

5. Приклад. Проілюструємо доведені теореми на прикладі слабкозбуреної крайової задачі:

$$\begin{pmatrix}\sin 2t - 1 & \cos 2t\\ -\cos 2t & \sin 2t + 1\end{pmatrix}\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}x + \varepsilon A_1(t)x + f(t), \tag{21}$$

$$lx(\cdot) = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}x(0) + \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}x(2\pi) = \alpha + \varepsilon l_1 x(\cdot), \tag{22}$$

де

$$J(x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon) = l_1x(\cdot) = \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}x(0),$$

$$Z(x,t,\varepsilon) = A_1(t)x, \qquad A_1(t) = \big\{a_{ij}(t)\big\}_{i,j=1}^2.$$

Нехай породжуюча крайова задача, отримана при $\varepsilon = 0$,

$$\begin{pmatrix}\sin 2t - 1 & \cos 2t\\ -\cos 2t & \sin 2t + 1\end{pmatrix}\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}x + f(t), \tag{23}$$

$$lx(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(2\pi) = \alpha, \tag{24}$$

має розв'язок. Фундаментальна матриця, яка відповідає однорідній системі (23), має вигляд

$$X_r(t) = X_{n-s}(t) = X_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} e^{-t},$$

$$n = 2, \quad m = d = r = s = q = 1.$$

Матриця Q, ортопроектори P_Q, P_{Q^*} на ядро та коядро матриці Q і псевдообернена матриця Q^+ є такими:

$$Q = lX_1(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2\pi} = 0, \quad Q^+ = 0,$$

$$P_Q = I_{n-s} - Q^+Q = I_1 = 1, \qquad P_{Q^*} = I_m - QQ^+ = I_1 = 1,$$

$$P_{Q_r} = 1, \quad P_{Q_d^*} = 1.$$

Породжуюча крайова задача (23), (24) розв'язна, якщо виконується умова (6)

$$P_{Q_d^*} \left(\alpha - l \left(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^*(\tau) f(\tau) d\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \ \Phi(\cdot) \left[\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{I}^k \frac{d^k}{dt^k} \Big[\Psi^*(t) L \Phi\,(t) \Big]^{-1} \right] (\cdot)\, \Psi^*(\cdot) f(\cdot) \right) \right) = 0,$$

яка в даному випадку має вигляд

$$l\tilde{x}\,(\cdot) = 0,$$

де

$$\tilde{x}(t) = X_1(t) \int_0^t Y_1^*\,(\tau)\, f\,(\tau)\, d\tau - \Phi(t) \Big[\Psi^*(t) L(t) \Phi(t) \Big]^{-1} \Psi^*(t) f(t),$$

$Y_{n-s}(t) = Y_1(t) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^{-t}$ — фундаментальна матриця системи, спряженої до однорідної; $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$; $\Psi(t) = \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}$ [7, с. 72].

Знайдемо умову розв'язності крайової задачі (23), (24):

$$Y_1^*(t) f(t) = \frac{1}{2} e^t \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \end{pmatrix} f(t),$$

$$\int_0^t Y_1^*(\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin \tau & -\cos \tau \end{pmatrix} f(\tau) d\tau,$$

$$X_1(t) \int_0^t Y_1^*(\tau) f(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{-t} \begin{pmatrix} (\cos t - \sin t) \int\limits_0^t e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau) d\tau \\ -(\cos t + \sin t) \int\limits_0^t e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau) d\tau \end{pmatrix},$$

$$L(t)\Phi(t) = A(t)\Phi(t) - B(t)\Phi'(t) = 4 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \Psi^*(t)L(t)\Phi(t) = 4,$$

$$\Phi(t)[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)f(t) = \frac{1}{4}\Phi(t)\Psi^*(t)f(t) =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \sin 2t & -\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t - 1 \end{pmatrix} f(t).$$

Використовуючи обчислені вирази, бачимо, що при виконанні умови

$$\alpha + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \left[f(2\pi) + f(0) \right] = 0$$

породжуюча крайова задача (23), (24) має розв'язок

$$x_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + (Gf)(t) =$$

$$= e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} c_r - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \sin 2t & -\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t - 1 \end{pmatrix} f(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-t} \begin{pmatrix} (\cos t - \sin t) \int\limits_0^t e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau) d\tau \\ -(\cos t + \sin t) \int\limits_0^t e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau) d\tau \end{pmatrix} \quad \forall c_r \in R^r,$$

де

$$(Gf)(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \begin{pmatrix} (\cos t - \sin t) \int\limits_0^t e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau) d\tau \\ -(\cos t + \sin t) \int\limits_0^t e^{\tau} \begin{pmatrix} \sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix} f(\tau) d\tau \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + \sin 2t & -\cos 2t \\ \cos 2t & \sin 2t - 1 \end{pmatrix} f(t).$$

Знайдемо умови існування розв'язку $x(t, \varepsilon)$ вихідної крайової задачі (21), (22), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один із породжуючих розв'язків $x_0(t, c_r)$.

Рівняння для породжуючих констант (7), що дає *необхідну умову* існування розв'язку крайової задачі (21), (22), має вигляд

$$F(c_r^0) := J(x_0(\cdot, c_r^0), 0) - l\left(\int\limits_a^{\cdot} X_1(\cdot)Y_1^*(\tau)A_1(\tau)x_0(\tau, c_r^0)d\tau -\right.$$

$$\left. - \;\Phi(\cdot)\Big[\Psi^*(t)L\Phi\,(t)\Big]^{-1}(\cdot)\Psi^*(\cdot)A_1(\cdot)x_0(\cdot, c_r^0)\right) = 0.$$

Отже, в даному прикладі отримаємо лінійне скалярне рівняння для породжуючих констант відносно $c_r^0 \in R$:

$$\left[2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(0)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(2\pi)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]c_r^0 =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(0)\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}f(0) + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(2\pi)\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}f(2\pi) -$$

$$-\frac{1}{4}e^{-2\pi}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(2\pi)\begin{pmatrix}\int\limits_0^{2\pi} e^{\tau}\begin{pmatrix}\sin\tau & -\cos\tau\end{pmatrix}f(\tau)d\tau\\ -\int\limits_0^{2\pi} e^{\tau}\begin{pmatrix}\sin\tau & -\cos\tau\end{pmatrix}f(\tau)d\tau\end{pmatrix}, \qquad (25)$$

яке має простий корінь. Переконаємось у цьому, побудувавши матрицю B_0, тобто перевіримо *достатню умову* існування розв'язку:

$$B_0 := 2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(0)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(2\pi)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2\pi} \neq 0.$$

Таким чином, рівняння (25) має розв'язок

$$c_r^0 = \left[2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(0)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^{-2\pi}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(2\pi)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(0)\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}f(0) + \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(2\pi)\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}f(2\pi) -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}e^{-2\pi}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}A_1(2\pi)\begin{pmatrix}\int\limits_0^{2\pi} e^{\tau}\begin{pmatrix}\sin\tau & -\cos\tau\end{pmatrix}f(\tau)d\tau\\ -\int\limits_0^{2\pi} e^{\tau}\begin{pmatrix}\sin\tau & -\cos\tau\end{pmatrix}f(\tau)d\tau\end{pmatrix}\right]. \qquad (26)$$

Якщо $A_1(t) = 0$, то $B_0 = 2$ і $c_r^0 = 0$. Оскільки $B_0 = 2$ $(\operatorname{rank} B_0 = d = 1, P_{B_0^*} = 0)$, то за теоремою 2 крайова задача (21), (22) має в околі $\varepsilon = 0$ єдиний розв'язок $x(t, \cdot) \in C[\varepsilon]$, який перетворюється при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r^0)$ з константою $c_r^0 = 0$.

1. *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука (Сиб. отд-ние), 1980. – 216 с.
2. *Шлапак Ю. Д.* Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производных // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 1. – С. 137 – 140.
3. *Rheinboldt W. C.* Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds // Math. Comput. – 1984. –**43**, № 168. – P. 473 – 482.
4. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.
5. *Campbell S. L., Petzold L. R.* Canonical forms and solvable singular systems of differential equations // SIAM J. Algebr. Discrete Methods. – 1983. – № 4. – P. 517 – 521.
6. *Руткас А. Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. – 1975. – № 11. – С. 1486 – 1497.
7. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.
8. *Favini A., Vlasenko L.* On solvability of degenerate nonstationary differential-difference equations in Banach spaces // Different. and Integr. Equat. – 2001. – **14**, № 7.– P. 883 – 896.
9. *Бойчук О. А., Шегда Л. М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 303 – 312.
10. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
11. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
12. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа: Уч. пособие. – М.: Высш. шк., 1982. – 271 с.
13. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 572 с.
15. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
16. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1968. – 455 с.

Одержано 20.01.09