УДК 517.5

С. П. Войтенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ M-ЧЛЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain exact-order estimates for the best M-term trigonometric approximations of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q.

Получены точные по порядку оценки наилучших M-членных тригонометрических приближений классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q.

1. Постановка задачі та основні результати. В даній роботі досліджуються найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q, $1 \le p,\ q, \theta \le \infty$.

Відповідні апроксимативні характеристики цих класів будуть означені нижче, а спочатку наведемо необхідні позначення та означення.

Нехай $L_p(\mathbb{T}^d)$ — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p, $1 \le p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), на кубі $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi)$ функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$, в якому норма визначається таким чином:

$$\| f \|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} | f(x) |^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\| f \|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} | f(x) |.$$

Далі, нехай $l \in \mathbb{N}$ і $h \in \mathbb{R}^d$. Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

і означимо кратну різницю порядку l функції $f(x)$ у точці $x = (x_1, \ldots, x_d)$ з кроком $h = (h_1, \ldots, h_d)$ за формулою

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_h \Delta_h^{l-1} f(x) \qquad \left(\Delta_h^0 f(x) = f(x)\right).$$

Кратну різницю $\Delta_h^l f(x)$ можна також записати у вигляді

$$\Delta_h^l f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l+n} C_l^n f(x + nh).$$

Означимо модуль неперервності порядку l функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, який позначимо через $\Omega_l(f, t)_p$, згідно з формулою

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{|h| \le t} \left\| \Delta_h^l f(x) \right\|_p ,$$

де $|h| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_d^2}$.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, яка задана на $\mathbb{R}_+ = \{t: t \ge 0\}$ та задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(0) = 0$, $\Omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна;

3) $\Omega(t)$ зростає;

4) для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ $\Omega(nt) \le Cn^l \Omega(t)$, де $l \ge 1$ — фіксоване натуральне число, стала $C > 0$ не залежить від n і t.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція $\Omega(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\Omega(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 .$$

Функція $\Omega(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\Omega(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 .$$

У роботі [2], як і в [3, 4], наведено означення аналогів класів Бєсова таким чином.

Нехай $1 \le p$, $\theta \le \infty$. Будемо вважати, що $f \in B^\Omega_{p,\theta}$, якщо f задовольняє наступні умови:

1) $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$;

2) $\| f \|_{b^\Omega_{p,\theta}} < \infty$, де

$$\| f \|_{b^\Omega_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \dfrac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t > 0} \dfrac{\Omega_l(f, t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Простір $B^\Omega_{p,\theta}$ — лінійний нормований простір з нормою

$$\| f \|_{B^\Omega_{p,\theta}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \| f \|_p + \| f \|_{b^\Omega_{p,\theta}} .$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то простір $B^\Omega_{p,\theta}$ збігається з простором О. В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [5] і, зокрема, при $\theta = \infty$ та $\Omega(t) = t^r$ $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, де H^r_p — простори, введені С. М. Нікольським [6]. Далі будемо вважати, що $B^\Omega_{p,\theta}$ — класи функцій $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для яких $\| f \|_{B^\Omega_{p,\theta}} \le 1$.

Перейдемо безпосередньо до означення апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, що будуть досліджуватись у даній роботі.

Для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ позначимо через $e_M(f)_q$ найкраще M-членне тригонометричне наближення функції f у просторі L_q, яке визначається таким чином:

$$e_M(f)_q = \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} \inf_{\{c_j\}_{j=1}^M} \left\| f(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j,x)} \right\|_q,$$

де $\{k^j\}_{j=1}^M$ — набір векторів $k^j = \left(k_1^j, \ldots, k_d^j\right)$ з цілочисловими координатами, c_j — довільні числа, $(k^j, x) = k_1^j x_1 + \ldots + k_d^j x_d$.

Якщо F — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} e_M(f)_q. \tag{1}$$

Величина $e_M(f)_2$ для функції однієї змінної була введена С. Б. Стєчкіним [7] при формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Згодом величини $e_M(f)_q$ і $e_M(F)_q$, $1 \le q \le \infty$, почали досліджуватись вже з точки зору апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій відповідно. Перші оцінки величини $e_M(f)_\infty$ для деяких конкретних функцій були отримані Р. С. Ісмагіловим [8]. Систематичне вивчення величин (1) на класах періодичних функцій багатьох змінних С. Л. Соболєва $W^r_{p,\alpha}$ та С. М. Нікольського H^r_p було розпочато В. Н. Темляковим [9]. Згодом дослідження величин $e_M(F)_q$ на класах функцій $W^r_{p,\alpha}$ та H^r_p були продовжені Е. С. Бєлінським [10 – 12].

Відмітимо також, що для тих чи інших функціональних класів дослідження поведінки величин (1) проводились, зокрема, в роботах [13 – 19], в яких можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

Мета даної роботи — продовжити дослідження у вказаному напрямку та отримати точні за порядком оцінки величин найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, що узагальнюють результати, які були одержані в роботі [16].

Отримані результати будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. Для функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо, що всі сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Для величин, означених рівністю (1), має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай* $1 \le p,\ q,\ \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \alpha(p, q)$, *а також умову* (S_l), *де*

$$\alpha(p,q) = \begin{cases} d(1/p - 1/q)_+, & 1 \le p \le q \le 2 \quad \text{або} \quad 1 \le q \le p \le \infty, \\ \max\{d/p;\ d/2\} & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді для будь-яких $M \in \mathbb{N}$ *має місце оцінка*

$$e_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)_q \asymp \Omega\left(M^{-1/d}\right) M^{\left(1/p - \max\{1/q,\,1/2\}\right)_+}, \tag{2}$$

де $a_+ = \max\{a;\, 0\}$.

Як наслідок, поклавши в теоремі $\theta = \infty$ і взявши до уваги, що $B^{\Omega}_{p,\infty} = H^{\Omega}_p$, можемо записати співвідношення

$$e_M\left(H^{\Omega}_p\right)_q \asymp \Omega\left(M^{-1/d}\right) M^{\left(1/p - \max\{1/q,\,1/2\}\right)_+}.$$

***Зауваження* 1.** Якщо $\Omega(t) = t^r$, $r > \alpha(p, q)$, то виконується співвідношення

$$e_M\left(B^{r}_{p,\theta}\right)_q \asymp M^{-r/d + \left(1/p - \max\{1/q,\,1/2\}\right)_+}. \tag{3}$$

Оцінку (3) встановлено в роботі [16].

***Зауваження* 2.** В одновимірному випадку класи, що розглядаються в даній роботі, збігаються з іншими аналогами класів Бєсова $B^{\Omega}_{p,\theta}$, де $\Omega(t)$ — функція типу мішаного модуля неперервності і $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$. Тому, покладаючи в (2) $d = 1$, отримуємо точні за порядком оцінки величин $e_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)_q$, які при певних співвідношеннях між параметрами p та q були отримані в роботах [17 – 19]. Крім цього в (2) містяться і нові результати в одновимірному випадку для співвідношень $p = \infty$, $1 \le q < \infty$ та $1 \le p \le \infty$, $q = 1$.

2. Допоміжні твердження. Спочатку введемо деякі позначення. Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m}\left(\frac{2m-k}{m}\right)\cos kt.$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, означимо згідно з формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j).$$

Нехай V_m — оператор, який задає згортку функцій $f(x)$ із багатовимірним ядром $V_m(x)$, тобто

$$V_m f = f * V_m = V_m(f, x).$$

Таким чином, $V_m(f, x)$ — кратна сума Валле Пуссена функції $f(x)$. Покладемо для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$

$$\Phi_0(f, x) = V_1(f, x), \qquad \Phi_s(f, x) = V_{2^s}(f, x) - V_{2^{s-1}}(f, x), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Наведемо декілька відомих тверджень, які будуть використовуватися в роботі.

Лема 1 [20]. *Нехай* $1 \le p$, $\theta \le \infty$ *і* $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$. *Тоді функцію* f *можна подати у вигляді ряду*

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s(f, x),$$

збіжного до цієї функції у просторі $L_p(\mathbb{T}^d)$, *та*

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s=0}^{\infty}\left(\dfrac{\|\Phi_s(f, x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s} \dfrac{\|\Phi_s(f, x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases}$$

Лема 2 [20]**.** *Нехай* $1 \le p < q \le \infty$ *і* $\Omega(t)/t^{\alpha}$ *при* $\alpha > d(1/p - 1/q)$ *майже зростає. Тоді* $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega_1}_{q,\theta}$, *де* $\Omega_1(t) = \Omega(t)/t^{d(1/p-1/q)}$ *і*

$$\|f\|_{B^{\Omega_1}_{q,\theta}} \ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}.$$

Позначимо через $\mathcal{T}_n$ множину тригонометричних поліномів $t(x)$ вигляду

$$t(x) = \sum_{\substack{|k_j| \le n_j \\ j=\overline{1,d}}} c_k e^{i(k,x)}.$$

Нехай B^n_{∞} — множина всіх тригонометричних поліномів $t \in \mathcal{T}_n$ таких, що $\|t\|_{\infty} \le 1$. Тоді має місце така лема.

Лема 3 [16]**.** *Для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *та* $M \le n^d/2$ *при* $1 \le q \le \infty$ *виконується співвідношення*

$$e_M\left(B^n_{\infty}\right)_q \ge C(d),$$

де стала $C(d) > 0$ *залежить лише від* d.

Теорема А [6]**.** *Нехай* $n = (n_1, \ldots, n_d)$, $n_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, *та*

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тоді при $1 \le q < p \le \infty$ *має місце нерівність*

$$\|t\|_p \le 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} n_j\right)^{1/q-1/p} \|t\|_q. \tag{4}$$

Нерівність (4) встановлена С. М. Нікольським і отримала назву „нерівність різних метрик”. У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [21].

3. Доведення теореми. Зважаючи на те, що права частина (2) від θ не залежить, а із збільшенням параметра θ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ розширюються, тобто при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$ мають місце вкладення

$$B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta'} \subset B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_p,$$

необхідну оцінку зверху достатньо встановити для $e_M\left(B^{\Omega}_{p,\infty}\right)_q$, а знизу — для $e_M\left(B^{\Omega}_{p,1}\right)_q$.

Спочатку встановимо в (2) оцінку зверху. За заданим M підберемо $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{(n-1)d} \leq M \leq 2^{nd}$, тобто $2^{nd} \asymp M$. Розглянемо послідовно декілька співвідношень між параметрами p і q. Нехай спочатку $q = \infty$, $p = 2$.

Для $s \in \mathbb{N}$ покладемо

$$M_s = \begin{cases} 2^{sd}, & 0 \leq s \leq n, \\ \left[\Omega^{-1}(2^{-n})\, 2^{nd/2} \Omega(2^{-s})\, 2^{sd/2}\right], & s > n, \end{cases} \tag{5}$$

де $[\,a\,]$ — ціла частина числа a.

Тоді

$$\sum_{s=0}^{\infty} M_s \leq \sum_{s=0}^{n} 2^{sd} + \sum_{s=n+1}^{\infty} \Omega^{-1}(2^{-n})\, 2^{nd/2}\, \Omega(2^{-s})\, 2^{sd/2} \ll$$

$$\ll 2^{nd} + \Omega^{-1}(2^{-n})\, 2^{nd/2} \sum_{s=n+1}^{\infty} \Omega(2^{-s})\, 2^{sd/2} =$$

$$= 2^{nd} + \Omega^{-1}(2^{-n})\, 2^{nd/2} \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}}\, 2^{-s(\alpha - d/2)} = I_1 .$$

Оскільки $\Omega(t)$ задовольняє умову (S) з $\alpha > \dfrac{d}{2}$, то має місце співвідношення

$$\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \leq \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}, \quad s = n+1, \ldots .$$

Тому

$$I_1 \ll 2^{nd} + \Omega^{-1}(2^{-n})\, 2^{nd/2}\, \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-s(\alpha - d/2)} \ll$$

$$\ll 2^{nd} + 2^{nd/2}\, 2^{\alpha n}\, 2^{-n(\alpha - d/2)} \ll 2^{nd} \asymp M$$

і відповідно $\sum_{s=0}^{\infty} M_s \ll M$.

Для проведення наступних міркувань скористаємось оцінкою з [16] (наслідок 5.1), яка відповідно до наших позначень має вигляд

$$e_{M_s}\left(\Phi_s(f, x)\right)_\infty \ll \left(\frac{2^{sd}}{M_s}\right)^{1/2} \log \frac{2^{sd}}{M_s} \left\| \Phi_s(f, x) \right\|_2 . \tag{6}$$

Таким чином, внаслідок вибору чисел M_s і оцінки (6) можемо записати

$$e_M(f)_\infty \;\le\; \sum_{s>n} e_{M_s}\left(\Phi_s(f,\,x)\right)_\infty \;\ll\; \sum_{s>n}\left(\frac{2^{sd}}{M_s}\right)^{1/2}\log\frac{2^{sd}}{M_s}\left\|\Phi_s(f,\,x)\right\|_2. \qquad (7)$$

Далі, оскільки для $f \in B^{\Omega}_{2,\infty}$ виконується співвідношення $\left\|\Phi_s(f,\,x)\right\|_2 \ll \ll \Omega(2^{-s})$, то з (7) з урахуванням (5) будемо мати

$$e_M(f)_\infty \;\ll\; \sum_{s>n}\left(2^{sd}\,\Omega(2^{-n})\,2^{-nd/2}\,\Omega^{-1}(2^{-s})\,2^{-sd/2}\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\log 2^{sd} - \log\left(\Omega^{-1}(2^{-n})\,2^{nd/2}\,\Omega(2^{-s})\,2^{sd/2}\right)\right)\Omega(2^{-s}) \;=$$

$$=\; \Omega^{1/2}(2^{-n})\,2^{-nd/4}\sum_{s>n}\left(\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}}\,2^{-s(\alpha-d/2)}\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\log 2^{sd} - \log\left(\Omega^{-1}(2^{-n})\,2^{nd/2}\,\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\beta s}}\,2^{-s(\beta-d/2)}\right)\right) \;=\; I_2, \qquad \beta > \frac{d}{2}. \qquad (8)$$

Беручи до уваги те, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) з деяким $\alpha > d/2$ та (S_l), продовжуємо оцінку I_2:

$$I_2 \;\ll\; \Omega^{1/2}(2^{-n})\,2^{-\frac{nd}{4}}\left(\frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\right)^{1/2}\sum_{s>n}\left(2^{-s(\alpha-d/2)}\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\log 2^{sd} - \log\left(\Omega^{-1}(2^{-n})\,2^{nd/2}\,\frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\beta n}}\,2^{-s(\beta-d/2)}\right)\right) \;\ll$$

$$\ll\; \Omega(2^{-n})\,2^{-nd/4}\,2^{\alpha n/2}\sum_{s>n}2^{-(s/2)(\alpha-d/2)}\left(sd - \left(\frac{nd}{2} + \beta n - s\beta + \frac{sd}{2}\right)\right) \;\ll$$

$$\ll\; \Omega(2^{-n})\,2^{-nd/4}\,2^{\alpha n/2}\sum_{s>n}2^{-(s/2)(\alpha-d/2)}(s-n) \;\ll$$

$$\ll\; \Omega(2^{-n})\,2^{-nd/4}\,2^{\alpha n/2}\,2^{-(n/2)(\alpha-d/2)} \;=\; \Omega(2^{-n}) \;\asymp\; \Omega\left(M^{-1/d}\right). \qquad (9)$$

У випадку $1 \le p = q \le \infty$ для $f \in B^{\Omega}_{q,\infty}$ покладемо $T_n(f,\,x) = f * V_{2^n}$. Застосовуючи лему 1, одержуємо

$$\left\|f - T_n(f,\,x)\right\|_q \;=\; \left\|\sum_{s=n+1}^{\infty}\Phi_s(f,\,x)\right\|_q \;\le\; \sum_{s=n+1}^{\infty}\left\|\Phi_s(f,\,x)\right\|_q \;\ll$$

$$\ll\; \sum_{s=n+1}^{\infty}\Omega(2^{-s}) \;\ll\; \Omega(2^{-n}) \;\asymp\; \Omega\left(M^{-1/d}\right). \qquad (10)$$

Таким чином, з (9) та (10) відповідно випливають оцінки

$$e_M\left(B^{\Omega}_{2,\infty}\right)_\infty \;\ll\; \Omega\left(M^{-1/d}\right), \qquad \alpha > d/2, \qquad (11)$$

та

$$e_M\left(B^{\Omega}_{q,\infty}\right)_q \ll \Omega\left(M^{-1/d}\right), \quad \alpha > 0, \quad 1 \le q \le \infty. \tag{12}$$

Для доведення оцінок зверху в інших ситуаціях скористаємось оцінками (11), (12) і відповідними вкладеннями класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Нехай спочатку має місце випадок $1 \le q < p \le \infty$. Оскільки $B^{\Omega}_{p,\infty} \subset B^{\Omega}_{q,\infty}$, то оцінка зверху в цьому випадку є наслідком оцінки (12):

$$e_M\left(B^{\Omega}_{p,\infty}\right)_q \le e_M\left(B^{\Omega}_{q,\infty}\right)_q \ll \Omega\left(M^{-1/d}\right). \tag{13}$$

Нехай тепер $2 \le p < q \le \infty$. Оскільки $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_\infty$ і $B^{\Omega}_{p,\infty} \subset B^{\Omega}_{2,\infty}$, то, враховуючи (11), можемо записати

$$e_M\left(B^{\Omega}_{p,\infty}\right)_q \le e_M\left(B^{\Omega}_{p,\infty}\right)_\infty \le e_M\left(B^{\Omega}_{2,\infty}\right)_\infty \ll \Omega\left(M^{-1/d}\right). \tag{14}$$

У випадку $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$ згідно з лемою 2 $B^{\Omega}_{p,\infty} \subset B^{\Omega_1}_{2,\infty}$, де $\Omega_1(t) = \Omega(t)/t^{d(1/p-1/2)}$, а тому, скориставшись оцінкою (11), матимемо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{p,\infty}\right)_q \ll e_M\left(B^{\Omega_1}_{2,\infty}\right)_q \le e_M\left(B^{\Omega_1}_{2,\infty}\right)_\infty \ll$$

$$\ll \Omega_1\left(M^{-1/d}\right) = \Omega_1\left(M^{-1/d}\right) M^{1/p-1/2}, \tag{15}$$

при цьому $\alpha + d(1/2 - 1/p) > d/2$, тобто $\alpha > d/p$.

Насамкінець розглянемо випадок $1 \le p < q \le 2$. Знову на підставі леми 2 маємо $B^{\Omega}_{p,\infty} \subset B^{\Omega_2}_{q,\infty}$, де $\Omega_2(t) = \Omega(t)/t^{d(1/p-1/q)}$. Враховуючи (12), отримуємо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{p,\infty}\right)_q \ll e_M\left(B^{\Omega_2}_{q,\infty}\right)_q \ll \Omega_2\left(M^{-1/d}\right) = \Omega\left(M^{-1/d}\right) M^{1/p-1/q}, \tag{16}$$

при цьому $\alpha - d(1/p - 1/q) > 0$, тобто $\alpha > d(1/p - 1/q)$.

Таким чином, нами розглянуто всі можливі співвідношення між параметрами p та q, тому об'єднання (12) – (16) доводить оцінку зверху в (2).

Для доведення в (2) оцінки знизу спочатку розглянемо випадок $q = 1$ та $p = \infty$. Покажемо, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ згідно з означенням класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ має місце вкладення

$$C_3\, \Omega(2^{-n})\, B^{2n}_\infty \subset B^{\Omega}_{\infty,1},$$

де $C_3 > 0$ — деяка стала.

Розглянемо багатовимірне ядро Валле Пуссена V_n, для якого, як відомо, виконується нерівність $\|V_n\|_1 \le C_4(d)$ (див., наприклад, [22, с. 119]).

Скориставшись цією нерівністю і взявши до уваги, що $\Omega(t)$ задовольняє умову (S), для довільного тригонометричного полінома $T \in B^{2n}_\infty$ будемо мати

$$\left\|\Omega(2^{-n})T\right\|_{B^{\Omega}_{\infty,1}} \asymp \Omega(2^{-n}) \sum_{s=0}^{n} \Omega^{-1}(2^{-s}) \left\|\Phi_s(T,\cdot)\right\|_\infty =$$

$$= \Omega(2^{-n}) \sum_{s=0}^{n} \Omega^{-1}(2^{-s}) \left\|V_{2^s}(T,\cdot) - V_{2^{s-1}}(T,\cdot)\right\|_\infty =$$

$$= \Omega(2^{-n}) \sum_{s=0}^{n} \Omega^{-1}(2^{-s}) \left\| T * (V_{2^s} - V_{2^{s-1}}) \right\|_\infty \le$$

$$\le \Omega(2^{-n}) \sum_{s=0}^{n} \Omega^{-1}(2^{-s}) \| T \|_\infty \left\| V_{2^s} - V_{2^{s-1}} \right\|_1 \le$$

$$\le \Omega(2^{-n}) \sum_{s=0}^{n} \Omega^{-1}(2^{-s}) \| T \|_\infty \left(\| V_{2^s} \|_1 + \| V_{2^{s-1}} \|_1 \right) \ll \Omega(2^{-n}) \sum_{s=0}^{n} \Omega^{-1}(2^{-s}) =$$

$$= \Omega(2^{-n}) \sum_{s=0}^{n} \frac{\Omega^{-1}(2^{-s})}{2^{\alpha s}} 2^{\alpha s} \ll \Omega(2^{-n}) \Omega^{-1}(2^{-n}) 2^{-\alpha n} 2^{\alpha n} = 1 .$$

Далі, на підставі леми 3 для $M = 2^{nd-1}$ одержуємо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}\right)_1 \ge e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,1}\right)_1 \gg \Omega(2^{-n})\, e_M\left(B^{2n}_{\infty}\right)_1 \gg \Omega(2^{-n}) \asymp \Omega\left(M^{-1/d}\right). \tag{17}$$

Звідси робимо висновок, що внаслідок монотонності величини e_M це співвідношення виконується для всіх $M \in \mathbb{N}$.

Для $1 \le p, \theta \le \infty$ згідно з лемою 1

$$B^{\Omega}_{\infty,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta},$$

і тому, використовуючи (17), для довільних $1 \le q \le \infty$ будемо мати

$$e_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)_q \ge e_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}\right)_1 \ge e_M\left(B^{\Omega}_{\infty,\theta}\right)_1 \gg \Omega\left(M^{-1/d}\right). \tag{18}$$

Це співвідношення доводить нижню оцінку в (2) у випадках $1 \le q \le p \le \infty$ та $2 \le p \le q \le \infty$.

Перейдемо до знаходження оцінки знизу для випадків $1 \le p \le q \le 2$ та $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$.

Розглянемо функцію

$$f(x) = C_5\, \Omega(n^{-1})\, n^{d(1/p-1)}\, V_n(x),$$

де числа n і M пов'язані співвідношенням $M \le n^d/2$, а $C_5 > 0$ — деяка стала.

Покажемо, що при певному виборі сталої C_5 ця функція належить класу $B^{\Omega}_{p,1}$. З цією метою знову розглянемо функцію $V_n(x)$.

Використовуючи нерівність різних метрик (4), маємо

$$\| V_n \|_p \ll n^{d(1-1/p)} \| V_n \|_1 \ll n^{d(1-1/p)}. \tag{19}$$

Згідно з означенням норми класів Бєсова та співвідношеннями (19) можемо записати

$$\| V_n \|_{B^{\Omega}_{p,1}} \asymp \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \Omega^{-1}(2^{-s}) \| \Phi_s(V_n, \cdot) \|_p =$$

$$= \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \Omega^{-1}(2^{-s}) \left\| V_n * (V_{2^s} - V_{2^{s-1}}) \right\|_p \le$$

$$\leq \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \Omega^{-1}(2^{-s}) \left\| V_{2^s} - V_{2^{s-1}} \right\|_1 \| V_n \|_p \leq$$

$$\leq \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \Omega^{-1}(2^{-s}) \left(\left\| V_{2^s} \right\|_1 + \left\| V_{2^{s-1}} \right\|_1 \right) \| V_n \|_p \ll$$

$$\ll n^{d(1-1/p)} \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \Omega^{-1}(2^{-s}) = n^{d(1-1/p)} \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \frac{\Omega^{-1}(2^{-s})}{2^{\alpha s}} 2^{\alpha s} \ll$$

$$\ll n^{d(1-1/p)} \Omega^{-1}\left(n^{-1}\right) n^{-\alpha} n^{\alpha} = n^{d(1-1/p)} \Omega^{-1}\left(n^{-1}\right).$$

Звідси робимо висновок, що функція $f(x) = C_5 \Omega\left(n^{-1}\right) n^{d(1/p-1)} V_n(x)$ належить класу $B^{\Omega}_{p,1}$.

В роботі [16, с. 47] показано, що при $1 \leq q \leq \infty$ має місце оцінка

$$e_M(V_n)_q \gg n^{d(1-1/q)}, \quad M \leq n^d/2. \tag{20}$$

Тому з (20) одержуємо

$$e_M\left(B^{\Omega}_{p,1}\right)_q \geq \Omega\left(n^{-1}\right) n^{d(1/p-1)} e_M(V_n)_q \gg \Omega\left(n^{-1}\right) n^{d(1/p-1/q)}, \quad M \leq n^d/2.$$

Взявши $M = \left[n^d/2\right]$, отримаємо оцінку знизу в (2) у випадку $1 \leq p \leq q \leq 2$. З огляду на монотонність e_M це співвідношення в даному випадку виконується для всіх M, тому

$$e_M\left(B^{\Omega}_{p,1}\right)_q \gg \Omega\left(M^{-1/d}\right) M^{1/p-1/q}. \tag{21}$$

Нарешті, останній випадок $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ випливає з (21) при $q = 2$, оскільки $\|\cdot\|_q \geq \|\cdot\|_2$. Таким чином,

$$e_M\left(B^{\Omega}_{p,1}\right)_q \geq e_M\left(B^{\Omega}_{p,1}\right)_2 \gg \Omega\left(M^{-1/d}\right) M^{1/p-1/2}.$$

Теорему доведено.

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
2. *Li Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. – 2002. –**18**, № 4. – P. 815 – 832.
3. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**. – P. 35 – 48.
4. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
5. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
6. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
7. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.

8. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
9. *Темляков В. Н.* О приближении периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. – 1984. – **279**, № 2. – С. 301 –305.
10. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных „плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники // Там же. – 1985. – **284**, № 6. – С. 1294 – 1297.
11. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических гладких функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1987. – **180**. – С. 46 – 47.
12. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.
13. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
14. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Мат. заметки. – 2007. – **82**, № 2. – С. 247 – 261.
15. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.* О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Там же. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
16. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums // J. Fourier Anal. Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29 – 48.
17. *Стасюк С. А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів функцій багатьох змінних $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 381 – 394.
18. *Стасюк С. А.* Найкращі тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 265 – 275.
19. *Конограй А. Ф., Стасюк С. А.* Найкращі M-членні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 9. – С. 1206 – 1224.
20. *Xu Guiqiao.* The n-widths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. – 2005. – **25B**, № 4. – P. 663 – 671.
21. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**. – P. 889 – 906.
22. *Дзядык Б. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

Одержано 25.03.09