УДК 519.21

Ю. Н. Карташов (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
А. М. Кулик (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Additive functionals defined on a sequence of Markov chains that approximate a Markov process are considered. For these functionals, a result is obtained that establishes the convergence of functionals under local conditions of convergence of their characteristics (mathematical expectations).

Для адитивних функціоналів, заданих на послідовності ланцюгів Маркова, які апроксимують процес Маркова, отримано результат, що встановлює збіжність функціоналів за умов локальної збіжності їх характеристик (математичних сподівань).

1. Введение. В данной работе исследуется предельное поведение функционалов типа локального времени от цепей и процессов Маркова. Рассматриваются функционалы вида

$$\phi_n^{s,t} \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k: s \le t_{n,k} < t} F_{n,k}\Big(X_n\left(t_{n,k}\right), X_n\left(t_{n,k+1}\right), \ldots, X_n\left(t_{n,k+L-1}\right)\Big), \quad 0 \le s < t, \tag{1}$$

где $\mathbb{T}_n \stackrel{\text{df}}{=} \{t_{n,k}\}$, $n \geq 1$, — последовательность разбиений $\mathbb{R}^+$, X_n, $n \geq 1$, — последовательность процессов, сходящаяся в подходящем смысле к некоторому процессу X, $F_{n,k}, n \geq 1, k \geq 0$, — неотрицательные борелевские функции. Поскольку каждый из функционалов ϕ_n имеет свойство аддитивности в точках соответствующего разбиения $\mathbb{T}_n$, такие функционалы будем называть *разностными аддитивными*. Примерами функционалов вида (1) могут служить число посещений некоторого множества K_n значениями процесса X_n в точках разбиения $\mathbb{T}_n$, число перемен знака для последовательных значений процесса X_n в точках разбиения $\mathbb{T}_n$ и т. п. Основное структурное предположение состоит в том, что предельный процесс X является однородным процессом Маркова, а каждый из процессов X_n имеет марковское свойство в точках соответствующего разбиения $\mathbb{T}_n$. Таким образом, X_n, $n \geq 1$, естественно интерпретировать как последовательность цепей Маркова с подходящим образом масштабированной временной переменной.

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой был предложен подход к исследованию предельного поведения разностных аддитивных функционалов, являющийся развитием подхода Дынкина к исследованию предельного поведения W-функционалов от марковского процесса. Известно достаточное условие Е. Б. Дынкина, устанавливающее сходимость W-функционалов от данного процесса Маркова при условии равномерной сходимости их *характеристик*, т.е. математических ожиданий (см. [2], гл. 6). В работе [1] понятие характеристики было расширено на функционалы вида (1). Там же был доказан результат, являющийся, в определенном смысле, точным аналогом теоремы Дынкина для разностных аддитивных функционалов.

Цель данной работы заключается в том, чтобы ослабить условия основного результата работы [1], в частности условия равномерной сходимости характеристик и непрерывности предельной характеристики. Для того чтобы показать, что такое ослабление не является сугубо техническим, продемонстрируем смысл этих условий на примере W-функционалов от многомерного броуновского движения.

Известно (см. [2], гл. 8), что для m-мерного броуновского движения каждому W-функционалу ϕ соответствует так называемая *W-мера* μ, т. е. σ-конечная мера, удовлетворяющая соотношению

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m}\int\limits_{\|y-x\|\le 1} w\big(\|y-x\|\big)\mu(dy)<+\infty, \qquad w(r)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\begin{cases}\max(-\ln r,1), & m=2\\ r^{2-m}, & m>2.\end{cases} \tag{2}$$

При этом характеристика $f_t(x)\stackrel{\mathrm{df}}{=}E_x\phi^{0,t}$ функционала ϕ задана соотношением

$$f_t(x)=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^m} p_s(x,y)\mu(dy)\,ds, \qquad p_s(x,y)\stackrel{\mathrm{df}}{=}(2\pi s)^{-m/2}e^{-\|x-y\|^2/2s}.$$

Характеристика определяет W-функционал однозначно (см. [2], гл. 6), так что соответствие между W-мерами и W-функционалами взаимно однозначно.

Можно показать (см. [3], утверждение 1.1), что если W-мера μ имеет компактный носитель, то характеристика соответствующего W-функционала непрерывна по переменной x тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^m}\int\limits_{\|y-x\|\le\delta} w\big(\|y-x\|\big)\mu(dy)=0. \tag{3}$$

Отличие между условиями (2) и (3) легко продемонстрировать в терминах *m-мерного потенциала*, порождаемого мерой μ, т. е. функции

$$U_\mu(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^m} w(\|y-x\|)\,\mu(dy), \quad x\in\mathbb{R}^m.$$

А именно, мера μ с компактным носителем является W-мерой в точности тогда, когда потенциал U_μ ограничен; мера μ удовлетворяет (3) в точности тогда, когда потенциал U_μ непрерывен. Отметим, что существуют W-меры, для которых соответствующие потенциалы, равно как и характеристики соответствующих W-функционалов, разрывны (см. [3], пример 5.2 и п. 4 данной работы).

Таким образом, класс W-функционалов с разрывными характеристиками нетривиален. Такие функционалы естественно называть „нерегулярными”. Нерегулярные функционалы не могут возникать в качестве предельных в рамках подхода, развитого в [1]. В данной работе мы заменяем равномерные условия на характеристики определенной комбинацией их локальных аналогов и условий на поведение траекторий предельного процесса. Это позволяет расширить область применения подхода, предложенного в [1]. В частности, в п. 4 мы приводим пример последовательности разностных функционалов, не удовлетворяющей равномерным условиям [1], для которой основной результат данной работы — теорема 1 — позволяет доказать сходимость по распределению к нерегулярному W-функционалу от двумерного броуновского движения.

2. Основные объекты и определения. Поскольку данная работа является продолжением [1], мы опускаем подробные объяснения конструкций и объектов, если такие объяснения содержатся в статье [1].

Как было отмечено во введении, мы предполагаем, что предельный процесс X является однородным процессом Маркова, а каждый из процессов X_n имеет марковское свойство в точках соответствующего разбиения $\mathbb{T}_n$ [1]. Фазовым пространством для процессов X, X_n, $n \geq 1$, является некоторое локально компактное метрическое пространство $\mathbb{X}$. Траектории процесса X предполагаются непрерывными справа и имеющими пределы слева в каждой точке.

Функционалы ϕ_n, которые рассматриваются в данной работе, имеют вид (1). Вместе с этими функционалами, являющимися ступенчатыми функциями по каждой из временных переменных, рассматриваются также случайные ломаные, построенные по этим функциям:

$$\psi_n^{s,t} = \phi_n^{t_{n,j-1},t_{n,k-1}} - \frac{s - t_{n,j-1}}{t_{n,j} - t_{n,j-1}} \phi_n^{t_{n,j-1},t_{n,j}} + \frac{t - t_{n,k-1}}{t_{n,k} - t_{n,k-1}} \phi_n^{t_{n,k-1},t_{n,k}},$$

$$s \in [t_{n,j-1}, t_{n,j}), \quad t \in [t_{n,k-1}, t_{n,k}).$$

Случайные ломаные ψ_n мы интерпретируем как случайные элементы в пространстве $C(\triangle, \mathbb{R}^+)$, где $\triangle \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(s,t)\colon 0 \leq s \leq t\}$.

Для функционала ϕ_n его характеристика f_n задается следующим равенством, аналогичным определению характеристики W-функционала [1] (определение 3.2):

$$f_n^{s,t}(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathrm{E}\big[\phi_n^{s,t}(X_n) | X_n(s) = x\big], \quad s \in \mathbb{T}_n, \quad t > s, \quad x \in \mathbb{X}.$$

Здесь и далее условное математическое ожидание $\mathrm{E}[\cdot | X_n(s) = x]$ понимается как интеграл по семейству условных конечномерных распределений, существование которого обеспечивается марковским свойством процесса X_n в точках разбиения $\mathbb{T}_n$ [1].

Введем два определения, необходимые для дальнейшего изложения. Первое из них является модификацией определения 1 из работы [4].

Определение 1. *Последовательность* $\{X_n\}$ *осуществляет марковскую аппроксимацию процесса* X *по сетке разбиений* $\{\mathbb{T}_n\}$, *если для произвольных* $\gamma > 0$, $T < +\infty$ *существуют число* $K = K(\gamma, T) \in \mathbb{N}$ *и последовательность двухкомпонентных процессов* $\{\hat{Y}_n = (\hat{X}_n, \hat{X}^n)\}$ *такие, что*:

1) $\hat{X}_n \stackrel{d}{=} X_n$, $\hat{X}^n \stackrel{d}{=} X$;

2) *процессы* $\hat{Y}_n$, $\hat{X}_n$, $\hat{X}^n$ *имеют марковское свойство в точках* $t_{n,iK}$, $i \in \mathbb{N}$, *относительно потока* $\{\hat{\mathcal{F}}_t^n = \sigma(\hat{Y}_n(s), s \leq t)\}$;

3) $\limsup\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(\sup\limits_{t_{n,iK} \in [0,T]} \rho\left(\hat{X}_n(t_{n,iK}), \hat{X}^n(t_{n,iK})\right) > \gamma\right) < \gamma.$

Утверждения, приведенные в работах [1, 4, 5], показывают, что предположение о том, что последовательность $\{X_n\}$ осуществляет марковскую аппроксимацию процесса X, не является ограничительным и выполняется для широкого класса последовательностей при весьма общих условиях.

Следующее определение является модификацией общепринятого в теории потенциала определения „полярного множества”, поскольку полярное (в стандартном смысле) множество в $\mathbb{R}^m$ будет, в смысле определения 2, полярным множеством для m-мерного броуновского движения (см. [6]).

Определение 2. *Замкнутое множество* $A \subset \mathbb{X}$ *называется полярным для марковского процесса* X, *если*:

1) $\forall x \notin A\colon P_x\Big(\exists t \in \mathbb{R}^+ : X(t) \in A \text{ или } X(t-) \in A\Big) = 0,$

2) $\forall t > 0\colon \mathrm{P}\big(X(t) \in A\big) = 0.$

Здесь и далее используются стандартные обозначения P_x, E_x для распределения марковского процесса X с начальным распределением, сосредоточенным в точке x, и математического ожидания по этому распределению соответственно.

3. Основное утверждение.

Теорема 1. *Пусть заданы последовательность X_n, осуществляющая марковскую аппроксимацию однородного процесса Маркова X, и последовательность функционалов $\{\phi_n\}$ вида* (1). *Пусть для некоторого семейства открытых множеств $\{V_\alpha \subset \mathbb{X},\ \alpha > 0\}$, монотонного по α и такого, что $A = \mathbb{X}\backslash \bigcup_{\alpha>0} V_\alpha$ — полярное множество для процесса X, выполнены следующие условия*:

1) $\limsup\limits_{\epsilon\to 0}\, \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}\,\phi_n^{0,\epsilon} = 0;$

2) *для каждого* $T > 0\colon \varkappa_n(T) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathrm{E}\sum_{k:t_{n,k}<T} \left(\phi_n^{t_{n,k-1},t_{n,k}}\right)^2 \to 0,\ n \to \infty;$

3) *существует функция f, являющаяся характеристикой некоторого W-функционала $\phi = \phi(X)$ от предельного марковского процесса X, такая, что для каждых $T > 0$, $\alpha > 0$*

$$\sup_{x\in V_\alpha}\ \max_{k\colon t_{n,k}\in[0,T]}\ \sup_{t\in[t_{n,k},T]} \left|f_n^{t_{n,k},t}(x) - f^{t_{n,k},t}(x)\right| \to 0, \quad n \to \infty;$$

4) *для каждого $T > 0$ характеристики функционалов $\phi_n^{0,T}$ ограничены*:

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in\mathbb{X}} f_n^{0,T}(x) < +\infty;$$

5) *для каждых $T > 0$, $\alpha > 0$ функция f непрерывна по переменной x равномерно при $t \in [0,T]$, $x \in V_\alpha$* :

$$\sup_{\substack{x_1,x_2\in V_\alpha,\\ \rho(x_1,x_2)<\delta}}\ \sup_{t\in[0,T]} \left|f^{0,t}(x_1) - f^{0,t}(x_2)\right| \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Тогда для случайных ломаных ψ_n, соответствующих функционалам ϕ_n, имеет место сходимость по распространению в $C(\triangle, \mathbb{R}^+)$:

$$\psi_n(X_n) \Rightarrow \phi(X) \equiv \big\{\phi^{s,t}(X),\ (s,t) \in \triangle\big\}.$$

Замечание. Условия 2 – 5 теоремы 1 являются ослабленными версиями условий 1 – 3 основной теоремы статьи [1]. Так, вместо равномерных ограничений на приращения $\phi_n^{t_{n,k-1},t_{n,k}}$ используется условие 2, вместо равномерной сходимости характеристик требуются равномерная ограниченность характеристик (условие 4) и их равномерная сходимость на каждом из множеств V_α (условие 3), вместо равномерной непрерывности предельной характеристики требуется равномерная непрерывность на каждом из множеств V_α (условие 5). При этом возникает необходимость в специфическом условии 1, которое контролирует общие приращения исследуемых функционалов в окрестности начального момента времени. Следует отметить, что в условиях 2 – 5 теоремы 1 условие 1 является *необходимым* для того, чтобы требуемая слабая сходимость имела место. Это несложно показать, учитывая, что $\phi^{0,\varepsilon} \to 0$ почти наверное при $\varepsilon \to 0$ и семейство $\phi_n^{0,t}$, $t \in [0,T]$, $n \geq 1$, равномерно интегрируемо в силу оценки (8).

Доказательству теоремы 1 предпошлем вспомогательные построения и утверждения. Обозначим

$$\|f_n\|_n \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{x\in\mathbb{X}} \max_{\substack{0\le s<t\le T\\ s,t\in\mathbb{T}_n}} (x), \qquad \|f\| \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{x\in\mathbb{X}} \sup_{0\le s<t\le T} f^{s,t}(x).$$

Для фиксированных $\gamma > 0$, $T > 0$ рассмотрим процесс $\hat{Y}_n \stackrel{\text{df}}{=} (\hat{X}_n, \hat{X}^n)$, который удовлетворяет условиям 1 – 3 определения 1. В силу условия 1 функционалы $\hat{\phi}_n \stackrel{\text{df}}{=} \phi_n(\hat{X}_n)$ одинаково распределены с $\phi_n(X_n)$. Аналогично, каждый из функционалов $\hat{\phi}^n \stackrel{\text{df}}{=} \phi(\hat{X}^n)$ одинаково распределен с $\phi(X)$. Поэтому с целью упрощения обозначений далее там, где это не вызывает недоразумений, мы пишем ϕ_n вместо $\hat{\phi}_n$ и ϕ вместо $\hat{\phi}^n$.

Лемма 1. *Для произвольного $t > 0$ существует функция $\Xi(t,\cdot)$ такая, что $\Xi(t,\gamma)\to 0$, $\gamma\to 0$ и*

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\phi_n^{0,t} - \phi^{0,t}\right)^2 \le \Xi(t,\gamma).$$

Доказательство. Если не оговорено особо, мы для сокращения будем писать t_i вместо $t_{n,iK(\gamma,T)}$. Не ограничивая общности можно положить $t = T$. Также считаем, что $K \ge L$ (в противном случае те же рассуждения проводятся для константы $K' \stackrel{\text{df}}{=} KL$ вместо K).

Обозначим

$$M_n = \sup\{i\colon t_i\in[0,T]\} + 1,$$

$$\Delta_i^n \stackrel{\text{df}}{=} \phi_n^{t_{i-1},t_i\wedge T}, \qquad \widetilde{\Delta}_i^n \stackrel{\text{df}}{=} \phi^{t_{i-1},t_i\wedge T}, \quad i=\overline{1,M_n}.$$

Имеем

$$\left(\phi_n^{0,T} - \phi^{0,T}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{M_n}\left(\Delta_i^n - \widetilde{\Delta}_i^n\right)\right)^2 = \Sigma_1^n + 2\Sigma_2^n,$$

где

$$\Sigma_1^n \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{M_n}(\Delta_i^n)^2 + \sum_{i=1}^{M_n}(\widetilde{\Delta}_i^n)^2 - 2\sum_{i=1}^{M}\Delta_i^n\widetilde{\Delta}_i^n,$$

$$\Sigma_2^n \stackrel{\text{df}}{=} \left[\sum_{1\le i<l\le M_n}\Delta_i^n\Delta_l^n - \sum_{1\le i<j\le M_n}\Delta_i^n\widetilde{\Delta}_j^n\right] +$$

$$+\left[\sum_{1\le j<k\le M_n}\widetilde{\Delta}_j^n\widetilde{\Delta}_k^n - \sum_{1\le j<i\le M_n}\Delta_i^n\widetilde{\Delta}_j^n\right].$$

Оценку асимптотики математических ожиданий Σ_1^n, Σ_2^n разобьем на несколько частей.

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} E\,\Sigma_1^n = 0.$

Поскольку приращения Δ_i^n, $\widetilde{\Delta}_i^n$ неотрицательны, первую сумму в разложении Σ_1^n можно оценить сверху суммой первых двух слагаемых:

$$\Sigma_1^n \le \sum_{i=1}^{M_n} (\Delta_i^n)^2 + \sum_{i=1}^{M_n} (\widetilde{\Delta}_i^n)^2. \tag{4}$$

Неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим вместе с условием 2 теоремы позволяет оценить математическое ожидание первого слагаемого из (4):

$$\mathrm{E} \sum_{i=1}^{M_n} (\Delta_i^n)^2 \le K\, \mathrm{E} \sum_{j=1}^{KM_n} \left(\phi_n^{t_{n,j-1}, t_{n,j}}\right)^2 = K \cdot \varkappa_n \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Сходимость к нулю среднего значения второго слагаемого в (4) является следствием рассуждений, которые аналогичны приведенным в гл. 6 [2]: с одной стороны, из непрерывности функционала ϕ следует, что $\sum_{i=1}^{M_n} (\widetilde{\Delta}_i^n)^2 \to 0$ почти наверное, а с другой — $\sum_{i=1}^{M_n} (\widetilde{\Delta}_i^n)^2$ мажорируется величиной $(\phi^{0,T})^2$, причем среднее этой величины, согласно лемме 6.4 [2], не превышает $2\,\|f\|^2 < \infty$. Поэтому $\mathrm{E} \sum_{i=1}^{M_n} (\widetilde{\Delta}_i^n)^2 \to 0$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Таким образом, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}\, \Sigma_1^n = 0$.

2. Оценка $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}\, \Sigma_2^n$.

Математическое ожидание Σ_2^n запишем в виде

$$\mathrm{E}\left[\sum_{1\le i<l\le M_n} \Delta_i^n \Delta_l^n - \sum_{1\le i<j\le M_n} \Delta_i^n \widetilde{\Delta}_j^n\right] +$$

$$+\,\mathrm{E}\left[\sum_{1\le j<k\le M_n} \widetilde{\Delta}_j^n \widetilde{\Delta}_k^n - \sum_{1\le j<i\le M_n} \Delta_i^n \widetilde{\Delta}_j^n\right] =$$

$$= \mathrm{E} \sum_{i=1}^{M_n-1} \widetilde{\Delta}_i^n \left[\phi^{t_i,T} - \phi_n^{t_i,T}\right] + \mathrm{E} \sum_{i=1}^{M_n-1} \Delta_i^n \left[\phi_n^{t_i,T} - \phi^{t_i,T}\right]. \tag{5}$$

Обозначим сумму под первым математическим ожиданием $\Sigma_{2.1}^n$, под вторым — $\Sigma_{2.2}^n$.

3. Оценка $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}\, \Sigma_{2.1}^n$.

Воспользуемся условием 2 определения 1, т. е. марковским свойством процесса $(\hat{X}^n, \hat{X}_n)$ в точках разбиения. Поскольку величина $\widetilde{\Delta}_i^n$ измерима относительно $\mathcal{F}_{t_i}$, справедливо равенство

$$\mathrm{E} \sum_{i=1}^{M_n-1} \widetilde{\Delta}_i^n \left[\phi^{t_i,T} - \phi_n^{t_i,T}\right] = \mathrm{E} \sum_{i=1}^{M_n-1} \widetilde{\Delta}_i^n E\left[\left(\phi^{t_i,T} - \phi_n^{t_i,T}\right) |\mathcal{F}_{t_i}\right] =$$

$$= \mathrm{E} \sum_{i=1}^{M_n-1} \widetilde{\Delta}_i^n \left(f^{t_i,T}\left(\hat{X}^n(t_i)\right) - f_n^{t_i,T}\left(\hat{X}_n(t_i)\right)\right). \tag{6}$$

Зафиксируем $\theta \in (0, T]$, $\epsilon > 0$. Рассмотрим события

$$\hat{\Omega} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ \forall t \in [\theta, T] \colon \hat{X}^n(t) \in \bigcup_{\alpha>0} V_\alpha \right\},$$

$$\Omega_\gamma \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ \sup_{i<M_n} \rho\left(\hat{X}_n\left(t_i\right),\ \hat{X}^n\left(t_i\right)\right) \le \gamma \right\},$$

$$\Omega'_\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ \forall t \in [\theta, T] \colon \hat{X}^n(t) \in V_\alpha \right\},$$

$$\Omega''_\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ \forall t \in [\theta, T] \colon \hat{X}_n(t) \in V_\alpha \right\}.$$

Напомним, что множество $\mathbb{X} \setminus \bigcup_{\alpha>0} V_\alpha$ является полярным, следовательно, $X^n(\theta) \in \bigcup_{\alpha>0} V_\alpha$ почти наверное, поэтому событие $\hat{\Omega}$ имеет вероятность 1. Таким образом, выражение (6) может быть оценено сверху выражением

$$E\mathbf{1}_{\{\hat{\Omega}\}} \sum_{t_i \in M_{\theta,n}} \widetilde{\Delta}_i^n \left| f_n^{t_i,T}\left(\hat{X}_n\left(t_i\right)\right) - f^{t_i,T}\left(\hat{X}^n\left(t_i\right)\right) \right| +$$

$$+ \left(\|f\| + \sup_n \|f_n\|_n \right) \mathrm{E}\, f^{0,\theta}(X(0)), \quad M_{\theta,n} = \{t_i \colon t_i \in [\theta, T]\}. \tag{7}$$

В силу условия 3 определения 1 $\mathrm{P}(\Omega_\gamma) > 1 - \gamma$. Докажем, что существует $\alpha_0 = \alpha_0(\theta, \epsilon, T) > 0$ такое, что

$$\mathrm{P}(\hat{\Omega} \backslash \Omega'_{\alpha_0}) = \mathrm{P}\left(\hat{\Omega} \backslash \{\forall t \in [\theta, T] \colon X(t) \in V_{\alpha_0}\} \right) < \epsilon.$$

В силу монотонности семейства множеств V_α

$$\mathrm{P}\left\{ \hat{\Omega} \backslash \bigcup_{\alpha>0} \Omega'_\alpha \right\} = \mathrm{P}\left(\hat{\Omega} \bigcap \bigcap_{\alpha>0} \left\{ \exists s_\alpha \in [\theta, T] \colon \hat{X}^n(s_\alpha) \notin V_\alpha \right\} \right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\hat{\Omega} \bigcap \left\{ \exists s \in [\theta, T], \{s_n, n \ge 1\} : s_n \to s\pm, \quad \hat{X}^n(s_n) \in \mathbb{X} \backslash V_\alpha \right\} \right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\hat{\Omega} \bigcap \left\{ \exists s \in [\theta, T], \hat{X}^n(s\pm) \in \mathbb{X} \backslash \bigcup_{\alpha>0} V_\alpha \right\} \right) = 0.$$

Тут опять были использованы условие полярности множества $\mathbb{X} \backslash \bigcup_\alpha V_\alpha$ и тот факт, что для убывающей последовательности замкнутых множеств $\{A_n \subset \mathbb{X}\}$ и точек $a_n \in A_n$ из $a_n \to a$ следует, что $a \in \bigcap_{n \ge 1} A_n$. Поскольку последовательность $\Omega'_{1/n}$ возрастает, из непрерывности вероятности как функции множеств следует, что $\mathrm{P}\left\{ \Omega'_{1/n} \right\} \to 1$, $n \to \infty$.

Обозначим

$$r_n(\alpha, T) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{x \in V_\alpha} \sup_{t_k [0,T]} \sup_{t \in [t_k, T]} \left| f_n^{t_k,t}(x) - f^{t_k,t}(x) \right|,$$

$$\omega_f(\epsilon, \alpha, T) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{0<s<t<T} \sup_{\substack{x_1, x_2 \in V_\alpha \\ \rho(x_1,x_2)<\epsilon}} \left| f^{s,t}(x_1) - f^{s,t}(x_2) \right|,$$

$$\delta(\alpha, \epsilon, \theta, T) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{P}\left\{ 0 < \inf_{t \in [\theta,T]} \inf_{z \in \mathbb{X} \backslash V_\alpha} \rho\left(X(t), z\right) < \epsilon \right\}.$$

Согласно условиям 5 и 3 теоремы 1 $r_n(\alpha, T) \to 0$, $n \to \infty$ и $\omega_f(\epsilon, \alpha, T) \to 0$, $\epsilon \to 0$. Величина $\delta(\alpha, \epsilon, \theta, T)$ при фиксированных θ, α, T стремится к нулю при $\epsilon \to 0$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Согласно лемме 6.4 гл. 6 [2]

$$\sup_{x\in\mathbb{X}} E_x\left(\left[\phi^{s,t}\right]^2\right) \leq 2\sup_{x\in\mathbb{X}}\left[f^{s,t}(x)\right]^2.$$

Таким образом, с учетом того, что $\Omega'_\alpha \subset \hat{\Omega}$, можно оценить сверху первое слагаемое в (7):

$$\mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{\hat{\Omega}\}}\sum_{t_i\in M_{\theta,n}}\widetilde{\Delta}_i^n\left|f_n^{t_i,T}\left(\hat{X}_n\left(t_i\right)\right) - f^{t_i,T}\left(\hat{X}^n\left(t_i\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \mathrm{E}\sum_{t_i\in M_{\theta,n}}\widetilde{\Delta}_i^n\mathbf{1}_{\left\{\Omega'_{\alpha_0,T}\bigcap\Omega''_{\alpha_0,T}\right\}}\left|f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\hat{X}_n\left(t_{Ki,n}\right)\right) - f^{\frac{Ki}{n},T}\left(\hat{X}^n\left(t_{Ki,n}\right)\right)\right| +$$

$$+\mathrm{E}\sum_{t_i\in M_{\theta,n}}\widetilde{\Delta}_i^n\mathbf{1}_{\left\{\Omega'_{\alpha_0}\bigcap\Omega''_{\alpha_0}\right\}}\left|f_n^{t_i,T}\left(\hat{X}_n\left(t_i\right)\right) - f^{t_i,T}\left(\hat{X}_n\left(t_i\right)\right)\right| + \left(\|f\| + \sup_n\|f_n\|_n\right)\times$$

$$\times\left[\mathrm{E}\sum_{t_i\in M_{\theta,n}}\widetilde{\Delta}_i^n\mathbf{1}_{\left\{\Omega_\gamma\bigcap\Omega'_{\alpha_0}\setminus\Omega''_{\alpha_0}\right\}} + \mathrm{E}\sum_{t_i\in M_{\theta,n}}\widetilde{\Delta}_i^n\mathbf{1}_{\left\{\hat{\Omega}\setminus\Omega'_{\alpha_0}\right\}} + \mathrm{E}\sum_{t_i\in M_{\theta,n}}\widetilde{\Delta}_i^n\mathbf{1}_{\{\Omega\setminus\Omega_\gamma\}}\right] \leq$$

$$\leq \|f\|\,r_n(\alpha_0(\theta,\epsilon,T),T) + \|f\|\,\omega_f(\epsilon,\alpha_0(\theta,\epsilon,T),T) +$$

$$+\left(\sup_n\|f_n\|_n + \|f\|\right)\left(\mathrm{E}\left[\phi^{0,T}\right]^2\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left[\left(\mathrm{P}\left\{\Omega_\gamma\bigcap\Omega'_{\alpha_0}\setminus\Omega''_{\alpha_0}\right\}\right)^{1/2} + \left(\mathrm{P}\left\{\hat{\Omega}\setminus\Omega'_{\alpha_0}\right\}\right)^{1/2} + \left(\mathrm{P}\left\{\Omega\setminus\Omega_\gamma\right\}\right)^{1/2}\right] \leq$$

$$\leq \|f\|\,\omega_f(\epsilon,\alpha_0(\theta,\epsilon,T),T) + \|f\|\,r_n(\alpha_0(\theta,\epsilon,T),T) +$$

$$+\left(\sup_n\|f_n\|_n + \|f\|\right)\sqrt{2}\,\|f\|\,()\,\sqrt{\delta(\alpha_0(\theta,\epsilon,T),\gamma,\theta,T)} + \sqrt{\epsilon} + \sqrt{\gamma}.$$

Подытоживая приведенные выше рассуждения, можно сделать вывод о том, что

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\mathrm{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\widetilde{\Delta}_i^n\left[\phi^{t_i,T} - \phi_n^{t_i,T}\right]\right\} \leq$$

$$\leq \left(\|f\| + \sup_n\|f_n\|_n\right)\mathrm{E}\,f^{0,\theta}(X(0)) + \|f\|\,\omega_f(\gamma,\alpha_0(\theta,T),T) +$$

$$+\left(\sup_n\|f_n\|_n + \|f\|\right)\sqrt{2}\,\|f\|\left(\sqrt{\delta(\alpha_0(\theta,\epsilon,T),\gamma,\theta,T)} + \sqrt{\epsilon} + \sqrt{\gamma}\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} \Xi_1(\theta,\gamma,\epsilon,T).$$

При этом, $\lim\limits_{\theta\to 0}\lim\limits_{\epsilon\to 0}\lim\limits_{\gamma\to 0}\Xi_1(\theta,\gamma,\epsilon,T) = 0$.

4. Оценка $\limsup_{n\to\infty}\mathrm{E}\,\Sigma_{2.2}^n$.

Для оценки $\Sigma_{2.2}^n$ нам понадобится оценка математического ожидания $(\phi_n)^2$. Из марковского свойства процесса $\hat{Y}_n$ в точках $t_{n,k}$, условия 2 и оценок, аналогичных оценке (3.10) работы [1], следует

$$\mathrm{E}\left[\phi_n^{0,T}\right]^2 \le (3K+3)\varkappa_n + 2\sup_n \|f_n\|_n^2. \tag{8}$$

Теперь рассуждения, аналогичные проведенным при оценивании $\mathrm{E}\,\Sigma_{2.1}^n$, и проведенная выше оценка приводят к следующему:

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\mathrm{E}\sum_{i=1}^{M_n-1}\Delta_i^n\left[\phi_n^{t_i,T}-\phi^{t_i,T}\right]\right\}\le$$

$$\le\left(\|f\|+\sup_n\|f_n\|_n\right)\limsup_{n\to\infty}\mathrm{E}\,f_n^{0,\theta}(X(0))+\sup_n\|f_n\|_n\,\omega_f(\gamma,\alpha_0(\theta,\epsilon,T),T)+$$

$$+\left(\sup_n\|f_n\|_n+\|f\|\right)\sqrt{2}\sup_n\|f_n\|_n\left(\sqrt{\delta(\alpha_0,\gamma,\theta,T)}+\sqrt{\epsilon}+\sqrt{\gamma}\right)\stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=}\Xi_2(\theta,\gamma,\epsilon,T).$$

Используя условие 1 теоремы, имеем $\lim\limits_{\theta\to0}\lim\limits_{\epsilon\to0}\lim\limits_{\gamma\to0}\Xi_2(\theta,\gamma,\epsilon,T)=0$.

5. Оценка $\limsup_{n\to\infty}\mathrm{E}\left(\phi_n^{0,T}-\phi^{0,T}\right)^2$.

Таким образом, при фиксированных α, θ, γ, ϵ, T выполнено

$$\limsup_{n\to\infty}\mathrm{E}\left(\phi_n^{0,t}-\phi^{0,t}\right)^2\le$$

$$\le\limsup_{n\to\infty}\mathrm{E}\,\Sigma_1^n+2\limsup_{n\to\infty}\mathrm{E}\,\Sigma_{2.1}^n+2\limsup_{n\to\infty}\mathrm{E}\,\Sigma_{2.2}^n\le$$

$$\le 0+2\Xi_1(\theta,\gamma,\epsilon,T)+2\Xi_2(\theta,\gamma,\epsilon,T).$$

Обозначим $\Xi(\gamma,T)=2\inf\limits_{\theta>0}\inf\limits_{\epsilon>0}\Xi_1(\theta,\gamma,\epsilon,T)+2\inf\limits_{\theta>0}\inf\limits_{\epsilon>0}\Xi_2(\theta,\gamma,\epsilon,T)$. Для $\theta,\epsilon,T>0$ имеем

$$\limsup_{\gamma\to0}\Xi(\gamma,T)\le2\limsup_{\gamma\to0}\Xi_1(\theta,\gamma,\epsilon,T)+2\limsup_{\gamma\to0}\Xi_2(\theta,\gamma,\epsilon,T)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\hat{\Xi}(\theta,\epsilon,T).$$

При этом по доказанному выше $\lim\limits_{\theta\to0}\lim\limits_{\epsilon\to0}\hat{\Xi}(\theta,\epsilon,T)=0$, а $\Xi(\gamma,T)$ от θ и ϵ не зависит. Как следствие, $\lim\limits_{\gamma\to0}\Xi(\gamma,T)=0$, что и доказывает лемму 1.

Теперь доказательство сходимости конечномерных распределений ϕ_n к соответствующим распределениям ϕ следует из соображений, аналогичных приведенным в конце доказательства теоремы 1 [1].

Докажем, что конечномерные распределения случайных ломаных ψ_n также слабо сходятся к конечномерным распределениям ϕ. Для этого достаточно показать, что для произвольного $t>0$ $\mathrm{E}\,|\psi_n^{0,t}-\phi_n^{0,t}|\to0$, $n\to\infty$.

Действительно, при фиксированном $\delta>0$ для $n>1/\delta$

$$\mathrm{E}\left|\psi_n^{0,t}-\phi_n^{0,t}\right|\le\mathrm{E}\left|\phi_n^{0,t+\delta}-\phi_n^{0,t}\right|\le\mathrm{E}\left|\phi_n^{0,t+\delta}(\hat{X}_n)-\phi^{0,t+\delta}(\hat{X}^n)\right|+$$

$$+\ \mathrm{E}\left|\phi_n^{0,t}(\hat{X}^n)-\phi^{0,t}(\hat{X}^n)\right|+\mathrm{E}\,\phi^{t,t+\delta}.$$

Следовательно, $\limsup\limits_{n\to\infty}\mathrm{E}\left|\psi_n^{0,t}-\phi_n^{0,t}\right|\le\mathrm{E}\,\phi^{t,t+\delta}$. Последнее выражение стремится к нулю при $\delta\to0$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

С учетом соотношений $\psi_n^{s,t}=\psi_n^{0,t}-\psi_n^{0,s}$, $\psi^{s,t}=\psi^{0,t}-\psi^{0,s}$ доказательство теоремы завершает следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть задана последовательность случайных процессов* $\big\{Z_n(t),\ t \in [0,T]\big\}$ *со значениями в пространстве* $\mathbb{R}^+$, *причем* $Z_n(0) = 0$ *для любого* $n > 0$. *Тогда, если траектории* $Z_n(\cdot)$ *почти наверное монотонны и непрерывны, из сходимости конечномерных распределений* Z_n *к распределениям некоторого непрерывного процесса* Z *следует сходимость* $Z_n \Rightarrow Z$ *по распределению в* $C([0,T])$.

Доказательство. В силу теоремы Прохорова (см. теоремы 6.1, 6.2 из гл. 1 [7]) для доказательства леммы достаточно доказать плотность семейства распределений Z_n в $C([0,T])$. Для применения достаточного условия плотности последовательности мер в $C([0,T])$ (см. теорему 8.2 гл. 2 [7]) достаточно доказать, что для каждого $\epsilon > 0$ имеет место

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\omega_n(\delta,T) \geq \epsilon\right) = 0,$$

$$\omega_n(\delta,T) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{\substack{t_1,t_2:0\leq t_1<t_2\leq T\\ t_2-t_1<\delta}} \left|Z_n(t_1) - Z_n(t_2)\right|.$$

Рассмотрим разбиение отрезка $[0,T]$ точками вида $\left\{\dfrac{mT}{n},\ m\in\mathbb{N}\right\}$. В силу монотонности Z_n имеет место неравенство

$$\sup_{m=0,\ldots,M-1}\left|Z_n\left(\frac{mT}{M}\right) - Z_n\left(\frac{(m+1)T}{M}\right)\right| \leq \omega_n\left(\frac{T}{M},T\right) \leq$$
$$\leq 2\sup_{m=0,\ldots,M-1}\left|Z_n\left(\frac{mT}{M}\right) - Z_n\left(\frac{(m+1)T}{M}\right)\right|. \tag{9}$$

Поскольку конечномерные распределения процессов Z_n сходятся к конечномерным распределениям процесса Z, для траекторий которого справедлив аналог (9), выполняется неравенство

$$\limsup_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\omega_n\left(\frac{T}{M},T\right) \geq \epsilon\right) \leq \mathrm{P}\left(\omega\left(\frac{T}{M},T\right) \geq \frac{\epsilon}{2}\right), \tag{10}$$

где $\omega\left(\delta,T\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup\limits_{\substack{t_1,t_2:0\leq t_1<t_2\leq T\\ t_2-t_1<\delta}} \left|Z\left(t_1\right) - Z\left(t_2\right)\right|$. Правая часть (10) стремится к нулю при $M\to\infty$. Это влечет плотность семейства распределений Z_n в пространстве $C([0,T])$.

Лемма доказана.

4. Пример. Пусть задана последовательность $\big\{\xi_n = (\xi_n^1,\xi_n^2),\ n\geq 1\big\}$ независимых одинаково распределенных случайных векторов в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что они центрированы и имеют единичную матрицу ковариаций.

Пусть $X_n\left(\dfrac{k}{n}\right) = x_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i$, $k\in\mathbb{Z}_+$, и на каждом из отрезков разбиения оси $\mathbb{R}^+$ точками множества $\mathbb{T}_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} n^{-1}\mathbb{Z}_+$ траектории X_n линейны. Последовательность $\{x_n\}$ предполагается неслучайной и сходящейся к нулю при $n\to\infty$. Обозначим через $\mathrm{P}_{n,t}(dx)$ распределение $X_n(t)$.

Далее, положим $r_k = 2^{-k^2}$, $a_k = \left(\dfrac{1}{k},0\right)\in\mathbb{R}^2$, $S_k = \{y\colon\ \|y-a_k\|_{\mathbb{R}^2} = r_k\}$, $Q_k = k^{-2}$, $k\geq 1$. Определим меры σ_k как поверхностные меры на окружностях S_k. Обозначим $m_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} [\sqrt{\ln n}] + 1$ и рассмотрим меры

$$\mu_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{m_n} Q_k \sigma_k, \qquad \mu \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \sigma_k.$$

Мера μ является W-мерой, но при этом для нее не выполняется условие (3) (см. [3], пример 5.2). Соответственно, μ задает W-функционал ϕ от двумерного броуновского движения X, характеристика f которого разрывна.

Положим

$$F_n(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_0^{1/n} \int\limits_{\mathbb{R}^2} G_t(y-x)\mu_n(dy)dt, \qquad G_t(x) = \frac{1}{2\pi t}\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2t}\right),$$

и определим функционалы ϕ_n равенством (1) с $L=1$, $F_{n,k}=F_n$, $k\geq 0$, $n\geq 1$.

Мы покажем, что при определенных предположениях случайные ломаные ψ_n, соответствующие функционалам $\phi_n=\phi_n(X_n)$, сходятся слабо к $\phi=\phi(X)$. Такой результат ожидаем, поскольку случайные ломаные X_n по теореме Донскера слабо сходятся к броуновскому движению X, и, как несложно проверить, меры $\nu_n(dx) := F_n(x)\,dx$ слабо сходятся к мере μ. Однако нерегулярность предельного W-функционала ϕ приводит, в частности, к тому, что распределения функционалов весьма тонко реагируют на изменение начальных значений ломаных X_n, т. е. точек x_n.

Итак, пусть $x_n = \left(\dfrac{1}{m_n}, 0\right)$, $n\geq 1$, и шаг ξ_n случайного блуждания имеет стандартное двумерное нормальное распределение. Тогда для каждых $\epsilon>0$, $n\geq 1$ имеем

$$\mathrm{E}\,\phi_n^{0,\epsilon} = \sum_{i=1}^{[n\epsilon]} \int\limits_0^{1/n} \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} G_r(x_n+x-y)P_{i/n,n}(dx)d\mu_n(y) \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{[n\epsilon]} Q_{m_n} \int\limits_0^{1/n}\int\limits_{\mathbb{R}^2} G_{r+i/n}(x_n-y)drd\sigma_{m_n}(y) \geq Q_{m_n}\int\limits_{1/n}^{\epsilon} G_r(r_{m_n})dr. \tag{11}$$

Поскольку $r_{m_n}^2 = \dfrac{1}{2^{m_n^2}} < \dfrac{1}{n}$, выражение в правой части (11) можно, преобразовав, оценить снизу:

$$Q_{m_n}\int\limits_{1/\epsilon}^{n} \frac{1}{2\pi u} e^{-(r_{m_n}^2\cdot u)/2} du \geq Q_{m_n}\int\limits_{1/\epsilon}^{n}\frac{1}{2\pi u}e^{-1}du \geq \frac{1}{2\pi e}\frac{\ln(n\epsilon)}{\ln n}.$$

Таким образом, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}\,\phi_n^{0,\epsilon} \geq \dfrac{1}{2\pi e} > 0$. Следовательно, условие 1 теоремы 1 не выполнено, а значит (см. замечание 1), слабая сходимость ϕ_n к ϕ не имеет места.

Последовательность $\{x_n\}$ была выбрана таким образом, что для характеристики f функционала ϕ для каждого $t>0$

$$f^{0,t}(x_n) \not\to f^{0,t}(0), \quad n\to\infty$$

(это соотношение проверяется с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше). Таким образом, W-функционал ϕ нерегулярен, что делает достаточно естественным приведенный выше отрицательный результат.

С другой стороны, как показывает приведенное далее утверждение, даже в такой весьма нерегулярной ситуации *при правильном выборе* начальных точек случайных ломаных X_n положительный результат — сходимость по распределению разностных аддитивных функционалов ϕ_n — имеет место при весьма слабых ограничениях на последовательность $\{\xi_n\}$.

Утверждение 1. *Пусть $x_n \equiv 0$, распределение независимых одинаково распределенных случайных векторов ξ_n имеет ненулевую абсолютно непрерывную часть относительно меры Лебега и* $\mathrm{E}\,\|\xi_n\|^6 < +\infty$.

Тогда случайные ломаные ψ_n, соответствующие функционалам ϕ_n, сходятся слабо к ϕ.

Доказательство. Доказательство основано на применении теоремы 1. Отметим, что применение результатов работы [1] здесь невозможно в силу разрывности характеристики функционала ϕ.

То, что последовательность процессов X_n осуществляет марковскую аппроксимацию двумерного броуновского движения, доказано в [4] (см. также [3], лемма 3.1). Далее, характеристики функционалов ϕ_n и ϕ равны соответственно

$$f_n^{s,t}(x) = \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} Q_k \int_0^{1/n} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} G_r(y-z) \cdot P_{i/n,n}(dz - x)\sigma_k(dy)dr$$

и

$$f^{s,t}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} p_r(y-x)\sigma_k(dy)dr, \qquad p_r(x) = \frac{1}{2\pi r}\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2r}\right).$$

Выберем $V_\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\| \in \left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)\right\}$, $\alpha \in (0,1)$. Объединение этих множеств равно $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, поэтому является полярным для предельного процесса X [6; 8, с. 69].

Докажем равностепенную (по параметру t) непрерывность $f^{0,t}(\cdot)$ на каждом множестве V_α (условие 5). Выберем такое $N = N(\alpha) \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq N$: $S_n \bigcap V_{\alpha/2} = \varnothing$. Тогда $\forall n \geq N$, $y \in S_n$, $x \in V_\alpha$ $x - y \in V_{\alpha/2}$. Следовательно,

$$\forall k \geq N\colon \quad \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^t p_r(y-x)dr\sigma_k(dy) \leq \int_0^t \frac{1}{2\pi \cdot r} e^{-\alpha^2/8r} dr \leq \frac{8t}{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{8t}\right).$$

При $n \geq N$, $x \in V_{\alpha/2}$ функция $p_r(\cdot)$ равномерно непрерывна по $r \in [\epsilon, T]$ на множестве $V_{\alpha/2}$. С учетом сходимости ряда коэффициентов Q_k и равномерной непрерывности характеристики каждого функционала от двумерного винеровского процесса, заданного мерой σ_k (см. рассуждения из примера 5.2 работы [4]), из приведенных рассуждений следует равномерная непрерывность f на каждом V_α. Отметим, что из аналогичных рассуждений следует, что $\forall \alpha > 0\colon\ \sup_{x \in V_\alpha} f^{0,\epsilon}(x) \to 0$, $\epsilon \to 0$.

Согласно теореме 1.1 [9], в приведенных выше условиях имеет место следующая локальная предельная теорема для $P_{n,t}(dx)$.

Теорема 2. *Мера $P_{n,t}$ представляется в виде*

$$P_{n,t} = Q_{n,t} + R_{n,t}, \quad t = \frac{i}{n}, \tag{12}$$

причем:

1) $Q_t^n(dx) = q_t^n(x)dx$, $q_t^n \to p_t$, $n \to \infty$ *равномерно на множестве* $(\epsilon, 1] \times \mathbb{R}^2$ *для любого* $\epsilon > 0$;

2) *существует* $C > 0$ *такое, что для* $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}^2$: $q_t^n(x) \leq C\big(t + \|x\|^2\big)^{-1}$;

3) *существуют* $D, \rho > 0$ *такие, что* $R_{n,t}(\mathbb{R}^2) \leq D\left(n^{-8/7} + \exp(-\rho n t)\right)$.

Из разложения переходных вероятностей (12) следует представление характеристики f_n :

$$f_n^{s,t}(x) = f_{n,R}^{s,t}(x) + f_{n,Q}^{s,t}(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} \int_{\mathbb{R}^2} F_n(z-x) R_{n,i/n}(dz) + \sum_{i=[ns]+1}^{[nt]} \int_{\mathbb{R}^2} F_n(z-x) q_{i/n}^n(z) dz.$$

Отметим, что $F_n(x) \leq f^{0,1/n}(x)$, поскольку $G_t(x) \equiv p_t(x)$ и $\mu_n \leq \mu$, поэтому $\sup_{x\in\mathbb{R}^2} F_n(x) < +\infty$, $\sup\limits_{x\in V_\alpha} F_n(x) \to 0$, $n \to \infty$.

Таким образом,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} f_{n,R}^{0,t}(x) \leq \left\| f^{0,1/n} \right\| \sum_{i=0}^{n} R_{n,i/n}(\mathbb{R}^2) \leq$$

$$\leq D \left\| f^{0,1/n} \right\| \left(n^{-1/7} + \sum_{i=0}^{[nt]} \exp(-i\rho) \right) < +\infty.$$

Аналогично показывается, что

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} f_{n,R}^{m/n,t}(x) \leq D \left\| f^{0,1/n} \right\| \left(n^{-1/7} + \sum_{i=m+1}^{[nt]} \exp(-i\rho) \right) \to 0, \quad m \to \infty. \tag{13}$$

Проведем оценку $f_{n,Q}$ — части характеристики, которая соответствует мере Q.

Лемма 3. *Существуют* $A, B > 0$ *такие, что для произвольных* $t > 0$, $n > 1/t$, $x \in \mathbb{R}^2$ *выполнено*

$$f_{n,Q}^{0,t}(x) \leq A \int_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{t}{\|y-x\|^2}\right) \mu(dy) + \frac{B}{[nt]}.$$

Доказательство. Воспользуемся утверждением 2 теоремы 2. Существует константа C_1 такая, что

$$f_{n,Q}^{0,t}(x) \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} n F_n(x-z) g_n^t(z) dz, \qquad g_n^t(z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{[nt]} \frac{1}{i/n + \|z\|^2}.$$

Далее, очевидна следующая оценка $g_n^t(\cdot)$ при $n > 1/t$:

$$g_n^t(z) \leq \int_0^t \frac{1}{s + \|z\|^2} ds + \frac{1}{[nt] + n\|z\|^2} \leq \ln\left(1 + \frac{t}{\|z\|^2}\right) + \frac{1}{[nt]}.$$

Легко видеть, что $\int_{\mathbb{R}^2} nF_n(x-z)\frac{1}{[nt]}dz = \text{const}\frac{1}{[nt]} \to 0,\ n \to \infty$. Обозначим $H_t\,(x,y) \overset{\text{df}}{=} \ln\left(1+\frac{t}{\|x-y\|^2}\right)$. Требуется оценить

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} nF_n(z)H_t(x,z)dz = \int\limits_{\mathbb{R}^2} n\int\limits_0^{1/n}\int\limits_{\mathbb{R}^2} G_r(z)H_t(x-y,z)dzdr\mu_n(dy).$$

Для этого проведем при $n > 1/t$ оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} G_r(v)H_t(u,v)dv = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{\|u-v\|\geq\|u\|/2\}}G_r(v)H_t(u,v)dv+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\left\{\|u-v\|<\frac{\|u\|}{2}\right\}}G_r(v)H_t(u,v)dv \leq$$

$$\leq H\Big(\frac{u}{2},0\Big) + G_r\left(\frac{\|u\|}{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{\|h\|<\|u\|/2\}}H_t(h)dh. \tag{14}$$

Неравенство $H\left(\frac{u}{2},0\right) \leq 4H(u,0)$ выполняется, поскольку при $a > 1,\ b > 0$ $\ln(1+ab) \leq a\ln(1+b)$. Последний интеграл в (14) может быть вычислен явно с помощью перехода к полярным координатам:

$$G_r\left(\frac{\|u\|}{2}\right)2\pi\int\limits_0^{\|u\|/2}\rho H_t(\rho u)d\rho = G_r\left(\frac{\|u\|}{2}\right)\pi\frac{\|u\|^2}{4}H_t\left(\frac{u}{2},0\right)+$$

$$+\,G_r\left(\frac{\|u\|}{2}\right)\pi t\ln\left(1+\frac{\|u\|^2}{4t}\right) \leq 4H_t\,(u,0) + G_r\left(\frac{\|u\|}{2}\right)\pi\frac{\|u\|^2}{4}.$$

Здесь использовано элементарное неравенство $a\exp(-a) \leq 1$ (что приводит к $G_r(u)u^2 \leq 1/\pi$) и неравенство $\frac{\ln(1+a)}{a} \leq 1$ при $a > 0$. Остается заметить, что

$$G_r\left(\frac{\|u\|}{2}\right)\frac{\pi\,\|u\|^2}{4} = \left[\exp^{-\|u\|^2/8r}\frac{\|u\|^2}{8r}\right]\exp^{-\|u\|^2/8t} \leq$$

$$\leq 1\cdot 2H_t\left(\frac{u}{\sqrt{8}},0\right) \leq 16H_t(u,0).$$

Здесь использовано неравенство $\forall a > 0\colon\ \exp(-a) \leq 2\ln(1+1/a)$ (при $a \leq 1$ оно очевидно, а при $a > 1$ выполнено $a\exp(-a) \leq 1 \leq 2a\ln(1+1/a)$).

Таким образом, выражение в левой части (14) не превышает $24H_t(u,0)$.

Лемма 3 доказана.

Как упоминалось ранее, $\limsup\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^2} f^{0,1}_{n,R}(x) < +\infty$. С учетом примера 5.2 работы [4] и оценки $\ln(1+1/a) \leq 4\max(1,-\ln a)$ отсюда следует условие равномерной ограниченности норм характеристик $f^{0,1}_n$ (условие 4 теоремы 1).

По теореме Лебега о мажорированной сходимости из леммы 3 следует, что $\limsup\limits_{n\to\infty} f_{n,Q}^{0,\epsilon}(0) \to 0,\ \epsilon \to 0$. Согласно (13), для проверки условия 1 теоремы 1 достаточно следующего результата.

Лемма 4. *Для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$ и любого $\alpha > 0$*

$$f_n^{0,m/n}(0) \to 0, \quad n \to \infty, \qquad \sup_{x\in V_\alpha} f_n^{0,m/n}(x) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $m = 1$ (в общем случае рассуждения полностью аналогичны). Имеем

$$f_n^{0,1/n}(0) = \mathrm{E}\, F_n\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{n}}\right) \le \mathrm{E}\, F_n\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{n}}\right) \mathbf{1}_{\left\{\frac{\|\xi_1\|}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}} + \|F_n\|\, \mathrm{P}\left\{\|\xi_1\| \ge \sqrt[4]{n}\right\}.$$

Выберем такое $n_0 > 0$, что для всех $n > n_0$: $\dfrac{1}{m_n} - r_{m_n} \ge \dfrac{1}{2m_n} \ge \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} + \dfrac{1}{4m_n}$. В таком случае для $n > n_0$, $k \le m_n$, $x < \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$, $y \in B\left(\dfrac{1}{k}, r_k\right)$: $\|x - y\| \ge \dfrac{1}{4m_n}$. Из этого следует оценка

$$\mathrm{E}\, F_n\left(\frac{\|\xi_1\|}{\sqrt{n}}\right) \mathbf{1}_{\left\{\frac{\xi}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m_n} Q_k \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_0^{1/n} \int\limits_{\mathbb{R}^2} G_r(x-y) p_{1/n}(x)\, dx\, d\sigma_k(y)\, dr \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m_n} Q_k \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int\limits_0^{1/n} G_r\left(\frac{1}{4m_n}\right) dr \le \sum_{k=1}^{m_n} Q_k \frac{32 m_n^2}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для доказательства второго предельного соотношения леммы применим аналогичные оценки:

$$\sup_{x\in V_\alpha} \mathrm{E}\, F_n\left(x + \frac{\|\xi_1\|}{\sqrt{n}}\right) \le \sup_{y \in V_{\frac{\alpha}{2}}} F_n(y) + \|F_n\|\, \mathrm{P}\left\{\|\xi_1\| \ge \frac{\sqrt{n}\alpha}{2}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Проверим условие 3, а именно, докажем равномерную по $t \in [0, T]$ и $x \in \in V_\alpha$ сходимость $f_n^{0,t}$ к $f^{0,t}$. Для этого достаточно показать равномерную по $\mathbb{R}^2$ сходимость $f_n^{\epsilon,t}$ к $f^{\epsilon,t}$ и установить, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in V_\alpha} f_n^{0,\epsilon}(x) \to 0,\ \epsilon \to 0$.

Из леммы 4 и (13) следует $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in V_\alpha} f_{n,R}^{0,\epsilon}(x) \to 0,\ \epsilon \to 0$. Докажем, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in V_\alpha} f_{n,Q}^{0,\epsilon}(x) \to 0,\ \epsilon \to 0$. Пусть $n_0(\alpha) = [4/\alpha] + 1$, $x \in V_\alpha$, тогда, используя лемму 3, имеем

$$f_{n,Q}^{0,\epsilon}(x) \le A \sum_{k=1}^{n_0(\alpha)} Q_k \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{\epsilon}{\|x-y\|^2}\right) d\sigma_k(y) +$$

$$+ A \ln\left(1 + \frac{4\epsilon}{\alpha^2}\right) \mu_n(\mathbb{R}^2) + \frac{B}{[n\epsilon]}.$$

Оба последних слагаемых стремятся к нулю равномерно по $x \in V_\alpha$ при $n \to \infty$, $\epsilon \to 0$. Первая сумма в последнем выражении стремится к нулю равномерно по $x \in \mathbb{R}^2$ при $\epsilon \to 0$. Это следует из оценки

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \ln\left(1 + \frac{\epsilon}{\|x-y\|^2}\right) d\sigma_k(y) \le$$

$$\le \int\limits_0^{2\pi} r_k \ln\left(1 + \frac{\epsilon}{2r_k^2(1-\cos\phi)}\right) d\phi \to 0, \quad \epsilon \to 0,$$

и теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

Доказательство равномерной сходимости $f_n^{\epsilon,t}$ к $f^{\epsilon,t}$ получаем, используя локальную предельную теорему при $\epsilon > 1/n$:

$$\left|\sum_{i=[n\epsilon]}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^2} F_n(x-z)P_{n,i/n}(dz) - \sum_{i=n\epsilon}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f^{0,1/n}(x-z)p_{i/n}(z)dz\right| \le$$

$$\le f_{n,R}^{\epsilon,1}(x) + \sup_{t\in[\epsilon,1], z\in\mathbb{R}} \left|q_{n,i/n}(z) - p_{i/n}(z)\right| n \int\limits_{\mathbb{R}^2} F_n(x)dx +$$

$$+ \sum_{k=m_n+1}^{\infty} Q_k \int\limits_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{1/n} p_{i/n}(z) G_r(y-x-z) dr \sigma_k(dy) dz \le$$

$$\le n \int\limits_0^{1/n} \int\limits_{\mathbb{R}^2} 1 \cdot \mu_n(dy) dt \sup_{i\in[n\epsilon,n], z\in\mathbb{R}} \left|q_{n,i/n}(z) - p_{i/n}(z)\right| +$$

$$+ \sum_{k=m_n+1}^{\infty} Q_k \int\limits_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{1/n} p_{r+i/n}(y-x) dr \sigma_k(dy) + D\left[n^{-1/7} \frac{\exp\{-n\rho\epsilon\}}{1-\exp(-\rho)}\right] \le$$

$$\le \frac{\pi}{2} \sup_{i\in[n\epsilon,n], z\in\mathbb{R}} \left|q_{n,i/n}(z) - p_{i/n}(z)\right| +$$

$$+ \sum_{k=m_n+1}^{\infty} Q_k \sum_{i=[n\epsilon]}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot i/n}} + o(1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Здесь использовано свойство свертки нормальных плотностей: $\int_{\mathbb{R}^2} p_a(u-t)p_b(t)dt = p_{a+b}(u)$. Легко проверить, что суммы $\sum_{i=n\epsilon}^{n} \int_{\mathbb{R}^2} f^{0,1/n}(x-z)p_{i/n}(z)dz = f^{[n\epsilon]/n,1+1/n}(x)$ сходятся к $f^{\epsilon,1}(x)$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^2$.

Для завершения доказательства осталось проверить справедливость условия 2. Легко получить следующую оценку при фиксированных ϵ, α:

$$\varkappa_n \le \sup_{x\in\mathbb{R}^2} F_n(x) \limsup_{n\to\infty} f_n^{0,2\epsilon}(0) + \sup_{x\in V_\alpha} F_n(x) \sup_n \|f_n\|_n +$$

$$+ \|f_n\|_n \left(\|f_n\|_n + \sup_{x\in\mathbb{R}^2} F_n(x) \right) \cdot \mathrm{P}\left\{\exists k\colon \epsilon n \le k \le n,\ X_n(t_{n,k}) \notin V_\alpha\right\}. \qquad (15)$$

Здесь использованы уже проверенные условия ограниченности норм характеристик f_n и оценка $\mathrm{E}\left[\phi_n^{0,1}\right]^2$, которая аналогична оценке (8). Первое слагаемое стремится к нулю при $\epsilon \to 0$ в силу выполнения условия 1 теоремы 1, второе — за счет доказанного свойства $\sup\limits_{V_\alpha} f^{0,\epsilon}(\cdot) \to 0,\ \epsilon \to 0$. Наконец, вследствие того, что X_n сходятся по распределению в $C[0,1]$ к X, вероятность в (15) сходится к $\mathrm{P}\left\{\exists t \in [\epsilon,1]\colon X(t) \notin V_\alpha\right\}$ при $n \to \infty$. Последнее выражение стремится к нулю при $\alpha \to 0$ в силу непрерывности винеровского процесса на плоскости и того, что $\mathrm{P}\left\{\inf\limits_{t\in[\epsilon,1]} \|W(t)\|_{\mathbb{R}^2} > 0\right\} = 1$ и $\mathrm{P}\left\{\sup\limits_{t\in[\epsilon,1]} \|W(t)\|_{\mathbb{R}^2} < +\infty\right\} = 1$.

Утверждение доказано.

1. *Kartashov Yu. N., Kulik A. M.* Invariance principle for additive functionals of Markov chains // (arXiv:0704.0508v1), 2007.
2. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 860 с.
3. *Кулик А. М.* Різницева апроксимація локальних часів багатовимірних дифузій // Теор. ймовірностей і мат. статистика. – 2008. – **78**. – С. 86 – 102.
4. *Kulik A. M.* Markov approximation of stable processes by random walks // Theory Stochast. Proccess. – 2006. – **12**(**28**), № 1-2. – С. 87 – 93.
5. *Kulik A. M.* A limit theorem for the number of sign changes for a sequence of one-dimensional diffusions // Ibid. – 2008. –**14**(**30**), № 2. – С. 79 – 92.
6. *Doob J. L.* Classical potential theory and its probabilistic counterpart. – New York LLC: Springer, 2001. – 846 p.
7. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
8. *Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А.* Теоремы и задачи о процессах Маркова. – М.: Наука, 1967. – 352 с.
9. *Kulik A.M.* Malliavin calculus for difference approximations of multidimensional diffusions: truncated local limit theorem // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 3. – С. 340 – 381.

Получено 09.02.09