УДК 512.53

**В. О. Пєхтєрєв** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

# БУДОВА НАПІВГРУПИ $OT_n$

We study the structure of the semigroup $OT_n$ which is a unique (up to the isomorphism) $\mathcal{R}$-cross-section of the semigroup $T_n$. For the considered semigroup, we obtain Green relations, determine regular and nilpotent elements, describe maximal nilpotent subsemigroups, and establish the unique irreducible generating system and maximal subsemigroups.

Изучается строение полугруппы $OT_n$, являющейся единственным (с точностью до изоморфизма) $\mathcal{R}$-сечением полугруппы $T_n$. Для этой полугруппы описаны отношения Грина, найдены регулярные и нильпотентные элементы. Описаны максимальные нильпотентные подполугруппы. Найдены единственная неприводимая система образующих и максимальные подполугруппы.

**1. Вступ.** Позначимо через $N$ множину $\{1, \ldots, n\}$. На блоках кожного диз'юнктного розбиття $N = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} A_i$ множини $N$ на $k$ непорожніх блоків визначимо лінійний порядок за правилом $A_i \prec A_j$, якщо $\min(A_i) < \min(A_j)$, де $\min(A_i)$ позначає найменший елемент множини $A_i$ відносно природного лінійного порядку на множині $N$. Напівгрупа $OT_n$ визначається за таким правилом: для кожного розбиття $N = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} A_i$, де $A_1 \prec A_2 \prec \ldots \prec A_k$, вона містить елемент $a$, котрий діє так: $a(A_i) = i$ для кожного $i = 1, \ldots, k$. В роботі [1] показано, що $OT_n$ є $\mathcal{R}$-зрізом напівгрупи $T_n$, тобто містить рівно по одному елементу з кожного $\mathcal{R}$-класу $T_n$, а також доведено, що всі $\mathcal{R}$-зрізи напівгрупи $T_n$ можна отримати з $OT_n$ за допомогою спряження, тобто вони мають вигляд $\pi^{-1} OT_n \pi$ для деякої підстановки $\pi$ симетричної групи $S_n$.

Дану роботу присвячено вивченню основних властивостей цієї напівгрупи. Іншими словами, для напівгрупи $OT_n$ описано відношення Гріна та підраховано кількість класів для кожного відношення. Знайдено регулярні елементи, ідемпотенти та підраховано їх кількість. Описано нільелементи та максимальні нільпотентні піднапівгрупи для кожного можливого класу нільпотентності. Знайдено незвідну систему твірних та максимальні піднапівгрупи даної напівгрупи.

У роботі будемо дотримуватись стандартних позначень (див. [2]). Для кожного $a \in OT_n$ символами $\operatorname{im}(a)$ та $\rho_a$ будемо позначати відповідно образ елемента $a$ та відношення еквівалентності на множині $N$, яке визначається за правилом $i \rho_a j$ тоді і тільки тоді, коли $a(i) = a(j)$. Очевидно, що для довільних елементів $a, b \in OT_n$ $\rho_a = \rho_b$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$. Число $\operatorname{rk}(a) = |\operatorname{im}(a)|$ називається рангом перетворення $a$. Через 0 будемо позначати єдине перетворення множини $N$, ранг якого дорівнює одиниці і яке є нулем напівгрупи $OT_n$. Через $e$ будемо позначати тотожне перетворення множини $N$ — одиницю даної напівгрупи. Легко бачити, що потужність напівгрупи $OT_n$ збігається з кількістю диз'юнктних розбиттів множини $N$ на непорожні блоки і дорівнює числу Бела $B_n$.

**2. Ідеали та відношення Гріна.** Оскільки при переході до піднапівгрупи класи Гріна можуть лише подрібнюватись, то $\mathcal{R}$-відношення Гріна на напівгрупі $OT_n$ збігається з відношенням рівності $\mathcal{I}$, бо ця напівгрупа містить рівно по одному елементу з кожного $\mathcal{R}$-класу напівгрупи $T_n$.

Нехай $a$ — елемент напівгрупи $OT_n$ рангу $k$. Тоді $\operatorname{im}(a) = \{1, \ldots, k\}$. Позначимо через $a_i$ найменший елемент множини $a^{-1}(i)$ для кожного $i = 1, \ldots, k$. Очевидно, що $a_i \geq i$ для всіх $i = 1, \ldots, n$.

**Лема 1.** *Нехай $a$ — елемент напівгрупи $OT_n$ рангу $k$. Елемент $b$ напівгрупи $OT_n$ рангу $l \leq k$ належить множині $OT_n a$ тоді і тільки тоді, коли існує ін'єктивне монотонне перетворення $\gamma: \{1, \ldots, a_l\} \to N$, для якого виконуються рівності $b(\gamma(i)) = a(i)$ для кожного $i = 1, \ldots, a_l$ та $\gamma(a_i) = b_i$ для кожного $i = 1, \ldots, l$, де $b_i$ — найменший елемент множини $b^{-1}(i)$ для всіх $i = 1, \ldots, l$.*

***Доведення.*** *Необхідність.* Нехай $b \in OT_n a$. Тоді існує такий елемент $c$ напівгрупи $OT_n$, що $b = ca$. Без порушення загальності можна вважати, що $\operatorname{rk}(c) = a_l$. Позначимо через $c_i$ найменший елемент множини $c^{-1}(i)$ для кожного $i = 1, \ldots, a_l$. Покладемо $\gamma(i) := c_i$ для всіх $i = 1, \ldots, a_l$. Тоді, оскільки $c \in OT_n$, $\gamma$ — монотонна ін'єкція. Далі для кожного $i = 1, \ldots, a_l$

$$b(\gamma(i)) = (ca)(\gamma(i)) = a(c(\gamma(i))) = a(c(c_i)) = a(i).$$

Нехай тепер $\gamma(a_i) = p_i$ для кожного $i = 1, \ldots, l$. Тоді

$$b(p_i) = b(\gamma(a_i)) = (ca)(\gamma(a_i)) =$$

$$= a(c(\gamma(a_i))) = a(c(c_{a_i})) = a(a_i) = i.$$

Більш того, для довільного $j \in b^{-1}(i)$ маємо $a(c(j)) = i$, бо $b = ca$. Звідси $a_i \leq c(j)$ та $\gamma(a_i) \leq \gamma(c(j))$. Позаяк $\gamma(c(j)) \leq j$, то $p_i \leq j$, тобто $p_i$ — найменший елемент множини $b^{-1}(i)$, а тому $p_i = b_i$. Звідси остаточно маємо $\gamma(a_i) = b_i$ для кожного $i = 1, \ldots, l$.

*Достатність.* Нехай $\gamma$ — перетворення, для якого виконуються всі умови леми. Покладемо

$$c(i) = \begin{cases} \gamma^{-1}(i), & \text{якщо } x \in \operatorname{im}(\gamma), \\ a_j, & \text{якщо } x \notin \operatorname{im}(\gamma) \text{ та } b(i) = j, \end{cases}$$

для кожного $i \in N$. Покажемо спочатку, що $ca = b$, тобто $(ca)(i) = b(i)$ для кожного $i \in N$. Можливі два випадки:

1) $i \in \operatorname{im}(\gamma)$, тоді $(ca)(i) = a(c(i)) = a(\gamma^{-1}(i)) = b(\gamma(\gamma^{-1}(i))) = b(i)$;

2) $i \notin \operatorname{im}(\gamma)$ та $b(i) = j$, тоді $(ca)(i) = a(c(i)) = a(a_j) = j = b(i)$.

Тепер залишилось довести, що $c \in OT_n$. Очевидно, що $\operatorname{im}(c) = \{1, \ldots, a_l\}$ і $\gamma(i)$ належить множині $c^{-1}(i)$ для кожного $i = 1, \ldots, a_l$. Більш того, для довільного $x \in c^{-1}(i) \setminus \{\gamma(i)\}$ $x \notin \operatorname{im}(\gamma)$. Тому $i = a_j$ для деякого $j = 1, \ldots, l$, а також $b(x) = j$, звідки $x > b_j$. Оскільки $b_j = \gamma(a_j) = \gamma(i)$, то $x > \gamma(i)$, а тому $\gamma(i)$ — найменший елемент множини $c^{-1}(i)$ для кожного $i = 1, \ldots, a_l$.

Остаточно для довільних $x < y$ з образу елемента $c$ випливає, що $\gamma(x) < \gamma(y)$, бо $\gamma$ є монотонним. Звідси $\min\left(c^{-1}(x)\right) < \min\left(c^{-1}(y)\right)$, а тому $c \in OT_n$.

Лему доведено.

**Теорема 1.** *Нехай* $a, b \in OT_n$, $\operatorname{rk}(a) = k$, $\operatorname{rk}(b) = m$. $a\mathcal{L}b$ *тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови*: 1) $k = m$; 2) *для кожного* $i = 1, \ldots, k$ *найменші елементи повних прообразів* $a^{-1}(i)$ *та* $b^{-1}(i)$ *збігаються*; 3) *якщо* $a_k$ *— найменший елемент множини* $a^{-1}(k)$, *то* $a(i) = b(i)$ *для всіх* $i = 1, \ldots, a_k$.

***Доведення.*** *Необхідність*. Нехай $a\mathcal{L}b$. Тоді $a \in OT_n b$ та $b \in OT_n a$. Очевидно, що в цьому випадку $\operatorname{rk}(a) = \operatorname{rk}(b) = k$ для деякого натурального $k$. Далі, за попередньою лемою існують такі монотонні ін'єкції $\gamma_1 : \{1, \ldots, a_k\} \to N$ та $\gamma_2 : \{1, \ldots, b_k\} \to N$, що виконуються рівності

$$b(\gamma_1(i)) = a(i) \quad \text{для кожного} \quad i = 1, \ldots, a_k,$$

$$a(\gamma_2(i)) = b(i) \quad \text{для кожного} \quad i = 1, \ldots, b_k,$$

$$\gamma_1(a_i) = b_i \quad \text{та} \quad \gamma_2(b_i) = a_i \quad \text{для кожного} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Звідси $a_i \le b_i$ для кожного $i = 1, \ldots, k$, бо $\gamma_1$ є монотонною. Аналогічно $b_i \le a_i$. Отже, $a_i = b_i$ для кожного $i = 1, \ldots, k$. Зокрема, $a_k = b_k$, а тому $\gamma_1(a_k) = b_k = a_k$. Позаяк $\gamma_1$ монотонна, то $\gamma_1(i) = i$ для кожного $i = 1, \ldots, a_k$. Звідси $a(i) = b(\gamma_1(i)) = b(i)$ для кожного $i = 1, \ldots, a_k$.

*Достатність*. Покладемо $\gamma(j) = j$ для всіх $j = 1, \ldots, a_{\operatorname{rk}(a)}$. Тоді для даного перетворення виконуються всі умови попереднього твердження, а тому $b \in OT_n a$. Аналогічно $a \in OT_n b$, звідки $a\mathcal{L}b$.

З цієї теореми випливає, що $\mathcal{L}$-відношення Гріна на напівгрупі $OT_n$ не збігається з відношенням рівності і не є звуженням цього ж відношення на напівгрупі $T_n$. Тому для відношень Гріна даної напівгрупи мають місце співвідношення $\mathcal{I} = \mathcal{H} = \mathcal{R} \ne \mathcal{L} = \mathcal{D} = \mathcal{J}$. Звідси безпосередньо випливає, що всі підгрупи напівгрупи $OT_n$ є одиничними.

**Теорема 2.** 1. *Кількість* $\mathcal{R}$*-класів напівгрупи* $OT_n$ *дорівнює* $B_n$.

2. *Кількість* $\mathcal{L}$*-класів напівгрупи* $OT_n$ *дорівнює* $\sum_{k=1}^{n-1} B_k$.

***Доведення.*** 1. Випливає з рівності $\mathcal{R} = \mathcal{I}$.

2. Нехай $\rho$ — довільне розбиття множини $\{1, \ldots, k\}$ для деякого $k \le n-1$. Позначимо через $L(\rho)$ $\mathcal{L}$-клас такого елемента $a$ з $OT_n$, що $\rho_a = \rho \bigcup \{k+1, \ldots, n\}$. Припустимо, що $L(\rho_1) = L(\rho_2)$ для деяких розбиттів $\rho_1$, $\rho_2$. Тоді в $\mathcal{L}$-класі існують такі елементи $a, b \in OT_n$, що $\rho_a = \rho_1$ і $\rho_b = \rho_2$. За теоремою 1 $\operatorname{rk}(a) = \operatorname{rk}(b) = l$ для деякого $l \le n$ та $k_1 + 1 = a_l = b_l = k_2 + 1$, де $k_1$, $k_2$ — потужності множин, на яких визначено розбиття $\rho_1$, $\rho_2$ відповідно. Звідси випливає, що $k_1 = k_2 = k$ для деякого $k \le n-1$ і розбиття $\rho_1$, $\rho_2$ одночасно визначені на множині $\{1, \ldots, k\}$. Далі, з рівності $a(j) = b(j)$ для всіх $j = 1, \ldots, k+1$ (теорема 1) випливає, що звуження розбиттів $\rho_a$ і $\rho_b$ на множину $\{1, \ldots, k\}$ є однаковими, а тому однаковими є й початкові розбиття $\rho_1$ та $\rho_2$. Отже, різним розбиттям $\rho$ відповідають різні $\mathcal{L}$-класи $L(\rho)$ напівгрупи $OT_n$. Нехай тепер $a$ — довільний елемент напівгрупи

$OT_n$. Позначимо через $l$ ранг цього елемента. Нехай $\rho$ — звуження розбиття $\rho_a$ на множину $\{1, \ldots, a_l - 1\}$. Тоді за теоремою 1 $a \in L(\rho)$. Таким чином, кожен $\mathcal{L}$-клас напівгрупи $OT_n$ має вигляд $L(\rho)$ для деяких числа $k \leq n-1$ та розбиття $\rho$ множини $\{1, \ldots, k\}$. Тому загальна кількість $\mathcal{L}$-класів напівгрупи $OT_n$ дорівнює $\sum_{k=1}^{n-1} B_k$.

**3. Ідемпотенти, регулярні елементи та піднапівгрупи.** Оскільки напівгрупа $OT_n$ є піднапівгрупою напівгрупи $T_n$, то елемент $a \in OT_n$ буде ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли він діє тотожно па своєму образі.

**Лема 2.** *Для кожного $k \leq n$ напівгрупа $OT_n$ містить $k^{n-k}$ ідемпотентів рангу $k$.*

***Доведення.*** Нехай елемент $a$ напівгрупи $OT_n$ є ідемпотентом рангу $k$. Тоді $\mathrm{im}(a) = \{1, \ldots, k\}$, а тому $a(i) = i$ для всіх $i = 1, \ldots, k$. Більш того, кожен елемент цієї напівгрупи рангу $k$, який задовольняє дані умови, буде ідемпотентом. Отже, загальна кількість таких ідемпотентів дорівнює числу функцій з множини $\{k+1, \ldots, n\}$ у множину $\{1, \ldots, k\}$ і дорівнює $k^{n-k}$.

Лему доведено.

***Наслідок* 1.** *Напівгрупа $OT_n$ містить $\sum_{k=1}^{n} k^{n-k}$ ідемпотентів.*

**Теорема 3.** *Елемент напівгрупи $OT_n$ буде регулярним тоді і тільки тоді, коли він є ідемпотентом.*

***Доведення.*** Оскільки кожен ідемпотент є регулярним елементом довільної напівгрупи, то потрібно довести лише *необхідність*. Нехай $a$ — регулярний елемент. Тоді існує такий елемент $b \in OT_n$, що $a = aba$. З останньої рівності маємо $\rho_a = \rho_{ab}$. Звідси випливає, що $b$ діє ін'єктивно на образі $\mathrm{im}(a) = \{1, \ldots, \mathrm{rk}(a)\}$ елемента $a$. Далі, враховуючи те, що елементи з множини $\mathrm{im}(a)$, очевидно, будуть найменшими у своїх блоках розбиття $\rho_b$, отримуємо, що $b$ діє тотожно на множині $\{1, \ldots, \mathrm{rk}(a)\}$. Тому $a = ab$. Остаточно маємо $a = aba = aa = a^2$, і елемент $a$ є ідемпотентом.

**Теорема 4.** *Максимальна регулярна піднапівгрупа напівгрупи $OT_n$ складається з усіх ідемпотентів даної напівгрупи.*

***Доведення.*** З огляду на попередню теорему досить показати, що множина всіх ідемпотентів є замкненою відносно множення. Справді, нехай $a$, $b \in OT_n$ — ідемпотенти. Тоді $\mathrm{im}(a) = \{1, \ldots, k\}$ та $\mathrm{im}(b) = \{1, \ldots, l\}$, де $1 \leq l$, $k \leq n$, а також $a(i) = i$ для всіх $i = 1, \ldots, k$ та $b(j) = j$ для всіх $j = 1, \ldots, l$. Маємо два випадки. Якщо $k \leq l$, то $ab = a$, а тому елемент $ab$ є ідемпотентом. Якщо ж $k > l$, то $\mathrm{rk}(ab) = l$ і $(ab)(j) = j$ для всіх $j = 1, \ldots, l$. Оскільки в цьому випадку $\mathrm{im}(ab) = \{1, \ldots, l\}$, то елемент $ab$ діє тотожно на своєму образі, а тому є ідемпотентом.

Теорему доведено.

**4. Нільелементи та нільпотентні піднапівгрупи.** Спочатку нагадаємо, що через $a_i$ ми позначаємо найменший елемент множини $a^{-1}(i)$ для кожного $i \in \mathrm{im}(a)$. Далі зауважимо, що кожен елемент напівгрупи $OT_n$ є стискуючим, тобто $a(i) \leq i$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Дійсно, якщо $a(i) = j$, то $j \leq a_j \leq i$.

**Теорема 5.** *Для елемента $a$ напівгрупи $OT_n$ наступні умови є еквівалентними*:

1) *елемент* $a$ *є нільпотентним*;
2) $a(2) = 1$;
3) $a(i) < i$ *для всіх* $i \neq 1$.

***Доведення.*** 1) $\Rightarrow$ 2). Припустимо, що $a(2) \neq 1$, тоді $a(2) = 2$. Звідси випливає, що $a^k(2) = 2$ для всіх $k$, а тому елемент $a$ не є нільпотентним. Отримана суперечність завершує доведення.

2) $\Rightarrow$ 3). Припустимо, що $a(i) = i$ для деякого $i > 1$. Тоді $\mathrm{im}(a) \supset \supset \{1, \ldots, i\}$ та $\{a_1, \ldots, a_i\} \subset \{1, \ldots, i\}$. Звідси $a(j) \leq j$ для всіх $j = 1, \ldots, i$. Зокрема, $a_2 = 2$ і $a(2) = a(a_2) = 2$. Отримана суперечність завершує доведення.

3) $\Rightarrow$ 1). Враховуючи, що кожен елемент напівгрупи $OT_n$ є стискуючим, дана умова гарантує, що $a^{n-1}(i) = 1$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Звідси $\mathrm{im}(a^{n-1}) = = \{1\}$, тобто $a^{n-1} = 0$.

Теорему доведено.

***Наслідок 2.*** *Множина всіх нільелементів із* $OT_n$ *утворює нільпотентну піднапівгрупу порядку* $B_{n-1}$ *і степеня нільпотентності* $n-1$.

***Доведення.*** З п. 3 попередньої теореми випливає, що множина $S$ нільелементів напівгрупи $OT_n$ є замкненою відносно множення, а також виконується рівність $S^{n-1} = \{0\}$. Оскільки степінь нільпотентності елемента $a \in OT_n$, що діє на множині $N$ за правилом $a(1) = 1$ та $a(i) = i - 1$ для всіх $i \neq 1$, дорівнює $n-1$, то степінь нільпотентності піднапівгрупи $S$ також буде $n-1$. Далі за п. 2 попередньої теореми нільпотентними будуть такі і лише такі елементи $a$ напівгрупи $OT_n$, що у їх розбиттях $\rho_a$ елементи 1 та 2 множини $N$ містяться в одному блоці. Кількість таких розбиттів, очевидно, дорівнює кількості диз'юнктних розбиттів $(n-1)$-елементної множини (пару 1 та 2 вважаємо єдиним елементом) на непорожні блоки, тобто $(n-1)$-му числу Бела $B_{n-1}$.

Будемо говорити, що підмножина $A \subset N$ є *відрізком* множини $N$, якщо з того, що $i \in A$, випливає, що $j \in A$ для всіх $j \leq i$.

**Лема 3.** *Повний образ довільного відрізка* $A \subset N$ *при перетворенні* $a \in \in OT_n$ *є відрізком.*

***Доведення.*** Справді, нехай $i \in a(A)$. Для кожного $j \leq i$ $j \in a(N)$ та $a_j \leq a_i$. Позаяк $a_i \in A$, то $a_j \in A$, бо підмножина $A$ є відрізком. Тоді з рівності $a(a_j) = j$ остаточно отримуємо, що $j \in a(A)$.

Лему доведено.

**Лема 4.** *Нехай підмножина* $A \subset N$ *є відрізком множини* $N$ *та* $a, b \in \in OT_n$. *Тоді* $(ab)(A) \subset a(A) \cap b(A)$.

***Доведення.*** Нехай $i \in (ab)(A)$. Тоді існує такий $j \in A$, що $i = b(a(j))$. Тепер з того, що $j \in A$, випливає, що елемент $a(j) \in A$, бо перетворення $a$ є стискуючим, а множина $A$ — відрізком. Звідси $b(a(j)) \in b(A)$, а тому $(ab)(A) \subset b(A)$. Далі, з того, що $a(j) \in a(A)$, перетворення $b$ є стискуючим, а множина $a(A)$ — відрізком (за попередньою лемою), випливає, що $b(a(j)) \in \in a(A)$. Звідси маємо $(ab)(A) \subset a(A)$.

Лему доведено.

**Лема 5.** $(ab)^k(N) \subset a^k(N) \cap b^k(N)$ *для довільних натурального* $k$ *та елементів* $a$, $b$ *напівгрупи* $OT_n$.

***Доведення*** проведемо методом математичної індукції. База (при $k = 1$) випливає з попередньої леми та з того, що множина $N$ є відрізком. Припустимо, що $(ab)^{k-1}(N) \subset a^{k-1}(N) \cap b^{k-1}(N)$. Покладемо $A = (ab)^{k-1}(N)$. Тоді за лемою 3 множина $A$ буде відрізком. Тепер, використовуючи припущення індукції та попередню лему, маємо $(ab)^k(N) = (ab)(A) \subset a(A) \subset a\left(a^{k-1}(N)\right) = a^k(N)$. Аналогічно доводиться, що $(ab)^k(N) = b^k(N)$.

Лему доведено.

Позначимо через $n(a)$ степінь нільпотентності нільпотентного елемента $a$ напівгрупи $OT_n$, тобто таке найменше натуральне $k$, що $a^k = 0$. Тоді має місце наступна лема.

**Лема 6.** $n(ab) \le \max\{n(a), n(b)\}$ *для довільних нільпотентних елементів* $a$, $b$ *напівгрупи* $OT_n$.

***Доведення.*** Нехай $k = \max\{n(a), n(b)\}$. Тоді $a^k = b^k = 0$. Це еквівалентно $a^k(N) = b^k(N) = \{1\}$. За попередньою лемою $(ab)^k(N) \subset a^k(N) \cap \cap\, b^k(N) = \{1\}$, тобто $(ab)^k = 0$. Звідси $n(ab) \le k = \max\{n(a), n(b)\}$.

Лему доведено.

***Наслідок* 3.** *Максимальна нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи* $OT_n$ (*нуль якої збігається з нулем усієї напівгрупи*) *степеня нільпотентності* $k$ *для довільного натурального* $k \le n-1$ *складається з усіх нільелементів* $OT_n$, *степінь нільпотентності яких не перевищує* $k$.

***Доведення.*** Очевидно, що нільпотентна піднапівгрупа напівгрупи $OT_n$ (нуль якої збігається з нулем усієї напівгрупи) степеня нільпотентності $k$ містить лише нільпотентні елементи $OT_n$, степінь нільпотентності яких не перевищує $k$. Для завершення доведення залишилось зауважити, що за попередньою лемою множина усіх таких нільпотентних елементів буде піднапівгрупою напівгрупи $OT_n$.

## 5. Системи твірних та піднапівгрупи.

**Теорема 6.** *Єдиною незвідною системою твірних напівгрупи* $OT_n$ *є множина всіх елементів із* $OT_n$ *рангу* $n-1$, *поповнена одиницею.*

***Доведення.*** Покажемо спочатку, що кожна система твірних напівгрупи $OT_n$ містить одиницю і всі елементи із $OT_n$ рангу $n-1$. Оскільки одиниця напівгрупи $OT_n$ є єдиним елементом рангу $n$ даної напівгрупи, то очевидно, що вона належить до кожної системи твірних цієї напівгрупи. Припустимо тепер, що існують система твірних $S$ та елемент $a$ рангу $n-1$, який не міститься у $S$. Позаяк $S$ — система твірних, то існують такі відмінні від $a$ елементи $b_1, \ldots, b_k$ множини $S$, що $a = b_1 b_2 \ldots b_k$. Без порушення загальності можна вважати, що $b_i \ne e$ для кожного $i = 1, \ldots, k$. Тоді $\mathrm{rk}\,(b_i) = n-1$ для всіх $i = = 1, \ldots, k$, а тому $\mathrm{rk}\,(b_1) = \mathrm{rk}\,(a) = \mathrm{rk}\,(b_1 b_2 \ldots b_k)$. Звідси $\rho_{b_1} = \rho_{b_1 b_2 \ldots b_k}$, а тому $b_1 = b_1 b_2 \ldots b_k = a$. Це суперечить початковому припущенню. Тепер доведемо, що множина всіх елементів із $OT_n$ рангу $n-1$, поповнена одиницею, є системою твірних напівгрупи $OT_n$. Нехай $T$ — піднапівгрупа $OT_n$, породжена всіма елементами із $OT_n$ рангу $n-1$ та одиницею. Скористаємось індукцією і доведемо, що якщо $T$ містить усі елементи із $OT_n$, ранг яких не менший за $k$, то вона містить й усі елементи рангу $k-1$. Нехай $a$ — деякий елемент із $OT_n$ рангу $k-1$, тоді існує принаймні один блок $A$ розбиття $\rho_a$, який містить більше одного елемента. Ущільнимо розбиття $\rho_a$, розбивши блок $A$ на два блоки $B_1$ і $B_2$, до розбиття $\rho'$. Позначимо через $b$ такий елемент напівгрупи $OT_n$, що $\rho_b = \rho'$. Зрозуміло, що $\mathrm{rk}\,(b) = \mathrm{rk}\,(a) + 1 = k$, а тому за припущенням індукції $b \in T$. Нехай тепер $c$ — такий елемент із $OT_n$ рангу $n-1$, що його розбиття $\rho_c$ містить один двоелементний блок $\{b(B_1), b(B_2)\}$, а решта блоків є одноелементними. Очевидно, що в цьому випадку $\rho_{bc} = \rho_a$, а тому $a = bc$. Позаяк $c \in T$, то $a \in T$. Тепер, оскільки $T$ містить усі елементи із $OT_n$ рангу $n-1$ та одиницю, база індукції (при $k = n-1$) є очевидною, а тому напівгрупа $T$ збігається з усією напівгрупою $OT_n$.

Поєднуючи два попередні міркування, остаточно отримуємо, що єдиною незвідною системою твірних напівгрупи $OT_n$ є множина всіх елементів із $OT_n$ рангу $n-1$, поповнена одиницею.

Теорему доведено.

***Наслідок* 4.** *Кожна максимальна піднапівгрупа напівгрупи $OT_n$ має вигляд $OT_n \setminus \{a\}$, де $a$ — деякий елемент єдиної незвідної системи твірних цієї напівгрупи.*

***Доведення.*** Нехай $S$ — єдина незвідна система твірних напівгрупи $OT_n$, а $T$ — деяка максимальна піднапівгрупа даної напівгрупи. Тоді з того, що $S \not\subset T$, випливає, що множина $OT_n \setminus T$ містить принаймні один елемент системи твірних $S$. Позначимо цей елемент через $a$ і припустимо, що у множині $OT_n \setminus T$ міститься ще деякий, відмінний від $a$, елемент $b$. Тоді напівгрупа $T'$, породжена множиною $T \cup \{b\}$, з одного боку, строго містить напівгрупу $T$ (бо елемент $b$ не належить до $T$), а з іншого — не містить множину $S$ (оскільки множина $T \cup \{b\}$ не містить елемент $a$). Тому за попередньою теоремою ця множина не є системою твірних напівгрупи $OT_n$. Звідси безпосередньо випливає, що піднапівгрупа $T'$ не збігається з усією напівгрупою $OT_n$, а це суперечить максимальності піднапівгрупи $T$. Отже, наше припущення є хибним і має місце рівність $OT_n \setminus T = \{a\}$. Звідси $T = OT_n \setminus \{a\}$. Для завершення доведення досить зауважити, що кожна множина вигляду $OT_n \setminus \{a\}$, де $a$ — деякий елемент єдиної незвідної системи твірних напівгрупи $OT_n$, справді, є максимальною піднапівгрупою цієї напівгрупи.

1. *Pyekhtyeryev V.* $\mathcal{H}$-and $\mathcal{R}$-cross-sections of the full finite semigroup $T_n$ // J. Algebra and Discrete Math. – 2003. – № **3**. – P. 82 – 88.
2. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с.

Одержано 12.03.08