УДК 519. 6

Б. М. Подлевський (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ВАРІАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

In the real Hilbert space, a variational problem on the minimum of some functional is put in the correspondence to a multiparameter spectral problem. The equivalence of spectral and variational problems is established. On the basis of gradient procedure, a numerical algorithm of the determination of their eigenvalues and eigenvectors is offered. The local convergence of the algorithm is proved.

Многопараметрической спектральной задаче в действительном евклидовом пространстве ставится в соответствие вариационная задача на минимум некоторого функционала. Установлена эквивалентность спектральной и вариационной задач. На основе градиентной процедуры предложен численный алгоритм нахождения ее собственных значений и собственных векторов. Доказана локальная сходимость алгоритма.

1. Вступ. В абстрактній постановці багатопараметричні спектральні задачі записуються у вигляді

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_i x \tag{1}$$

або

$$A_k x_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_{ki} x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

де $\lambda_i \in R^1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — спектральні параметри, а A, B_i, A_k, B_{ki}, $k, i = 1, 2, \ldots, m$, — деякі лінійні оператори, що діють у гільбертових просторах, і є узагальненням класичної однопараметричної задачі $Ax = \lambda x$.

Такі задачі виникають у багатьох областях аналізу й математичної фізики, зокрема при розв'язуванні крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними методом відокремлення змінних.

Класичний приклад — задача про визначення коливань мембрани з закріпленим краєм. У найпростішому випадку прямокутної мембрани відокремлення змінних у декартовій системі координат приводить до двох однопараметричних задач Штурма – Ліувілля, що розділені як відносно незалежних змінних, так і відносно спектральних параметрів [1]. Для круглої мембрани, відокремлюючи змінні у полярній системі координат, отримуємо двопараметричну задачу, в якій одне рівняння є радіальним, що містить два параметри, а інше — кутовим, що містить один параметр. У цьому випадку двопараметричність задачі у деякому розумінні ослаблена і при розв'язуванні легко усувається. Дійсно, беручи до уваги періодичність розв'язку кутового рівняння, визначаємо значення параметра, який входить у це рівняння, і підставляємо знайдені значення у радіальне рівняння. В результаті отримуємо однопараметричні задачі, розв'язок яких приводить до різних функцій Бесселя.

Нетривіальна двопараметрична задача виникає при відокремленні змінних у еліптичних координатах при еліптичній формі мембрани [2]. Вона складається з двох рівнянь Матьє, кожне з яких містить два параметри λ і μ:

$$\begin{gathered} u_1''(\xi) + (\lambda \operatorname{ch} 2\xi - \mu) u_1(\xi) = 0, \\ u_2''(\eta) - (\lambda \cos 2\eta - \mu) u_2(\eta) = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

де $\xi \in [0, \Gamma]$, Γ визначається розмірами мембрани, $\eta \in [0, 2\pi]$.

Можна навести інші задачі, розв'язування яких приводить до необхідності досліджувати зв'язані системи рівнянь для звичайних лінійних диференціальних рівнянь вигляду (3), які містять два, три і більше параметрів.

Двопараметрична спектральна задача для системи (3) є частковим випадком більш загальної n-параметричної задачі (див., наприклад, [3 – 7])

$$\frac{d^2 y_i(x_i)}{dx_i^2} + q_i(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_i p_{ij}(x_i)\, y_i(x_i) = 0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} y_i(a_i)\cos\alpha_i - y_i'(a_i)\sin\alpha_i &= 0, \\ & \qquad i = 1, \ldots, n, \\ y_i(b_i)\cos\beta_i - y_i'(\beta_i)\sin\beta_i &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

де $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, n$, $p_{ij}(x_i)$, $q_i(x_i)$, $i, j = 1, \ldots, n$, — відомі неперервні дійснозначні функції на $[a_i, b_i]$, $\alpha_i \in [0, \pi)$, $\beta_i \in (0, \pi]$, $i = 1, \ldots, n$, — фіксовані числа. При цьому у більшості досліджень припускається, що $\Delta(x) \equiv$ $\equiv \det \| p_{ij}(x_i) \|_{i,j=1}^{n} > 0$ при $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K_n \equiv \bigoplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$.

Вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$ називається власним значенням задачі (4), (5), якщо існують нетривіальні розв'язки $y_i(x_i, \lambda)$ кожного з рівнянь (4), що задовольняють граничні умови (5).

У 60-х роках минулого століття в основному у зв'язку з роботами Ф. В. Аткінсона [4, 5] почався новий етап у розвитку багатопараметричних спектральних задач. Інтенсивні дослідження проводились як для задач вигляду (4), (5), так і для лінійних багатопараметричних задач в абстрактній постановці (2).

На даний час є ще багато відкритих питань, пов'язаних з цією проблемою, таких, наприклад, як існування та кратність розв'язків, а також розробка ефективних чисельних методів для розв'язування актуальних проблем для диференціальних та інтегральних рівнянь.

Огляд відомих теоретичних результатів і найбільш повний список літератури наведено в роботах [5, 6]. У роботі [8] описано застосування багатьох стандартних методів, призначених для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь, до розв'язування двопараметричної задачі на власні значення. У цьому напрямку для багатопараметричної спектральної задачі відмітимо також роботи [9, 10].

Важливою особливістю розглянутих задач є те, що число спектральних параметрів у них збігається з числом рівнянь у системах. Це забезпечує деяку „правильність" постановки задачі, дає можливість добитися дискретності спектра. Однак на практиці виникають крайові багатопараметричні задачі і для одного рівняння вигляду (1) (див., наприклад, [11, 12]). Так, задача, у якій однорідний вертикальний стрижень піддається впливу вертикального навантаження, приводить до спектральної задачі, яка описується диференціальним рівнянням четвертого порядку

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2\lambda \frac{d^2 y}{dx^2} - \mu y = 0 \tag{6}$$

з відповідними крайовими умовами.

Для розв'язування рівняння (6) видається доцільним замінити диференціальне рівняння скінченно-різницевою апроксимацією і отримати матричну задачу

$$Ay = \lambda B_1 y + \mu B_2 y. \tag{7}$$

Рівняння (7) — спеціальний (частковий) випадок узагальненого класу задач (1), які будуть розглядатися далі.

Зауважимо, що проблема побудови чисельних методів розв'язування багатопараметричної спектральної задачі, як і класичної задачі на власні значення, розбивається на дві: насамперед потрібно звести нескінченновимірну задачу до скінченновимірної, а потім побудувати метод розв'язування отриманої алгебраїчної задачі на власні значення. У цій роботі розглядається тільки другий етап.

2. Постановка задачі. Узагальнені власне значення та власний вектор лінійної багатопараметричної спектральної задачі. Нехай $H = E^n$ — дійсний евклідів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$ відповідно, а $A,\ B_i:\ H \to H$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — квадратні матриці розмірності $n \times n$. Багатопараметрична лінійна задача на власні значення полягає у знаходженні такого набору спектральних параметрів $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in R^m$, при якому існує нетривіальний розв'язок $x \neq 0$ рівняння (1).

Такий набір спектральних параметрів λ назвемо узагальненим власним значенням або власним набором, а розв'язок x — узагальненим власним вектором задачі (1). Множина усіх таких наборів $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ у m-вимірному векторному просторі R^m називається „власною поверхнею", а для $m = 2$ — власною кривою. Для $m = 1$ отримуємо класичну задачу на власні значення вигляду

$$Ax = \lambda B_1 x.$$

Зауважимо, що двопараметричну задачу (7) можна подати у вигляді

$$(A - \mu B_2)\, x = \lambda B_1 x. \tag{8}$$

Тоді для різних значень μ може не існувати розв'язку λ. Але якщо B_1^{-1} існує, то для будь-якого μ отримуємо стандартну задачу $B_1^{-1}(A - \mu B_2)x = \lambda x$ і існує розв'язок λ (можливо комплексний). Якщо A, B_1, B_2 будуть матрицями непарного порядку, то існує дійсний розв'язок $\lambda_1(\mu)$ для будь-якого μ. Якщо ж $A,\ B_1,\ B_2$ симетричні і B_1 додатно означена, то всі розв'язки є дійсними. В останніх двох випадках можливий континуум розв'язків, які параметризуються через μ.

Отже, у деяких практичних проблемах, де виникає задача (7) і існує континуум розв'язків, її можна зводити до послідовного розв'язування (8), задаючи значення μ.

У випадку, коли рівняння (7) має скінченне число власних значень, чисельне розв'язування рівняння (7) способом, коли надається значення μ і розв'язується однопараметрична задача (8), не можете бути ефективним. Замість цього, беручи (λ, μ) як вектор, доцільно виконувати ітерації за обома змінними одночасно. Далі буде запропоновано і обґрунтовано такий метод.

3. Власні вектори як точки мінімуму. Поряд з задачею (1) розглянемо задачу знаходження такого набору параметрів $\lambda(x) = \{\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)\}$ і таких векторів x, на яких функціонал

$$F(x) = \frac{1}{2}\left\| Ax - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\, B_i x \right\|^2 \qquad \forall\, x \in H \backslash \{0\} \tag{9}$$

набуває мінімального значення, тобто

$$F(x) \to \min_{x \in U}, \quad x \in U \subset H = E^n, \tag{10}$$

де U — деяка опукла множина.

Доведемо еквівалентність задач (1) та (10).

Нехай $T_\lambda x = Ax - \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) B_i x$, так що $F(x) = \dfrac{1}{2}\| T_\lambda x \|^2$. Розглянемо приріст функціонала $F(x+h) - F(x)$ для довільних x, $x + h \in U$, де U — деяка опукла множина з H. Після нескладних перетворень отримуємо

$$F(x+h) - F(x) = \left(T_\lambda x, \left[T_\lambda h - \sum_{i=1}^m d\lambda_i(x, h) B_i x\right]\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{(T_\lambda h, T_\lambda h) - 2\left(\sum_{i=1}^m d\lambda_i(x, h) B_i x, T_\lambda h\right) - 2\left(T_\lambda x, \sum_{i=1}^m d\lambda_i(x, h) B_i h\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{i=1}^m d\lambda_i(x, h) B_i x, \sum_{i=1}^m d\lambda_i(x, h) B_i x\right)\right\} + o\left(\| h \|^2\right). \tag{11}$$

Отже, диференціал від $F(x)$ запишемо у вигляді

$$dF(x, h) = \left(T_\lambda x, \left[T_\lambda h - \sum_{i=1}^m d\lambda_i(x, h) B_i x\right]\right) =$$
$$= (T_\lambda x, T_\lambda h) - \left(T_\lambda x, \sum_{i=1}^m d\lambda_i(x, h) B_i x\right). \tag{12}$$

Другий доданок у (12) будемо розглядати як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно λ

$$(B_i x, T_\lambda x) = \alpha_i x - \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x) \lambda_j(x) = 0 \tag{13}$$

для визначення $\lambda(x) = \operatorname{col}\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ для будь-якого значення вектора x. Тобто

$$\beta(x) \cdot \lambda(x) = \alpha(x), \tag{14}$$

де

$$\beta(x) = \operatorname{matr}\left\{\beta_{i,j}\right\}_{i,j=1}^m, \quad \beta_{i,j} = (\beta_j x, \beta_i x), \quad i, j = 1, \ldots, m,$$
$$\alpha(x) = \operatorname{col}\{\alpha_i\}_{i=1}^m, \quad \alpha_i(x) = (Ax, B_i x), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Звідси випливає

$$dF(x, h) = (T_\lambda x, T_\lambda h), \tag{15}$$

а тому для градієнта функціонала (9) отримуємо зображення

$$\operatorname{grad} F(x) \equiv \nabla F(x) = T_\lambda^* T_\lambda x. \tag{16}$$

Отже,

$$\left(\nabla F(x), x\right) = 2F(x),$$

так що справджується таке твердження.

Лема 1. *Нехай* $\lambda(x) = \{\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)\}$ *— розв'язок системи рівнянь* (14). *Тоді кожний власний вектор задачі* (1) *є стаціонарною точкою функціонала* (9) *і, навпаки, кожна стаціонарна точка функціонала* (9) *є власним вектором задачі* (1).

Компоненти вектора $\lambda(x) = \operatorname{col}\{\lambda_i\}_{i=1}^m$, який є розв'язком системи (14), можна розглядати як узагальнення відношення Релея, оскільки для $m = 1$ отримуємо класичне відношення Релея.

Далі вважаємо, що для кожного власного вектора x задачі вектори B_1x, $B_2x, \ldots, B_mx$ є лінійно незалежними, і доведемо таке твердження.

Лема 2. *Функціонал* (9) *є двічі неперервно диференційовним на деякій множині* $U \supset N_\lambda$.

Доведення. Згідно з означенням (див., наприклад, [13, c. 88]) із формули (11) для другого диференціала функціонала (9) отримуємо зображення

$$d^2F(x, h) \equiv \big(F''(x)h, h\big) =$$

$$= \left\| T_\lambda h - \sum_{i=1}^m d\lambda_i(x, h) B_i x \right\|^2 - 2\left(T_\lambda x, \sum_{i=1}^m d\lambda_i(x, h) B_i h\right), \tag{17}$$

де

$$d\lambda_i(x, h) = \sum_{j=1}^m \gamma_{ij}\big[(T_\lambda h, B_j x) + (T_\lambda x, B_j h)\big], \quad 1 \le i \le m, \tag{18}$$

а γ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, m$, — елементи оберненої матриці $\beta^{-1}(x)$ системи (14), тобто

$$\beta^{-1}(x) = \operatorname{matr}\{\gamma_{ij}\}_{i,j}^m .$$

Зауважимо, що $\beta^{-1}(x)$ існує, оскільки $\beta(x)$ є неособливою матрицею Грама векторів $\{B_1x, B_2x, \ldots, B_mx\}$.

Тепер покажемо справедливість зображення (18). З (14) маємо

$$d\lambda(x, h) = \beta^{-1}(x)\big[d\alpha(x, h) - d\beta(x, h)\lambda(x)\big]. \tag{19}$$

Не зменшуючи загальності, розглянемо випадок $m = 2$, тоді (19) набере вигляду

$$\begin{pmatrix} d\lambda_1(x, h) \\ d\lambda_2(x, h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} d\alpha_1(x, h) \\ d\alpha_2(x, h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d\beta_{11}(x, h) & d\beta_{12}(x, h) \\ d\beta_{21}(x, h) & d\beta_{22}(x, h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \lambda_2(x) \end{pmatrix}\right],$$

тобто

$$\begin{pmatrix} d\lambda_1(x, h) \\ d\lambda_2(x, h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\alpha_1(x, h) - \lambda_1(x)\,d\beta_{11}(x, h) - \lambda_2(x)\,d\beta_{12}(x, h) \\ d\alpha_2(x, h) - \lambda_1(x)\,d\beta_{21}(x, h) - \lambda_2(x)\,d\beta_{22}(x, h) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Розглянемо першу компоненту вектора у правій частині (20). Оскільки

$$\big(A(x+h), B_1(x+h)\big) - (Ax, B_1x) =$$

$$= (Ax, B_1x) + (Ax, B_1h) + (Ah, B_1x) + (Ah, B_1h) - (Ax, B_1x) =$$

$$= (Ah,\ B_1x) + (Ax,\ B_1h) + o(\|h\|),$$

то

$$d\alpha_1(x,\ h) = (Ah,\ B_1x) + (Ax,\ B_1h).$$

Аналогічно отримуємо

$$d\beta_{11}(x,\ h) = (B_1h,\ B_1x) + (B_1x,\ B_1h),$$

$$d\beta_{12}(x,\ h) = (B_2h,\ B_1x) + (B_2x,\ B_1h).$$

Отже, для першої компоненти вектора у правій частині (20) маємо

$$d\alpha_1(x,\ h) - \lambda_1(x)\,d\beta_{11}(x,\ h) - \lambda_2(x)\,d\beta_{12}(x,\ h) =$$

$$= (Ah,\ B_1x) + (Ax,\ B_1h) - \lambda_1(x)(B_1h,\ B_1x) - \lambda_1(x)(B_1x,\ B_1h) -$$

$$- \lambda_2(x)(B_2h,\ B_1x) - \lambda_2(x)(B_2x,\ B_1h) = (T_\lambda h,\ B_1x) + (T_\lambda x,\ B_1h).$$

Таким чином,

$$d\alpha_1(x,\ h) - \lambda_1(x)\,d\beta_{11}(x,\ h) - \lambda_2(x)\,d\beta_{12}(x,\ h) = (T_\lambda h,\ B_1x) + (T_\lambda x,\ B_1h). \tag{21}$$

Аналогічно отримуємо зображення для другої компоненти:

$$d\alpha_2(x,\ h) - \lambda_1(x)\,d\beta_{21}(x,\ h) - \lambda_2(x)\,d\beta_{22}(x,\ h) = (T_\lambda h,\ B_2x) + (T_\lambda x,\ B_2h). \tag{22}$$

Підставивши тепер (21) та (22) у (20), отримаємо зображення (18) для $m = 2$. Для довільного m міркування аналогічні.

Оскільки $\beta^{-1}(x)$ існує і неперервна для будь-якого власного вектора, тобто для $x \in N_\lambda$, то, оскільки B_i, $i = 1, \ldots, m$, — обмежені оператори, $\beta^{-1}(x)$ існує для всіх x близьких до власного вектора, тобто існує така множина U ($U \supset N_\lambda$), що $\beta^{-1}(x)$ існує і є неперервною для будь-якого $x \in U$. Звідси випливає, що $F''(x)$ є неперервною для будь-якого $x \in U$, тобто функціонал (9) є двічі неперервно диференційовним за Фреше на U.

Лему доведено.

Узагальнене власне значення $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ назвемо простим власним значенням задачі (1), якщо

$$R\left(A - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_i\right) \cap M_\lambda = \{0\},$$

де

$$M_\lambda = \left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i B_i x : \ \alpha_i \in R^1,\ x \in N\left(A - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_i\right)\right\}.$$

Тут $R(T_\lambda)$ та $N(T_\lambda)$ — відповідно область значень та власний підпростір оператора T_λ.

Лема 3. *Нехай* $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ — *просте узагальнене власне значення і* $h \in N_\lambda^\perp$, $x \in N_\lambda$. *Тоді існує константа* c *така, що*

$$(F''(x)\,h,\ h) \geq c\|h\|^2, \tag{23}$$

тобто функціонал (9) *є сильноопуклим.*

Доведення. Оскільки $x \in N_\lambda$, то вираз (17) для другого диференціала функціонала (9) з урахуванням (18) набере вигляду

$$d^2F(x, h) \equiv \big(F''(x)h, h\big) = \left\| T_\lambda h - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}(T_\lambda h, B_j x) B_i x \right\|^2 \geq$$

$$\geq \left\| T_\lambda h - P_{M_\lambda} T_\lambda h \right\|^2 = \left\| (1 - P_{M_\lambda}) T_\lambda h \right\|^2 = \left\| P_{M_\lambda^\perp} T_\lambda h \right\|^2.$$

З огляду на те, що $R(T_\lambda) \cap M_\lambda = \{0\}$, існує $c_1 > 0$ таке, що

$$\left\| P_{M_\lambda^\perp} T_\lambda h \right\|^2 \geq c_1 \| T_\lambda h \|^2,$$

а оскільки $h \in N_\lambda^\perp$, то існує $c_2 > 0$ таке, що

$$\| T_\lambda h \|^2 \geq c_2 \| h \|^2.$$

Отже,

$$\big(F''(x)h, h\big) \geq c \| h \|^2,$$

тобто функціонал $F(x)$ на множині N_λ є сильноопуклим.

Лему доведено.

Тепер на основі лем 1 та 3 справджується таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\lambda(x) = \lambda = \{\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)\}$ — *розв'язок системи рівнянь* (14). *Тоді кожний власний вектор задачі* (1) *є точкою мінімуму функціонала* (9) *і, навпаки, кожна точка мінімуму функціонала* (9) *є власним вектором задачі* (1).

Доведення. З леми 1 випливає, що кожний власний вектор задачі (1) є стаціонарною точкою функціонала (9) і навпаки. Покажемо тепер, що стаціонарна точка є мінімумом функціонала (9). Дійсно, нехай $\lambda^* = \{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*\}$ та x^* — власний набір та власний вектор задачі (1). Тоді $T_{\lambda^*} x^* = 0$ і з формули скінченних приростів для $F(x)$

$$F(x^* + h) - F(x^*) = \big(\nabla F(x^*), h\big) + \frac{1}{2}\big(F''(x^*)h, h\big) + \alpha(h, x),$$

де $\alpha(h, x)/\| h \|^2 \to 0$ при $\| h \| \to 0$, враховуючи рівність $\nabla F(x^*) = 0$ (лема 1) та нерівність (23) (лема 3), отримуємо $F(x^* + h) - F(x^*) \geq 0$, тобто

$$F(x^* + h) \geq F(x^*).$$

Це означає, що x^* є точкою мінімуму функціонала $F(x)$.

Теорему доведено.

Таким чином, розв'язування задачі (1) еквівалентне знаходженню стаціонарних точок функціонала (9), які є його точками мінімуму.

4. Чисельний алгоритм. Одержаний результат дозволяє побудувати градієнтну процедуру як метод чисельного розв'язування задачі (1), коли при фіксованому значенні вектора x_k відповідне значення $\lambda^k = \lambda(x_k)$ шукається як розв'язок системи (14), а наступне наближення до власного вектора — у вигляді

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{24}$$

Тут константа $\gamma_k \equiv \gamma(x_k)$ на кожному кроці визначається з умови мінімуму функціонала (9) у напрямку (24). Таким чином, з необхідної умови мінімуму функціонала $\dfrac{\partial F}{\partial \gamma} = 0$ знаходимо

$$\gamma(x_k) = \frac{\big(\nabla F(x_k), \nabla F(x_k)\big)}{\big(T_\lambda \nabla F(x_k), T_\lambda \nabla F(x_k)\big)} = \frac{\|\nabla F(x_k)\|^2}{\|T_\lambda \nabla F(x_k)\|^2}.$$

Отже, ітераційний процес реалізується за допомогою формул

$$y_{k+1} = x_k - \gamma(x_k) \nabla F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

$$x_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}, \tag{26}$$

$$\gamma(x_k) = \begin{cases} \dfrac{\|\nabla F(x_k)\|^2}{\|T_\lambda \nabla F(x_k)\|^2}, & \text{якщо } \nabla F(x_k) \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } \nabla F(x_k) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

тобто розв'язок шукається у класі нормованих векторів.

При виборі початкового наближення, в певному сенсі близького до власного вектора, ітераційний процес (25) – (27) збігається до стаціонарних точок функціонала (9), в яких досягається його мінімум, тобто до власного вектора x^* задачі (1), а власне значення $\lambda(x)$ знаходиться однозначно із співвідношення (14).

У випадку простого узагальненого власного значення задачі (1) для наведеного вище ітераційного процесу справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ *— просте узагальнене власне значення і* N_λ *— його власний підпростір. Тоді для послідовності* $\{x_k\}$, *отриманої за допомогою співвідношень* (25) – (27), *при будь-якому початковому наближенні* x_0 *з деякого околу* U *власного підпростору* N_λ, *на якому вектори* $B_1 x, \ldots, B_m x$ *є лінійно незалежними, а функціонал* (9) *є сильноопуклим,*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, N_\lambda) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x^*) = 0 .$$

Доведення. За лемою 2 $F''(x)$ є неперервною по x на U, а отже, $F''(x)$ є обмеженою на U, тобто існує $L > 0$ таке, що

$$\|F''(x) h\| \leq L \|h\| \qquad \forall\, x \in U .$$

З цього, зокрема, випливає, що градієнт функціонала $F(x)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\|F'(x) - F'(y)\| \leq L \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in U ,$$

а також справджується нерівність

$$\big| F(x) - F(y) - \big(F'(y), x - y\big) \big| \leq L \|x - y\|^2 / 2 . \tag{28}$$

Далі, якщо для деякого $k \geq 0$ $\nabla F(x_k) = 0$, то із співвідношень (25) – (27)

формально отримуємо

$$x_k = x_{k+1} = \ldots,$$

і твердження теореми справджується. Тому припустимо, що $\nabla F(x_k) \neq 0$ для $k = 0, 1, \ldots$. Оскільки

$$F(x_{k+1}) = F\big(x_k - \gamma_k F'(x_k)\big) = \inf_{\gamma \geq 0}\Big(F\big(x_k - \gamma F'(x_k)\big)\Big) \leq F\big(x_k - \gamma F'(x_k)\big)$$

для будь-якого $\gamma \geq 0$, то

$$F(x_k) - F(x_{k+1}) \geq F(x_k) - F\big(x_k - \gamma F'(x_k)\big).$$

Тепер, враховуючи нерівність (28) для $y = x_k$, $x = x_{k+1} = x_k - \gamma F'(x_k)$, маємо

$$F(x_k) - F(x_{k+1}) \geq \gamma\big(1 - L\gamma/2\big)\| F'(x_k)\|^2$$

для будь-якого γ, $k = 0, 1, \ldots$. Отже,

$$F(x_k) - F(x_{k+1}) \geq \max_{\gamma}\big(\gamma(1 - L\gamma/2)\big) \cdot \| F'(x_k)\|^2 = \frac{1}{2L}\| F'(x_k)\|^2,$$

звідки одержуємо

$$F(x_{k+1}) \leq F(x_k) - \frac{\| F'(x_k)\|^2}{2L},$$

тобто

$$F(x_{k+1}) \leq F(x_k). \tag{29}$$

Підсумовуючи нерівності (29) по k від 0 до $n-1$, отримуємо

$$F(x_n) \leq F(x_0), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

тобто послідовність $\{x_k\}$ належить множині Лебега

$$M(x_0) = \{x \in U : F(x) \leq F(x_0)\},$$

яка, з огляду на сильну опуклість функціонала $F(x)$, є обмеженою, а множина точок мінімуму функціонала $F(x)$ є не порожньою і складається з єдиної точки x^*, до якої збігається послідовність $\{x_k\}$, отримана за допомогою співвідношень (25) – (27) при початковому наближенні $x_0 \in U$ (див. теорему 1 в [13, с. 186]).

Теорему доведено.

Запропонований алгоритм тестувався на прикладах двопараметричних матричних задач [14]. Обчислення проводилися до досягнення точності (наприклад, $\varepsilon = 10^{-6}$) за вектором. Спостерігалася швидка збіжність послідовності до власних векторів для різних початкових наближень (навіть досить далеких від власних векторів).

У запропонованому алгоритмі константа $\gamma_k \equiv \gamma(x_k)$ на кожному кроці визначається з умови мінімуму функціонала у напрямку градієнта. Можливі інші способи вибору величини кроку γ_k, оскільки співвідношеннями типу (24)

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k p_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{30}$$

задається клас методів, які відрізняються вибором напрямку спуску p_k та величиною кроку γ_k.

У роботі [15, с. 253] зазначено, що у випадку, коли деякий функціонал

$g(x): R^n \to R^1$ задовольняє умову $g(x) \ge 0$ для всіх $x \in R^n$, величину γ_k можна обчислювати за допомогою одного кроку за Ньютоном для скалярного рівняння $g(x_k - \gamma_k p_k) = 0$, тобто

$$\gamma_k = g(x_k)/g'(x_k)\, p_k .$$

При $p_k = \nabla g(x_k)^T$ ітераційний процес (30) набирає вигляду

$$x_{k+1} = x_k - \left[g(x_k)\big/\|\nabla g(x_k)\|^2\right]\nabla g(x_k)^T, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Це приводить до градієнтного методу, який досліджувався, зокрема, у роботах [16, 17].

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
2. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951. – Т. 1. – 476 с.
3. *Atkinson F. V.* Multiparameter spectral theory // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, № 1. – P. 1 – 27.
4. *Atkinson F. V.* Multiparameter eigenvalue problems. – New York; London: Acad. Press, 1972. – **1**. – 220 p.
5. *Sleeman B. D.* Multiparameter spectral theory in Hilbert space. – London etc.: Pitman Press, 1978. – 128 p.
6. *Volkmer H.* Multiparameter eigenvalue problems and expansion theorem // Lect. Notes Math. – 1988. – **1336**. – 157 p.
7. *Каленюк П. И.* Многопараметрические спектральные задачи, возникающие при последовательном и обобщенном разделении переменных // Вестн. Львов. политех. ин-та. – 1989. – № 232. – С. 69 – 71.
8. *Fox L., Hayes L., Mayers D. F.* The double eigenvalue problem. Topics in numerical analysis // Proc. Irish Acad. Conf. Numer. Anal. – 1972. – P. 93 – 112.
9. *Абрамов А. А., Ульянова В. И.* Один метод решения самосопряженных многопараметрических спектральных задач для слабо связанных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1997. – **37**, № 5. – С. 566 – 571.
10. *Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф.* Метод решения многопараметрической спектральной задачи для некоторых систем дифференциальных уравнений // Там же. – 2000. – **40**, № 1. – С. 21 – 29.
11. *Collatz L.* Multiparametric eigenvalue problems in inner-product spaces // J. Comput. and Syst. Sci. – 1968. – **2**, № 4. – P. 333 – 341.
12. *Hadeler K. P.* Einige Anwendungen mehrparametriger Eigenweraufgaben // Numer. Math. – 1969. – **13**. – S. 285 – 292.
13. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 520 с.
14. *Подлевський Б. М.* Варіаційний підхід до розв'язування двопараметричних задач на власні значення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 1. – С. 31 – 35.
15. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
16. *Altman M.* Connection between gradient methods and Newton's method for functionals // Bull. Acad. pol.sci. – 1961. – **9**. – P. 745 – 750.
17. *Blum E.K., Curtis A. R.* A convergent gradient method for matrix eigenvector-eigentuple problems // Numer. Math. – 1978. – **31**, № 3. – P. 247 – 263.

Одержано 27.03.08,
після доопрацювання — 28.05.09