УДК 512.715, 512.772.1

Р. В. Скуратовський (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ІДЕАЛИ ОДНОГІЛКОВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ КРИВИХ ТИПУ W

We establish necessary and sufficient conditions for the fact that a one-branched singularity of type W of a plane algebraic curve has as maximum two-parametric families of ideals.

Установлены необходимые и достаточные условия того, что особенность типа W плоской алгебраической кривой с одной ветвью имеет как максимум двупараметрические семейства идеалов.

1. Вступ. Вивчення модулів Коена – Маколея, зокрема ідеалів комутативних кілець розмірності Крулля 1, є класичним напрямком сучасної алгебри, який бере початок від робіт Дедекінда, а в новий час — з теорії цілочислових зображень. Зокрема, в роботах [1, 2] дано критерій того, що локальне комутативне кільце R розмірності Крулля 1 без нільпотентних елементів має скінченну кількість нерозкладних модулів Коена – Маколея. Виявилось також, що лише в цьому випадку воно має скінченну кількість класів ідеалів. У роботі [3] показано, що для особливостей алгебраїчних кривих умови з [2] рівносильні тому, що R *домінує* над однією з *простих плоских особливостей* у розумінні Арнольда [4]. У роботі [5] встановлено, що плоска особливість має лише однопараметричні сім'ї ідеалів тоді і тільки тоді, коли вона є *строго однопараметричною* в розумінні [6] (рівносильно, одно- або двопараметричною в розумінні [4]). Зауважимо, що в цьому випадку будова всіх модулів Коена – Маколея може бути як завгодно складною, оскільки більшість з цих особливостей є *дикими* [7] (дикими є всі, крім особливостей типу T_{pq}). У роботі [8] розглянуто довільні одновимірні особливості й встановлено, що такі особливості мають лише однопараметричні сім'ї ідеалів тоді і лише тоді, коли вони домінують над однією з особливостей, розглянутих Шаппертом.

У даній роботі вивчається питання про те, коли одновимірна особливість має щонайбільше *двопараметричні* сім'ї ідеалів. Оскільки це питання виявилось складним, ми розглядаємо тут лише *одногілкові* особливості (тобто кільця без дільників нуля) типу W й для них встановлюємо критерій двопараметричності ідеалів. Інші особливості буде розглянуто в наступних роботах.

2. Означення і основний результат. Спочатку нагадаємо основні означення і твердження, необхідні для подальшого викладу.

Означення 1. *Одногілковою особливістю типу W будемо називати підкільце $R \subseteq k[t]$ таке, що $k[|t|]$ є скінченнопородженим R-модулем, до того ж $t^4 \in R$. Таку особливість називатимемо плоскою, якщо її розмірність занурення $\dim\left(m/m^2\right) = 2$, де $m = \operatorname{rad} R$ — максимальний ідеал, тобто m має 2 породжуючі елементи.*

Далі R позначає якусь особливість типу W, $m = \operatorname{rad} R$, $S = \operatorname{End}(m)$. Тоді $S \subseteq R$, до того ж якщо $R \neq k[|t|]$, то $S \neq R$ [4].

Нехай l — найменший покажчик, не кратний 4, такий, що R містить елемент $t^l + q(t)$, де $q(t)$ не містить членів степенів менших або рівних l. Відомо (див., наприклад, [8]), що коли R — плоска особливість, то вона збігається з однією з особливостей типу W_{6k}, або $W^{\#}_{2,2q-1}$ за класифікацією Арнольда [4] (гл. 11, § 15).

Означення 2. *Нехай X — деякий (дробовий) S-ідеал. Породжуючим підпростором у S/m-модулі $V = X/mX$ називається такий підпростір W, що $SW = V$.*

Означення 3. *Породжуючі підпростори W_1, W_2 у S-модулі $V = X/mX$ називають еквівалентними тоді і тільки тоді, коли існує обертовий множник $\lambda \in E$, де $E = \mathrm{End}(X)$, такий, що $\lambda W_1 = W_2$.*

Твердження 1. *Нехай X — ідеал кільця S. Тоді існує взаємно однозначна відповідність між класами R-ідеалів I такими, що $SI \simeq X$, і класами еквівалентності породжуючих підпросторів у S/m-модулі $V = X/Xm$.*

Доведення цього твердження наведено, наприклад, у [4]. При цьому ідеалу I відповідає підпростір $W = I/mI \subseteq X/mX = V$, і навпаки, породжуючому підпростору $W \subseteq V$ відповідає ідеал I, який є прообразом W при природній проекції $X \to V$. Зауважимо також, що оскільки $t^4 \in R$, то завжди $1 \leq \dim X/mX \leq 4$.

Для знаходження ідеалів R ми будуємо ланцюг надкілець $R = K_0 \subset K_1 \subset \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n = k[|t|]$, в якому $K_{i+1} = \mathrm{End}(M_i)$, $M_i = \mathrm{rad}\, K_i$. Як було зауважено вище, до тих пір, поки K_i не є цілозамкненим, тобто $K_i \neq k[|t|]$, обов'язково $K_{i+1} \neq K_i$. Тоді, застосовуючи твердження 1, отримуємо ідеали кілець $K_{m-1}, K_{m-2}, \ldots, K_0$.

Твердження 2. *Нехай X — такий ідеал кільця K_{r+1}, що $\dim(X/M_rX) = 4$. Тоді для довільного K_s-ідеалу I, $s \leq r$, такого, що $K_{s+1}I = X$, I є насправді K_r-ідеалом.*

Доведення. Оскільки завжди $\dim X/M_sX \leq 4$, то $M_sX = M_rX$. Тому якщо W — породжуючий підпростір в $X/M_sX = X/M_rX = V$ (над K_{s+1}), то він є й породжуючим підпростором над K_r в X/M_rX, отже, його прообраз (тобто I) є K_r-ідеалом.

Ми також будемо використовувати наступне відоме твердження [2].

Твердження 3. *Якщо $\dim(S/R) = 1$, то будь-який нерозкладний R-модуль без скруту (зокрема, будь-який R-ідеал) або ізоморфний R, або є S-модулем.*

Сформулюємо основний результат статті. Нагадаємо, кажуть, що R домінує над R', якщо $R \supseteq R'$. Зрозуміло, що у цьому випадку кожен R-ідеал є R'-ідеалом.

Теорема 1. *Одногілкова особливість R типу W допускає щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів тоді й лише тоді, коли вона домінує над особливістю типу W_{24}, W_{30}, $W^{\#}_{2,2q-1}$ за класифікацією Арнольда* [4], *тобто у наведених вище позначеннях, $l \leq 11$.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо кільце R не домінує над W_{24}, $W^{\#}_{2,2q-1}$ або W_{30}, то $l \geq 13$, тобто R міститься в кільці $K_0 = k[[t^4, t^8, t^{12}, \ldots]]$ (тут крапки позначають, що всі вищі степені t належать R). Отже, достатньо побудувати трипараметричну сім'ю для кільця K_0. У цьому випадку $K_1 = \mathrm{End}(M_0) = k[[t^4, t^8, \ldots]]$ і $K_2 = \mathrm{End}(M_1) = k[[t^4, \ldots]]$.

Розглянемо K_2-модуль $A_\gamma = \langle 1, t^2 + \gamma t^3 \rangle + M_2$. Це надкільце K_2, тому при різних γ K_2-ідеали A_γ не ізоморфні (бо $\mathrm{End}\, A_\gamma = A_\gamma$), $A_\gamma/M_1A_\gamma = \langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^5, t^7 \rangle$. Легко перевірити, що породжуючі підпростори $W_{\gamma\beta} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3 + \beta t^7 \rangle$ не еквівалентні, тобто визначають не ізоморфні K_1-ідеали $X_{\gamma\beta} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3 + \beta t^7, t^4, t^6 + \gamma t^7, t^8, \ldots \rangle$. Тоді $X_{\gamma\beta}/M_0X_{\gamma\beta} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3 + \beta t^7, t^9, t^{11} \rangle$ і, знову-таки, легко переконатися, що породжуючі підпростори $W_{\gamma\beta\lambda} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3 + \beta t^7 +$

$+ \lambda t^{11}\big\rangle \subseteq X_{\gamma\beta}/M_0 X_{\gamma\beta}$ не еквівалентні. Отже, вони визначають трипараметричну сім'ю ідеалів.

Достатність. Очевидно, досить перевірити, що кільця типу W_{24}, $W^{\#}_{2,2q-1}$, W_{30} мають лише двопараметричні сім'ї ідеалів. Оскільки обчислення в усіх випадках подібні, наведемо їх лише у „найскладнішому" випадку W_{30}, тобто $l = 11$. Це буде зроблено у наступному пункті.

Нехай X — S-ідеал. Виберемо в $V = X/mX$ базу $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \beta_1, \ldots, \beta_l \rangle$ так, що $V \operatorname{rad} S = \big\langle \beta_1, \ldots, \beta_l \big\rangle = X \operatorname{rad} S / X \operatorname{rad} R$.

Означення 4. *Елементи $\beta_1, \ldots, \beta_l$ називатимемо вільними в V, а елементи $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$— обов'язковими. Очевидно, підпростір $W \subseteq V$ є породжуючим тоді і лише тоді, коли його образ в $V/V \operatorname{rad} S$ містить всі обов'язкові елементи.*

3. Ідеали кілець типу $\boldsymbol{W_{30}}$. Нехай R — особливість типу W_{30}, $l = 11$. Тоді ланцюг надкілець K_i, де $K_i = \operatorname{End}(M_i)$, $M_i = \operatorname{rad}(K_i)$, має вигляд

$$K_0 = \big\langle 1, t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{15}, t^{16}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, t^{24}, t^{25}, t^{26}, t^{27}, t^{28}, t^{30}, \ldots \big\rangle,$$

$$K_1 = \big\langle 1, t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{15}, t^{16}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, t^{24}, t^{25}, t^{26}, \ldots \big\rangle,$$

$$K_1 = K_0 + \big\langle \mathbf{t^{29}} \big\rangle,$$

$$K_2 = \big\langle 1, t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{15}, t^{16}, \mathbf{t^{18}}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, \ldots \big\rangle,$$

$$K_2 = K_1 + \big\langle \mathbf{t^{18}}, \mathbf{t^{25}} \big\rangle,$$

$$K_3 = \big\langle 1, t^4, \mathbf{t^7}, t^8, t^{11}, t^{12}, \mathbf{t^{14}}, t^{15}, t^{16}, t^{18}, t^{19}, \ldots \big\rangle,$$

$$K_3 = K_2 + \big\langle \mathbf{t^7}, \mathbf{t^{14}}, \mathbf{t^{21}} \big\rangle,$$

$$K_4 = \big\langle 1, t^4, t^7, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, \mathbf{t^{17}}, t^{18}, t^{19}, \ldots \big\rangle,$$

$$K_4 = K_3 + \big\langle \mathbf{t^{17}} \big\rangle,$$

$$K_5 = \big\langle 1, t^4, t^7, t^8, \mathbf{t^{10}}, t^{11}, t^{12}, \mathbf{t^{13}}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, \ldots \big\rangle,$$

$$K_5 = K_4 + \big\langle \mathbf{t^{10}}, \mathbf{t^{13}} \big\rangle,$$

$$K_6 = \big\langle 1, \mathbf{t^3}, t^4, \mathbf{t^6}, t^7, t^8, \mathbf{t^9}, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, \ldots \big\rangle,$$

$$K_6 = K_5 + \big\langle \mathbf{t^3}, \mathbf{t^6}, \mathbf{t^9} \big\rangle,$$

$$K_7 = \big\langle 1, t^3, t^4, \mathbf{t^5}, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, \ldots \big\rangle,$$

$$K_7 = K_6 + \big\langle \mathbf{t^5} \big\rangle,$$

$$K_8 = \big\langle 1, \mathbf{t}, \mathbf{t^2}, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, \ldots \big\rangle,$$

$$K_8 = K_7 + \big\langle \mathbf{t}, \mathbf{t^2} \big\rangle.$$

Зауважимо, що якщо $F_i = K_i/K_{i-1}$, то $1 \leq \dim F_i \leq 3$ і $\dim F_i \equiv i (\operatorname{mod} 3)$. За твердженням 3, якщо $i \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$, то кожен K_i-ідеал, крім самого K_i, є насправді K_{i+1}-ідеалом, зокрема кожен K_0-ідеал є або K_0-, або K_1-ідеалом. Отже, достатньо обчислити K_1-ідеали.

$K_8 = k[[t]]$, тому єдиний K_8-ідеал (з точністю до ізоморфізму) — це саме K_8.

Знайдемо K_7-ідеали. Маємо $K_8M_7 = M_7$, $K_8/M_7 = \langle 1, t, t^2 \rangle = V$ і тому будь-який підпростір, що містить 1, є породжуючим. Тепер легко знайти всі породжуючі підпростори W для $K_8/M_7 = V$ з точністю до еквівалентності.

1) $W = \langle 1 \rangle$, йому відповідає K_7.

2) $W = \langle 1, t + \gamma t^2 \rangle$. Легко бачити, що $(1 - \gamma t)W = \langle 1, t \rangle$, отже, всі ці підпростори еквівалентні. Тому одержуємо єдиний, з точністю до ізоморфізму, K_7-ідеал $I_1^{7,8} = \langle 1, t \rangle + XM_7$.

3) $W = \langle 1, t^2 \rangle$, отримуємо $I_2^{7,8} = \langle 1, t^2 \rangle + M_7$.

Як було зазначено вище, з $6 \equiv 0 (\operatorname{mod} 3)$ випливає, що кожен K_6-ідеал, крім самого K_6, є насправді K_7-ідеалом.

Знаходимо K_5-ідеали. При цьому для K_6-ідеалів існують 5 можливостей:

1) $X = I_2^{7,8} = \langle 1, t^2 \rangle + M_7$. Тоді $XM_5 = \langle t^4, t^6, \ldots \rangle$, $XM_6 = \langle t^3, \ldots \rangle = M_7$, $X/XM_5 = \langle 1, t^2, t^3, t^5 \rangle$, тому t, t^2 — обов'язкові базисні елементи, а t^3, t^5 — вільні. Породжуючі підпростори:

1.1) $W = \langle 1, t^2 + \gamma t^5, t^3 + \beta t^5 \rangle$. Якщо $\alpha = 1 - \gamma(t^3 + \beta t^5)$, то $\alpha(t^2 + \gamma t^5) \equiv$ $\equiv t^2 \operatorname{mod} XM_5$, $\alpha(t^3 + \beta t^5) \equiv (t^3 + \beta t^5) \operatorname{mod} XM_5$. Звiси $\alpha W = \langle 1, t^2, t^3 + \beta t^5 \rangle$, тобто можна вважати, що $\gamma = 0$. У таких випадках будемо говорити, що параметр γ редукується. Тепер для $\alpha = 1 - \beta t^2$ маємо $\alpha(t^3 + \beta t^5) \equiv t^3 \operatorname{mod} XM_5$, отже, β редукується.

Таким чином, отримуємо єдиний ідеал $I_{1,2}^{5,7,8} = \langle 1, t^2, t^3 \rangle + XM_5$.

1.2) $W = \langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^5 \rangle$. Легко переконатися, що різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, одержимо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{2,2}^{5,7,8} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^5 \rangle + XM_5$.

1.3) $W = \langle 1, t^2 + \gamma t^3 + \beta t^5 \rangle$. Покладаючи $\alpha = 1 - \beta/\gamma(t^2 + \gamma t^3)$, редукуємо β, бо $\alpha(t^2 + \gamma t^3 + \beta t^5) \equiv (t^2 + \gamma t^3) \operatorname{mod} XM_5$. Після цього легко перевірити, що підпростори з різними значеннями γ нееквівалентні. Отже, одержимо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{3,2}^{5,7,K8} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3 \rangle + XM_5$.

2) $X = I_1^{7,8} = \langle 1, t \rangle + M_7$. Тоді $XM_5 = \langle t^4, t^5, t^7, \ldots \rangle$, $XM_6 = \langle t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, \ldots \rangle$. Тому $X/XM_5 = \langle 1, t, t^3, t^6 \rangle$, де t — обов'язковий елемент, а t^3, t^6 — вільні елементи. Породжуючі підпростори:

2.1) $W = \langle 1, t + \gamma t^6, t^3 + \beta t^6 \rangle$. Можна перевірити, що множник $\alpha = 1 - \gamma t^5$ редукує γ, а множник $\alpha = 1 - \beta(t^3 + \beta t^6) - \beta$. Отже, отримуємо один ідеал $I_{1,1}^{5,7,K8} = \langle 1, t, t^3 \rangle + XM_5$.

2.2) $W = \langle 1, t + \gamma t^3, t^6 \rangle$. Можна перевірити, що γ не редукується, бо $t^2 \notin$ $\notin XM_5$. Отже, отримуємо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{2,1}^{5,7,K8} = \langle 1, t + \gamma t^3, t^6 \rangle + XM_5$.

2.3) $W = \langle 1, t + \gamma t^3 + \beta t^6 \rangle$. Покладаючи $\alpha = 1 - \beta t^5$, редукуємо β. Після цього можна переконатися, що різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, одержуємо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{3,1}^{5,7,K8} = \langle 1, t +$ $+ \gamma t^3 \rangle + XM_5$.

3) $X = K_8$, тоді $XM_6 = \langle t^3, t^4, t^5, t^6, \ldots \rangle \neq XM_5 = \langle t^4, t^5, t^6, \ldots \rangle$. Звідси $X/XM_5 = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$, причому обов'язковими є елементи 1, t, t^2. Породжуючі підпростори:

3.1) $W = \langle 1, t + \gamma t^3, t^2 + \beta t^3 \rangle$. Знову легко перевіряється, що параметри β і γ редукуються, а саме, множник $\alpha = 1 - \beta(t + \gamma t^3)$ редукує параметр β, а множник $\alpha = 1 - \gamma t^2$ — параметр γ. Отже, отримуємо один ідеал $I_1^{5,K8} = \langle 1, t, t^2 \rangle + XM_5$.

Інших породжуючих підпросторів немає, бо у цьому випадку маємо лише один вільний елемент.

4) $X = K_7$, тоді $XM_6 = M_6$, $XM_5 = \langle 1, t^4, t^7, t^8, t^9, \mathbf{t^{10}}, t^{11}, t^{12}, \mathbf{t^{13}}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, \ldots \rangle$, звідки $X/XM_5 = \langle 1, t^3, t^5, t^6 \rangle$, 1, t^5 — обов'язкові елементи, t^3, t^6 — вільні. Породжуючи підпростори:

4.1) $W = \langle 1, t^5 + \gamma t^6, t^3 + \beta t^6 \rangle$. Покладаючи $\alpha = 1 - \beta/\gamma(t^5 + \gamma t^3)$, отримуємо, що параметр β редукується, а різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, одержуємо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_1^{5,K7} = \langle 1, t^5 + \gamma t^6, t^3 \rangle + XM_5$.

4.2) $W = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6 \rangle$. Можна переконатися, що різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, одержуємо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_2^{5,K7} = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6 \rangle + XM_5$.

4.3) $W = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^6 \rangle$. Можна переконатися, що множник $\alpha = 1 - \beta/\gamma(t^5 + \gamma t^3 + \beta t^6)$ редукує параметр β, а різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори.

Тому одержимо однопараметричну сім'ю ідеалів $I_3^{5,K7} = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 \rangle + XM_5$.

5) $X = K_6$. Тоді $XM_6 = M_6$, $XM_5 = M_5$, $X/XM_5 = \langle 1, t^3, t^6, t^9 \rangle$, 1 — обов'язковий елемент, а інші — вільні елементи. Породжуючі підпростори:

5.1) $W = \langle 1, t^3 + \gamma t^9, t^6 + \beta t^9 \rangle$. Поклавши спочатку $\alpha = 1 - \gamma(t^6)$, а потім $\alpha = 1 - \beta t^3$, легко перевірити, що параметри редукуються. Отже, одержимо один ідеал $I_1^{5,K6} = \langle 1, t^3, t^6 \rangle + XM_5$.

5.2) $W = \langle 1, t^3 + \gamma t^6, t^9 \rangle$. Множник $\alpha = 1 - \gamma t^3$ редукує γ. Тому легко перевірити, що параметр редукується. Отже, одержимо один ідеал $I_2^{5,K6} = \langle 1, t^3, t^9 \rangle + XM_5$.

5.3) $W = \langle 1, t^3 + \gamma t^6 + \beta t^9 \rangle$. Множники $\alpha = 1 - \gamma t^3$ і $\alpha = 1 - \beta t^6$ редукують параметри γ, β. Тому легко перевірити, що параметри редукуються. Отже, одержимо один новий ідеал $I_3^{5,K6} = \langle 1, t^3 \rangle + XM_5$.

5.4) $W = \langle 1, t^6 + \gamma t^9 \rangle$. Легко перевірити, що різним значенням γ відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, отримали нову однопараметричну сім'ю ідеалів $I_4^{5,K6} = \langle 1, t^6 + \gamma t^9 \rangle + XM_5$.

5.5) $W = \langle 1, t^6, t^9 \rangle$. Існує один ідеал $I_5^{5,K6} = \langle 1, t^6, t^9 \rangle + XM_5$.

5.6) $W = \langle 1, t^9 \rangle$. Існує один ідеал $I_6^{5,K7} = \langle 1, t^9 \rangle + XM_5$.

Шукаємо K_4-ідеали.

1) $X = I_4^{5,K6}$, тоді $XM_4 = M_5 = XM_5$, бо $t^{10} = t^4 t^6$, $t^{13} = t^7 t^6$, тому $W = \langle 1, t^6 + \gamma t^9 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Отже, не отримали нового ідеалу.

2) $X = I_5^{5,K6}$, тоді $XM_4 = M_5 = XM_5$, бо $t^{10} = t^4 t^6$, $t^{13} = t^7 t^6$, $W = \langle 1, t^6, t^9 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими, тобто не отримали нового ідеалу.

3) $X = I_6^{5,K6}$, $XM_4 = \langle 1, t^4, t^7, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, \mathbf{t^{17}}, t^{18}, t^{19}, \ldots \rangle$, $XM_5 = M_5$, $X/XM_4 = \langle 1, t^9, t^{10} \rangle$, де 1, t^9 — обов'язкові елементи. Породжуючі підпростори:

3.1) $W = \langle 1, t^9 + \gamma t^{10} \rangle$. Отримали нову однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{1,6}^{4,5,K6} = \langle 1, t^9 + \gamma t^{10} \rangle + XM_4$.

3.2) $W = \langle 1, t^{10} \rangle$. Отримали новий ідеал $I_{2,6}^{4,5,K6} = \langle 1, t^{10} \rangle + XM_4$.

4) $X = I_1^{5,K6}$, тоді $XM_4 = M_5 = XM_5$, $W = \langle 1, t^3, t^6 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Отримали такий же ідеал.

5) $X = I_3^{5,K6}$, тоді $XM_4 = \langle 1, t^4, t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, \mathbf{t^{17}}, t^{18}, t^{19}, \ldots \rangle = XM_5 = M_5$, $X/XM_4 = \langle 1, t^3, t^{13} \rangle$, 1, t^3 — обов'язкові елементи.

$X = I_3^{5,K6} = \langle 1, t^3 + \gamma t^{13} \rangle$. Множник $\alpha = 1 - \gamma t^{10}$ редукує параметр γ. Отже, маємо один новий ідеал $I_{1,3}^{4,5,K6} = \langle 1, t^3 \rangle + XM_4$.

6) $X = I_2^{5,K6} = \langle 1, t^3, t^9 \rangle$, тоді $XM_4 = M_5 = XM_5$, тому $W = \langle 1, t^3, t^9 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Отже, не отримуємо нових ідеалів.

Тепер з'ясуємо, що породять знайдені $I_3^{5,8}$, $I_2^{5,8}$, $I_1^{5,8}$ в K_4-ідеалах.

7) $X = I_3^{5,K8}$, тоді $XM_4 = \langle t^4, t^6, \ldots \rangle = XM_5$, $X/XM_4 = \langle 1, t^2, t^3, t^5 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нового ідеалу не отримуємо.

8) $X = I_2^{5,K8}$, $XM_4 = \langle t^4, t^5, t^7, \ldots \rangle = XM_5$, $X/XM_4 = \langle 1, t, t^3, t^6 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Отже, нового ідеалу не отримуємо.

9) $X = I_1^{5,K8}$, тоді $XM_4 = \langle t^4, t^5, t^6, t^7, \ldots \rangle = XM_5$, тому $X/XM_4 = \langle 1, t, t^2 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими.

Нового ідеалу не отримуємо.

10) $X = I_1^{5,K7}$, тоді $XM_4 = \langle t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \ldots \rangle = XM_5$ і $X/XM_4 = \langle 1, t^5 + \gamma t^6, t^3 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Тому нового ідеалу не отримуємо.

11) $X = I_2^{5,K7}$, тоді $XM_5 = \langle t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \ldots \rangle = XM_4$, тому $X/XM_4 = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нового ідеалу не отримуємо.

12) $X = I_{1,1}^{5,7,K8} = \langle 1, t, t^3 \rangle + t^4, t^5, t^7, \ldots = I_{1,1,1}^{5,6,7,K8}$. Тоді $X \operatorname{rad} K5 = \langle t^4, t^5, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \ldots \rangle = X \operatorname{rad} K4$. Нового ідеалу не отримуємо.

13) $X = I_{1,2}^{5,7,K8}$, $XM_5 = \langle 1, t^4, t^6, t^7, \ldots \rangle = XM_4$, $X/XM_4 = \langle 1, t^2, t^3 \rangle$, всі елементи є обов'язковими. Нового ідеалу не буде.

14) $X = I_{2,2}^{5,7,K8}$, $XM_5 = \langle 1, t^4, t^6, t^7, \ldots \rangle = XM_4$, $X/XM_4 = \langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^5 \rangle$, всі елементи є обов'язковими. Нового ідеалу не буде.

15) $X = I_{3,2}^{5,7,K8}$, $XM_5 = \langle 1, t^4, t^6, t^7, \ldots \rangle = XM_4$, $X/XM_4 = \langle 1, t^2 + \gamma t^3 \rangle$, всі елементи є обов'язковими, тому нового ідеалу не буде.

16) $X = I_1^{7,K8} = \langle 1, t, t^3, t^4, t^5, t^6, t^7, t^8, t^9, \ldots \rangle$, тоді $X/XM_4 = \langle 1, t, t^3, t^6 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими, тому нового ідеалу не буде.

17) $X = I_2^{7,K8}$, $XM_5 = \langle t^4, t^6, t^7, \ldots \rangle = XM_4$, $X/XM_4 = \langle 1, t^2, t^3, t^5 \rangle = V$, де всі елементи є обов'язковими, тому нового ідеалу не отримуємо. І за твердженням 2 $I_{1,2}^{7,K8}$ далі нових не породжує, бо дав вже чотиривимірний фактор.

18) $X = K7$, $XM_5 = XM_4 = \langle 1, t^4, t^7, t^8, \ldots \rangle$, $X/XM_4 = \langle 1, t^3, t^5, t^6 \rangle = V$, де всі елементи є обов'язковими. Отже, нових ідеалів не буде.

19) $X = I_1^{5,K6}$, тоді $XM_5 = M_5$, $XM_4 = \langle t^4, t^7, t^8, t^9, \ldots \rangle$, тому $X/XM_4 = \langle 1, t^3, t^5, t^6 \rangle$, де t^6 — не обов'язковий елемент.

19.1) $W = \langle 1, t^3 + \gamma t^6, t^5 + \beta t^6 \rangle$, множник $\alpha = 1 - \gamma(t^3 + \gamma t^6)$ редукує параметр γ. Параметр β не редукується.

Отже, отримали однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{1,1}^{4,5,K6} = \langle 1, t^3, t^5 + \beta t^6 \rangle + XM_4$.

19.2) $W = \langle 1, t^3 + \gamma t^5, t^6 \rangle + XM_4$, параметр γ не редукується. Отже, отримали однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{2,1}^{4,5,K6} = \langle 1, t^3 + \gamma t^5, t^6 \rangle + XM_4$.

19.3) $W = \langle 1, t^3 + \gamma t^5 + \beta t^6 \rangle$ редукується, множник $\alpha = 1 - \beta(t^3 + \gamma t^5 + \beta t^6)$ редукує параметр β, а різним значенням параметра γ відповідають нееквівалентні підпростори. Отже, отримали однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{3,1}^{4,5,K6} = \langle 1, t^3 + \gamma t^5, t^6 \rangle + XM_4$.

Згідно з наведеним вище зауваженням в K_3 не буде нових ідеалів, окрім самого K_3.

Далі обчислення виконуватимемо аналогічним чином, тому наведемо їх у скороченому вигляді.

Знайдемо K_2-ідеали.

Згідно з твердженням 2 нові ідеали можуть виникати з таких:

1) $X = I_{1,6}^{4,5,K6} = \langle 1, t^9 + \gamma t^{10} \rangle + XM_4$, тоді $XM_2 = \langle t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13} + \gamma t^{14}, t^{17}, t^{15}, t^{16}, \mathbf{t^{18}}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, t^{22}, \dots \rangle \neq XM_3 = \langle t^4, \mathbf{t^7}, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, \mathbf{t^{14}}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, \dots \rangle$, тому $X/XM_2 = \langle 1, t^7, t^9 + \gamma t^{10}, t^{13} \rangle$, де 1, $t^9 + \gamma t^{10}$ — обов'язкові елементи.

1.1) $W = \langle 1, t^9 + \gamma t^{10} + \beta t^{13}, t^7 + \chi t^{13} \rangle$. Легко бачити, що параметри β, χ редукуються. Отже, отримали *нову однопараметричну сім'ю* ідеалів $I_{1,1,6}^{2,4,5,K6} = \langle 1, t^9 + \gamma t^{10}, t^7 \rangle + XM_2$.

1.2) $W = \langle 1, t^9 + \gamma t^{10} + \beta t^7, t^{13} \rangle$. Отже, отримали *нову двопараметричну сім'ю* ідеалів $I_{2,1,6}^{2,4,5,K6} = \langle 1, t^9 + \gamma t^{10} + \beta t^7, t^{13} \rangle + XM_2$.

1.3) $W = \langle 1, t^9 + \gamma t^{10} + \beta t^7 + \chi t^{13} \rangle$, параметр χ редукується. Отже, отримали *нову двопараметричну сім'ю* ідеалів $I_{3,1,6}^{2,4,5,K6} = \langle 1, t^9 + \gamma t^{10} + \beta t^7 \rangle + XM_2$.

2) $X = I_{2,6}^{4,5,K6}$, тоді $XM_2 = \langle t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, \mathbf{t^{18}}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, t^{22}, \dots \rangle \neq XM_3 = \langle 1, t^4, \mathbf{t^7}, t^8, t^{11}, t^{12}, \mathbf{t^{14}}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, \dots \rangle$, тому $X/XM_2 = \langle 1, t^7, t^{10}, t^{17} \rangle$, де 1, t^{10} — обов'язкові елементи.

2.1) $W = \langle 1, t^{10} + \gamma t^{17}, t^7 + \beta t^{17} \rangle$, параметри γ, β редукуються. Отже, отримали *новий* ідеал $I_{1,2,6}^{2,4,5,K6} = \langle 1, t^7, t^{10} \rangle + XM_2$.

2.2) $W = \langle 1, t^{10} + \gamma t^7, t^{17} \rangle$, параметр γ не редукується. Отже, отримали *новий* ідеал $I_{2,2,6}^{2,4,5,K6} = \langle 1, t^{10} + \gamma t^7, t^{17} \rangle + XM_2$.

2.3) $W = \langle 1, t^{10} + \gamma t^7 + \beta t^{17} \rangle$, параметр β редукується, а γ ні. Отже, отримали *нову однопараметричну сім'ю* ідеалів $I_{2,2,6}^{2,4,5,K6} = \langle 1, t^{10} + \gamma t^7 \rangle + XM_2$.

3) $X = I_6^{5,K6} = \langle 1, t^6, t^9 \rangle$, тоді $XM_2 = \langle t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, \mathbf{t^{18}}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, t^{22}, \dots \rangle \neq XM_3 = \langle 1, t^4, \mathbf{t^7}, t^8, t^{11}, t^{12}, \mathbf{t^{14}}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, \dots \rangle$, де 1, t^6, t^9 — обов'язкові елементи.

3.1) $W = \langle 1, t^6 + \gamma t^7, t^9 + \beta t^7 \rangle$, параметр не редукується. Отже, отримали *нову двопараметричну сім'ю* ідеалів $I_{1,6}^{2,5,K6} = \langle 1, t^6 + \gamma t^7, t^9 + \beta t^7 \rangle + XM_2$.

4) $X = I_2^{5,K7}$, тоді $XM_3 = \langle t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \dots \rangle \neq XM_2 = \langle t^4, t^9 + \gamma t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, \dots \rangle$, $t^9 = -\gamma t^7$, тому $X/XM_2 = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6, t^9 \rangle$, 1, $t^5 + \gamma t^3$, t^6 — обов'язкові елементи.

4.1) $W = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^9, t^6 + \chi t^9 \rangle$. Легко перевірити, що параметри χ і β редукуються, а різним значенням параметра γ відповідають нееквівалентні підпростори.

Отже, отримали однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{1,2}^{2,5,K7} = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6 \rangle + XM_2$.

4.2) $W = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^6, t^9 \rangle$, параметр β редукується. Отже, маємо нову сім'ю ідеалів $I_{2,2}^{2,5,K7} = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^9 \rangle + XM_2$.

4.3) $W = \langle 1, t^6, t^9 \rangle$, отримуємо новий ідеал $I_{3,2}^{2,5,K7} = \langle 1, t^6, t^9 \rangle + XM_2$.

5) $X = K_5$, тоді $XM_3 = M_3$, $XM_2 = M_2$, тому $X/XM_2 = \langle 1, t^7, t^{10} \rangle$, де 1, t^{10} — обов'язкові елементи.

5.1) $W = \langle 1, t^7 + \gamma t^{10} \rangle + XM_2$, параметр γ не редукується. Отримали нову сім'ю ідеалів $I_1^{2,5} = \langle 1, t^7 + \gamma t^{10} \rangle + XM_2$.

6) $X = I_3^{5,K7}$, тоді $XM_3 = \langle t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \dots \rangle \neq XM_2 = \langle t^4, t^9 + \gamma t^7, t^8, t^{11}, \dots \rangle$, звідки $X/XM_2 = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^7, t^{10} \rangle$, де 1, $t^5 + \gamma t^3$ — обов'язкові елементи.

6.1) $W = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^{10}, t^7 + \chi t^{10} \rangle$. Параметри β, χ редукуються. Отже, отримали нову сім'ю ідеалів $I_{1,3}^{2,5,K7} = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^7 \rangle + XM_2$.

6.2) $W = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^7 + \chi t^{10} \rangle$, легко перевірити, що параметр χ редукується. Отже, отримали нову сім'ю ідеалів $I_{2,3}^{2,5,K7} = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^7 \rangle + XM_2$.

6.3) $W = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^7, t^{10} \rangle$, легко перевірити, що параметр χ редукується, а різним значенням параметрів γ і β відповідають неізоморфні підпростори. Отже, отримано *нову сім'ю* ідеалів $I_{3,3}^{2,5,K7} = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^7, t^{10} \rangle + XM_2$.

7) $X = I_2^{7,K8}$, тоді $XM_2 = \langle t^4, t^6, t^7, \ldots \rangle = XM_3$, тому $X/XM_2 = \langle 1, t^2, t^3, t^5 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Отже, нового ідеалу не буде.

8) $X = I_2^{5,K7}$, $XM_3 = \langle t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \dots \rangle \neq XM_2 = \langle t^4, t^9 + \gamma t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, \dots \rangle$, $X/XM_2 = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6, t^9 \rangle$, $t^5 + \gamma t^3$, t^6 — обов'язкові елементи, t^9 — вільний елемент.

8.1) $W = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^9, t^6 + \chi t^9 \rangle$, легко перевірити, що параметри β, χ редукуються. Отже, отримали нову однопараметричну сім'ю ідеалів $I_{1,2}^{2,5,K7} = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6 \rangle + XM_2$.

9) $X = I_2^{7,K8} = \langle 1, t^2 \rangle + M_7$, $XM_2 = \langle t^4, t^6, t^7, \ldots \rangle = XM_3$, $X/XM_2 = \langle 1, t^2, t^3, t^5 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Отже, маємо єдиний ідеал $I_{1,2}^{2,7,K8} = \langle 1, t^2, t^3, t^5 \rangle + XM_2$.

10) $X = I_2^{5,K7}$, тоді $XM_3 = \langle t^4, t^7, t^8, t^9, t^{10}, \dots \rangle \neq XM_2 = \langle t^4, t^9 + \gamma t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, \dots \rangle$, тому $X/XM_2 = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6, t^9 \rangle$, де $t^5 + \gamma t^3$, t^6 — обов'язкові елементи, а t^9 — вільний елемент.

10.1) $W = \langle 1, t^5 + \gamma t^3 + \beta t^9, t^6 + \chi t^9 \rangle$. Легко перевірити, що параметри β і χ редукуються при відповідному виборі множників, а параметр γ не редукується. Отже, отримуємо *нову однопараметричну сім'ю* ідеалів $I_{1,2}^{2,5,K7} = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^6 \rangle + XM_2$.

Знаходимо K_1-ідеали.

Згідно з твердженням 2 нові ідеали можуть породити такі:

1) $X = I_{2,3}^{2,5,K7}$, $XM_2 = XM_1 = M_2$, тому нового ідеалу не буде.

2) $X = I_{3,3}^{2,5,K7}$, тоді $XM_2 = XM_1 = M_2$, тому нового ідеалу не буде.

3) $X = I_{1,3}^{2,5,K7}$, $XM_2 = XM_1 = M_2$, тому нового ідеалу не буде.

4) $X = I_{1,2}^{2,5,K7}$, тоді $XM_2 = \langle t^4, t^9 + \gamma t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, \dots \rangle = XM_1$. Отже, нового ідеалу не буде.

5) $X = I_{3,2}^{2,5,K7}$, тоді $XM_2 = \langle t^4, t^9 + \gamma t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, \dots \rangle = XM_1$. Отже, нового ідеалу не буде.

6) $X = I_{2,2}^{2,5,K7}$, тоді $XM_2 = XM_1$. Отже, нового ідеалу не буде.

7) $X = I_{1,6}^{4,5,K6} = \langle 1, t^9 + \gamma t^{10} \rangle + XM_4$, $XM_1 = \langle 1, t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{15}, t^{16}, t^{17} + \gamma t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, t^{22}, \dots \rangle \neq 6XM_2 = \langle 1, t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, \mathbf{t^{18}}, t^{19}, t^{20}, t^{21}, t^{22}, \dots \rangle$, $X/XM_1 = \langle 1, t^7, t^9 + \gamma t^{10}, t^{17} \rangle$ де $t^7, t^9 + \gamma t^{10}$ — обов'язкові елементи, t^{17} — вільний елемент. Тоді маємо підпростори:

7.1) $W = \langle 1, t^7 + \chi t^{17}, t^9 + \gamma t^{10} + \beta t^{17} \rangle$, параметри χ, β редукуються, тому одержуємо *нову однопараметричну сім'ю* ідеалів $I_{1,1,6}^{1,4,5,K6} = \langle 1, t^7, t^9 + \gamma t^{10} \rangle$.

8) $X = I_{2,6}^{4,5,K6} = \langle 1, t^{10} \rangle + XM_4$. Тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, t^{24}, t^{25}, t^{26}, \dots \rangle$, $K_1 = K_0 + \langle \mathbf{t^{29}} \rangle$, $X/XM_1 = \langle 1, t^7, t^{13}, t^{10} \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Тому нового ідеалу не отримуємо.

Це всі $I_{i,6}^{4,5,K6}$-ідеали, їх всього два.

9) $X = I_5^{5,K6}$, тоді $XM_1 = \langle t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, t^{24}, t^{25}, t^{26}, \dots \rangle = XM_2$, $X/XM_1 = \langle 1, t^6, t^7, t^9 \rangle$, де 1, t^6, t^7, t^9 — обов'язкові елементи. Отже, нового ідеалу не отримуємо.

10) $X = I_6^{5,K6}$, тоді $XM_1 = \langle t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, t^{24}, t^{25}, t^{26}, \dots \rangle = XM_2$, $X/XM_1 = \langle 1, t^6, t^7, t^9, \rangle t^{13} = t^4 t^9$, де 1, t^6, t^7, t^9 — обов'язкові елементи. Отже, нового ідеалу не отримуємо.

11) $X = I_4^{5,K6}$, тоді $XM_1 = \langle t^4, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, t^{24}, t^{25}, t^{26}, \dots \rangle = XM_2$, тому $X/XM_1 = \langle 1, t^6 + \gamma t^9, t^7 \rangle$, де 1, $t^6 + \gamma t^9$, t^7 — обов'язкові елементи. Отже, нового ідеалу не отримуємо.

12) $X = I_3^{5,K6}$, тоді $XM_1 = \langle t^4, t^7 + \gamma t^{10}, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, t^{24}, t^{25}, t^{26}, \dots \rangle = XM_2$, тому $X/XM_1 = \langle 1, t^3 + \gamma t^6 + \beta t^9, t^7 \rangle$, де 1, $t^3 + \gamma t^6 + \beta t^9$, t^7 — обов'язкові елементи. Отже, нового ідеалу не отримуємо.

13) $X = I_1^{5,K6} = \langle 1, t^3, t^6 \rangle$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^7, t^8, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, t^{24}, t^{25}, t^{26}, \dots \rangle = XM_2$, тому $X/XM_1 = \langle 1, t^3, t^6, t^{13} \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Тому нового ідеалу не отримуємо.

14) $X = I_2^{5,K6} = \langle 1, t^3, t^9 \rangle$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^7, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, t^{24}, t^{25}, t^{26}, \dots \rangle = XM_2$, тому $X/XM_1 = \langle 1, t^3, t^9, t^{10} \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Тому нового ідеалу не отримуємо.

15) $X = I_3^{5,K6} = \langle 1, t^3 \rangle$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^7, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, t^{24}, t^{25}, t^{26}, \dots \rangle = XM_2$, тому $X/XM_1 = \langle 1, t^9, t^{10}, t^{13} \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Тому нового ідеалу не отримуємо.

16) $X = I_{1,1}^{5,7,K8} = \langle 1, t, t^3 \rangle + XM_5$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^7, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \dots \rangle = XM_2$, тому $X/XM_1 = \langle 1, t, t^3, t^{10} \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

17) $X = I_{2,1}^{5,7,K8} = \langle 1, t + \gamma t^3, t^6 \rangle + XM_5$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^7, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \dots \rangle = XM_2$, $X/XM_1 = \langle 1, t + \gamma t^3, t^4 + \gamma t^7, t^6 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

18) $X = I_{3,1}^{5,7,K8} = \langle 1, t + \gamma t^3 \rangle + XM_5$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^7, t^8, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \dots \rangle = XM_2$, звідки $X/XM_1 = \langle 1, t + \gamma t^3, t^4 + \gamma t^7 \rangle$, тому всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

19) $X = I_{1,2}^{5,7,8} = \langle 1, t^2, t^3 \rangle + XM_5$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^6, t^7, t^8, t^9, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \dots \rangle = XM_2$, $X/XM_1 = \langle 1, t^2, t^3, t^5 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

20) $X = I_{2,2}^{5,7,8} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^5 \rangle + XM_5$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^6 + \gamma t^7, t^8, t^9, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \dots \rangle = XM_2$, $X/XM_1 = \langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^5, t^7 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

21) $= I_{3,2}^{5,7,K8} = \langle 1, t^2 + \gamma t^3 \rangle + XM_5$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^6 + \gamma t^7, t^8, t^9, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \dots \rangle = XM_2$, $X/XM_1 = \langle 1, t^2 + \gamma t^3, t^5, t^7 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

22) $X = I_1^{5,K7}$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^9 + \gamma t^{10}, t^8, t^9, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \ldots \rangle = XM_2$, звідки $X/XM_1 = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^9 + \gamma t^{10}, t^7 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

23) $X = I_2^{5,K7}$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^9 + \gamma t^7, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \ldots \rangle = XM_2$, звідки $X/XM_1 = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^9 + \gamma t^7, t^6 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

24) $X = I_3^{5,K7}$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^9 + \gamma t^7, t^8, t^9, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \ldots \rangle = XM_2$, звідки $X/XM_1 = \langle 1, t^5 + \gamma t^3, t^9 + \gamma t^7, t^{10} \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

25) $X = I_{1,1}^{5,7,K8}$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4, t^5, t^7, t^8, t^9, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \ldots \rangle = XM_2$, $X/XM_1 = \langle 1, t, t^3, t^7, t^{10} \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

26) $X = I_{2,1}^{5,7,K8}$, тоді $XM_1 = \langle 1, t^4 + \gamma t^7, t^5, t^8, t^9, t^{10}, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \ldots \rangle = XM_2$, $X/XM_1 = \langle 1, t + \gamma t^3, t^6 \rangle + XM_1$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

27) $X = I_{3,1}^{5,7,K8}$, $XM_1 = \langle 1, t^4 + \gamma t^7, t^5, t^8, t^9, t^{11}, t^{12}, t^{13}, t^{14}, t^{15}, t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{19}, t^{20}, t^{22}, t^{23}, \ldots \rangle = XM_2$, $X/XM_1 = \langle 1, t + \gamma t^3, t^6, t^{10} \rangle + XM_1$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

28) $X = K_8$, $XM_1 = XM_2$, $X/XM_1 = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$, де всі елементи є обов'язковими. Нових ідеалів немає.

Згідно з наведеним вище зауваженням в K_0 не буде нових ідеалів, окрім самого K_0.

Таким чином, ми переконалися, що особливість типу W_{30} має щонайбільше двопараметричні сім'ї ідеалів. Це завершує доведення теореми 1.

1. *Jacobinski H.* Sur les ordres commutatives over un nombre finide resedux indecomposables // Acta Math. – 1961. – **118**. – P. 1 – 31.
2. *Дрозд Ю. А., Ройтер А. В.* Коммутативные кольца с конечным числом неразложимых целочисленных представлений // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – **31**. – С. 783 – 798.
3. *Greuel G.-M., Knörrer H.* Simple singularities in positive characteristic // Math. Z. – 1990. – **203**. – S. 339 – 354.
4. *Arnold V. I., Gusein-Zade S. M., Varchenko A. N.* Singularities of differentiable maps. – Boston etc.: Birkhäuser, 1985. – Vol. 1.
5. *Schappert A.* A characterization of strict unmodal plane curve singularities // Singularities, Repr Esentation of Algebras and Vektor Bundles Lamberg. – Berlin etc.: Springer, 1987. – Vol. 1273. – P. 168 – 177.
6. *Wall C. T. C.* Classification of unimodal isolated singularities of complete intersections // Proc. Symp. Pure Math. – 1983. – **40**, № 2. – P. 625 – 640.
7. *Drozd Y. A., Greuel G.-M.* Cohen – Macaulay module type // Compos. math. – 1993. – **89**. – P. 315 – 338.
8. *Drozd Y. A., Greuel G.-M.* On Schappert's characterization of strictly unimodal plane curve singularities. Singularities: The Brieskorn Anniversary Volume. – Birkhäuser, 1998. – P. 3 – 26.

Одержано 02.03.09,
після доопрацювання — 16.06.09