УДК 517.5

М. Ф. Тиман (Днепропетр. агр. ун-т),
Ю. Хасанов (Рос.-Тадж. славян. ун-т, Душанбе)

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕЗИКОВИЧА

For the almost periodic Besicovitch functions, the spectrum of which has a limit point only at infinity, criteria of absolute Chezarov's summability of order more than minus one of their Fourier series are established.

Для майже періодичних функцій Безиковича, спектр яких має граничну точку лише в нескінченності, встановлено ознаки абсолютного чезарівського підсумовування порядку більшого за мінус одиницю їх рядів Фур'є.

Как известно, числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ называется абсолютно суммируемым методом Чезаро порядка α $(-1 < \alpha < \infty)$ или $|C, \alpha|$-суммируемым, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha} \right| < \infty,$$

где

$$\sigma_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \left(A_n^{\alpha}\right)^{-1} A_{n-k}^{\alpha} a_k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}{n!}.$$

Исследованию вопросов абсолютной чезаровской суммируемости ортогональных рядов и, в частности, тригонометрических рядов Фурье посвящено много работ. В работах [1 – 5] исследуются ряды Фурье по тригонометрической системе функций, так как периодические функции являются почти периодическими, спектр $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ которых имеет вид

$$\lambda_n = n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

По тригонометрической системе для периодической периода 2π функции $f(x) \in L_2$, имеющей ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

Л. Лейндлером [3] установлены следующие критерии.

1. Если

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(1/2-\alpha)} \left\{ \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \rho_k^2 \right\}^{1/2} < \infty, \tag{2}$$

где $\rho_k = \left(a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2}$, то ряд (1) почти всюду $|C, \alpha|$-суммируем при $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$.

2. Если

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \rho_k^2 \right\}^{1/2} < \infty, \tag{3}$$

то ряд (1) почти всюду $|C,1/2|$-суммируем.

3. Если

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \rho_k^2 \right\}^{1/2} < \infty, \tag{4}$$

то ряд (1) $|C,\, \alpha|$-суммируем при $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Этот результат Л. Лейндлера был им установлен и для рядов по произвольным ортонормированным системам функций $\{\varphi(x)\}$, заданных на конечном отрезке $[a,b]$. Частный случай теоремы Л. Лейндлера, соответствующий $|C,1|$-суммируемости почти всюду ряда (1), был установлен ранее в работе К. Тандори [4].

Результат Лейндлера устанавливает достаточные условия абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье функций в терминах поведения их коэффициентов Фурье.

Л. Лейндлер построил специальную ортонормированную систему функций $\{\varphi_n(x)\}$, чтобы показать, что для рядов с монотонными коэффициентами Фурье по этой системе условия (2) – (4) не только достаточны для их $|C,\alpha|$-суммируемости почти всюду, но и необходимы. Тем самым им было установлено, что на классе всех ортонормированных систем для рядов Фурье с монотонными коэффициентами условия (2) – (4) не только достаточны, но и необходимы для $|C,\alpha|$-суммируемости рядов Фурье.

Вопросы $|C,\alpha|$-суммируемости в общих конструктивных либо в структурных терминах рассмотрены в работах [1, 2, 5].

М. Ф. Тиман [5] доказал, что в случае тригонометрической системы, если $f(x) \in L_2$, $1 < p \le 2$, для $|C,\alpha|$-суммируемости почти всюду ряда (1) $\left(0 \le \alpha < \dfrac{1}{2}\right)$ достаточно, а в случае монотонности ее коэффициентов Фурье и необходимо, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1+1/p} E_n(f)_{L_p} < \infty. \tag{5}$$

В работе Л. В. Грепачевской [1] по тригонометрической системе установлены следующие достаточные условия $|C,\alpha|$-суммируемости для 2π-периодической функции $f(x) \in L_2$ и ее ряда Фурье (1).

1. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1/2+\alpha)} E_n(f)_{L_p} < \infty, \tag{6}$$

то ряд (1) почти всюду $|C,\alpha|$-суммируем при $-1 \le \alpha < \dfrac{1}{2}$.

2. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} E_n(f)_{L_p} \ < \ \infty, \tag{7}$$

то ряд (1) почти всюду $|C, 1/2|$-суммируем.

3. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\ln n)^{-1/2} \, E_n(f)_{L_p} \ < \ \infty, \tag{8}$$

то ряд (1) почти всюду $|C, \alpha|$-суммируем при $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

В оценках (5) – (8) $E_n(f)_{L_2} = \inf\limits_{T_n} \max\limits_{x} |f(x) - T_n(x)|$ означает наилучшие приближения функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка не выше n.

Известно (см., например, [6]), что для периодических функций $f(x) \in L_p$ выполняются неравенства

$$E_n(f)_{L_p} \ << \ \omega\left(f; \frac{1}{n+1}\right)_{L_p}, \qquad \omega\left(f; \frac{1}{n+1}\right)_{L_p} \ << \ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} E_k(f)_{L_p},$$

где

$$\omega(f; h)_{L_p} \ = \ \sup_{|t| \le h} \| f(x+t) - f(x) \|_{L_p}, \quad h > 0,$$

означает модуль непрерывности функции $f(x) \in L_p$. Поэтому в неравенствах (5) – (8) величину $E_n(f)_{L_p}$ можно заменить величиной $\omega\left(f; \dfrac{1}{n+1}\right)_{L_p}$. Тем самым получим условия в терминах модулей непрерывности, зквивалентные (6) – (8). Соотношение $U << V$ означает, что $U \le CV$, где C — некоторая постоянная.

При $\alpha = 0$, $p = 2$ результат Л. В. Грепачевской установлен ранее С. Б. Стечкиным в работе [7].

Отметим также, что Л. В. Грепачевская [1] установила необходимость условий (6) – (8) для рядов Фурье по системе Радемахера в случае монотонности их козффициентов.

Выше были приведены некоторые критерии $|C, \alpha|$-суммируемости тригонометрических рядов Фурье для различных значений $\alpha \ (-1 < \alpha < \infty)$.

Остановимся теперь на некоторых результатах аналогичного характера для рядов Фурье почти периодических функций Безиковича. Для получения соответствующих результатов нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть последовательность измеримых, итегрируемых на каждом конечном отрезке функций* $\{f_n(x)\}$ *такова, что*:

А) $\{f_n(x)\} \in B_1$, $n = 1, 2, \ldots$;

Б) $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots$;

В) $\bar{M}\{f_n(x)\} \le K$ (K *— некоторая постоянная, не зависящая от* n).

Тогда существует функция $f(x) \in B_1$ *такая, что почти всюду*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{M}\{f_n(x)\} = \bar{M}\{f(x)\},$$

B_1 *— класс почти периодических функций Безиковича, по поводу* $\bar{M}\{f(x)\} = \overline{\lim_{T\to\infty}} \dfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$ *см. работу* [8].

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству результата Б. Леви для последовательности измеримых и интегрируемых по Лебегу функций (см. [9, с. 348]).

Лемма 2. *Если последовательности функций* $\{\varphi_n(x)\}$ *принадлежат* B_1, $n = 1, 2, \ldots$, *и почти всюду* $\varphi_n(x) \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *то из условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{M}\{\varphi_n(x)\} < \infty \tag{9}$$

следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ *сходится почти всюду.*

Доказательство. Пусть $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$ — функции $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющие всем условиям леммы 1. Действительно,

1) $\{f_n(x)\} \in B_1$, так как $\{\varphi_n(x)\} \in B_1$;

2) поскольку $\{\varphi_n(x)\} \geq 0$, то условие Б для $\{f_n(x)\}$ также имеет место;

3) из сходимости ряда (9) следует выполнение и условия В.

Из леммы 1 следует, что почти всюду $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Очевидно также, что при любом $T > 0$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_n(x)\,dx \leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx.$$

Поскольку $f(x) \in B_1$, можно найти константу K такую, что при всех $T > 0$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx \leq K.$$

Следовательно, равномерно по $T > 0$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_n(x)\,dx \leq K.$$

Применяя теперь теорему Леви, получаем утверждение леммы 2.

По аналогии с периодическим случаем для $-1 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ укажем некоторые признаки $|C, \alpha|$-суммируемости рядов Фурье почти периодических функций Безиковича $f(x) \in B_2$ (определение и свойства таких функций можно найти в [8]).

Для почти периодических функций Безиковича, спектр которых имеет единственную предельную точку в бесконечности, в работе [10] установлены признаки сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^{\beta} n^{\gamma}.$$

Используя эти условия, можно исследовать критерии $|C,\alpha|$-суммируемости рядов Фурье функций $f(x) \in B_2$ для отрицательных значений α.

Для получения таких результатов используем следующее вспомогательное утверждение, установленное Дж. Соноути [11].

Лемма 3. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$ *сходится, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2)^{-1} U_n$$

$|C,\alpha|$*-суммируем* $(0 < \alpha < 1)$.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x)$ *принадлежит* B_2 *и ее спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяет условиям*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, \quad |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \quad \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty, \quad n^{\delta} = O\{\lambda_n\},$$

$$n > 0, \quad \delta > 0.$$

Если при $0 < \beta < 2,\ 0 \le \gamma < 1,\ k > \dfrac{\gamma+1-\beta/2}{\beta\delta},\ \rho = \dfrac{\gamma+1-\beta/2}{\delta}$ *выполнено*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1} \omega_k^{\beta}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{B_2} < \infty, \tag{10}$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^{\beta}$ *суммируем методом* $|C,-\gamma|$.

Доказательство. В работе [10] установлена оценка

$$\sum_{m=1}^{\infty} n^{\gamma} |C_n|^{\beta} << \sum_{n=1}^{\infty} n^{(\gamma+1-\beta/2)/\gamma-1} \omega_k^{\beta}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{B_2}.$$

Отсюда в силу условия (10) получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} n^{\gamma} |C_n|^{\beta} < \infty.$$

После деления на числа A_n^{γ}, принимая во внимание свойства чисел $A_n^{\gamma} \asymp n^{\gamma}$ (см., например, [12]), получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^{\beta}$, который в силу леммы 3 абсолютно $|C,-\gamma|$-суммируем. (Здесь и в дальнейшем соотношение $U \asymp V$ означает, что существуют постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, для которых переменные U, V удовлетворяют неравенствам $C_1 U \le V \le C_2 U$.

В случае, когда $f(x) \in B_2$ и $\beta = 1$, аналогичный результат получен в работе [13].

Для случая $\alpha > 0$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть спектр* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x) \in B_2$ *удовлетворяет условиям*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, \quad |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|, \quad \lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда при $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$ *условие*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/2-\alpha)} \left(\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^\nu}}\right)^k \omega_k\left(f; \lambda_{2^\nu}^{-1}\right)_{B_2} < \infty \tag{11}$$

влечет $|C, \alpha|$*-суммируемость ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(i\lambda_n x).$$

Доказательство. Известно [14], что

$$\sigma_n^\alpha(x) - \sigma_{n-1}^\alpha(x) = \left(nA_n^\alpha\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} k C_k \exp(i\lambda_k x),$$

где $\sigma_n^\alpha(x)$ — n-е чезаровские средние порядка α, $\alpha > -1$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sigma_n^\alpha(x) - \sigma_{n-1}^\alpha(x)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(nA_n^\alpha\right)^{-1} \left|\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} k C_k \exp(i\lambda_k x)\right|, \tag{12}$$

где C_k — коэффициент Фурье функции $f(x) \in B_2$.

В силу леммы 2 для доказательства сходимости почти всюду ряда (12) достаточно установить сходимость ряда

$$G(f;\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{M}\left\{\left|\sigma_n^\alpha(x) - \sigma_{n-1}^\alpha(x)\right|\right\}. \tag{13}$$

На основании (12), применяя неравенства Коши – Буняковского и равенства Парсеваля, получаем

$$G(f;\alpha) \le \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\bar{M}\left\{\left|\sigma_n^\alpha(x) - \sigma_{n-1}^\alpha(x)\right|^2\right\}\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \left(nA_n^\alpha\right)^{-1} \left\{\sum_{k=1}^{n} \left(A_{n-k}^{\alpha-1}\right)^2 k^2 C_k^2\right\}^{1/2} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \left(nA_n^\alpha\right)^{-1} \left\{\sum_{k=1}^{n} \left(A_{n-k}^{\alpha-1} k C_k\right)^2\right\}^{1/2}.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши – Буняковского и с учетом свойств чисел $A_n^\gamma \asymp n^\gamma$ имеем

$$G(f;\alpha) \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+1/2)} \left\{\sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 C_k^2}{(n-k+1)^{2(1-\alpha)}}\right\}^{1/2} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+1/2)} \left\{ \left(\sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \sum_{k=1}^{2^\nu-1} + \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \sum_{k=2^\nu}^{n} \right) \frac{n^2 C_n^2}{(n-k+1)^{2(1-\alpha)}} \right\}^{1/2} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+1/2)} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{2^\nu-1} \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} + \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} \sum_{k=n}^{2^{\nu+1}-1} \right) \frac{n^2 C_n^2}{(n-k+1)^{2(1-\alpha)}} \right\}^{1/2}. \qquad (14)$$

Пусть $-1 < \alpha < \dfrac{1}{2}$, тогда $2\alpha < 1$ или $2(1-\alpha) > 1$. Следовательно,

$$\sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (k-n+1)^{2(\alpha-1)} \le K, \qquad (15)$$

где K — некоторая постоянная (см., например, [15, с. 117]).

Значит, из соотношения (14) при $-1 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ с учетом неравенства (15) получаем

$$G(f;\alpha) \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+1/2)} \left\{ \sum_{n=1}^{2^{\nu+1}-1} n^2 C_n^2 \right\}^{1/2} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+1/2)} \left\{ \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} n^2 C_n^2 \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+1/2)} \sum_{k=0}^{\nu} 2^{k+1} \left\{ \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} C_n^2 \right\}^{1/2}. \qquad (16)$$

При исследовании вопросов абсолютной сходимости рядов Фурье функции $f(x) \in B_2$ в случае, когда показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}$ имеют предельную точку в бесконечности, в работе [10] установлена оценка

$$\left\{ \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} C_n^2 \right\}^{1/2} \le \left(\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^\nu}} \right)^k \omega_k\left(f; \lambda_{2^\nu}^{-1}\right)_{B_2}. \qquad (17)$$

Применяя оценку (17) и неравенство (16), находим

$$G(f;\alpha) \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu(\alpha+1/2)} \left(\frac{\lambda_{2^{\nu+1}}}{\lambda_{2^\nu}} \right)^k \omega_k\left(f; \lambda_{2^\nu}^{-1}\right)_{B_2}. \qquad (18)$$

Таким образом, из неравенства (18) благодаря оценке (11) вытекает сходимость почти всюду ряда (13). В силу леммы 2 это влечет сходимость почти всюду ряда (12) при $-1 < \alpha < \dfrac{1}{2}$, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(i\lambda_n x\right)$$

суммируем методом $|C,\alpha|$, $-1 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Теперь рассмотрим вопрос о $|C,\alpha|$-суммируемости почти всюду ряда Фурье функции $f(x)\in B_2$ для значений $-1<\alpha<\dfrac{1}{2}$ в случае, когда ее показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют единственную предельную точку в нуле. При этом в качестве характеристики свойств функций используем величину $W_k(f;H)_{B_2}$ $(H\to\infty)$ — модуль усреднения порядка k функции $f(x)\in B_2$, которая определяется так:

$$W_k(f;H)_{B_p} = \sup_{T\ge H}\left\|f_{T^k}(x)\right\|_{B_p},$$

где $H>0,\ \ k\in N$,

$$f_{T^k}(x) = (2T)^{-k}\int\limits_{x-T}^{x+T}dt_1\int\limits_{t_1-T}^{t_1+T}dt_2\ldots\int\limits_{t_{k-2}-T}^{t_{k-2}+T}dt_{k-1}\int\limits_{t_{k-1}-T}^{t_{k-1}+T}f(t_k)\,dt_k.$$

Для отрицательных значений α можно устанавливать критерии $|C,\alpha|$-суммируемости рядов Фурье функций $f(x)\in B_2$. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для спектра* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *функции* $f(x)\in B_2$ *выполняются условия*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, \qquad \lambda_n = O\left\{n^{-\delta}\right\}, \quad n=1,2,\ldots,\delta>0.$$

Если выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\rho-1}W_k^{\beta}(f;n)_{B_2} < \infty, \tag{19}$$

где

$$0<\beta<2, \quad 0\le\gamma<1, \qquad k > \frac{\gamma+1-\beta/2}{\beta\delta}, \qquad \rho = \frac{\gamma+1-\beta/2}{\delta},$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^{\beta}$ *суммируем методом* $|C,-\gamma|$.

Доказательство. При исследовании признаков абсолютной сходимости рядов Фурье функции $f(x)\in B_2$ в случае, когда показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют единственную предельную точку в нуле, в работе [16] установлена оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|C_n|^{\beta} << \sum_{n=1}^{\infty} n^{(\gamma+1-\beta/2)/\delta-1}\,W_k^{\beta}(f;n)_{B_2}.$$

Значит, благодаря условиям (19) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma}|C_n|^{\beta} < \infty.$$

Поскольку $A_n^\gamma \asymp n^\gamma$, разделив последнее соотношение на числа A_n^γ, получим ряд $\sum_{n=1}^\infty |C_n|^\beta$, который на основании леммы 3 $|C,-\gamma|$-суммируем.

Следующий результат устанавливает некоторые критерии $|C,\alpha|$-суммируемости для $\alpha > 0$.

Теорема 4. *Пусть для спектра* $\Lambda\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ *функции* $f(x) \in B_2$ *выполняются условия*

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n, \quad \lambda_n = O\left\{n^{-\delta}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots, \delta > 0, \quad \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0.$$

Если выполнены условия

$$\sum_{n=1}^\infty 2^{\nu(1/2-\alpha)} W_k^\beta\left(f; \lambda_{2^\nu}^{-1}\right)_{B_2} < \infty, \quad -1 < \alpha < \frac{1}{2}, \tag{20}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^\nu C_n \exp(i\lambda_n x) \tag{21}$$

$|C,\alpha|$*-суммируем почти всюду для значений* $-1 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Доказательство. Повторяем рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2.

Поскольку

$$W_k^2\left(f; \lambda_{2^\nu}^{-1}\right)_{B_2} \geq \sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} C_n^2$$

или

$$\left\{\sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} C_n^2\right\}^{1/2} \leq W_k\left(f; \lambda_{2^\nu}^{-1}\right)_{B_2}, \tag{22}$$

из неравенства (16) в силу оценки (22) при $-1 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ вытекает

$$\sum_{\nu=0}^\infty 2^{-\nu(\alpha-1/2)} \left\{\sum_{n=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} C_n^2\right\} << \sum_{\nu=0}^\infty 2^{\nu(1/2-\alpha)} W_k\left(f; \lambda_{2^\nu}^{-1}\right)_{B_2}.$$

Таким образом, из оценки (20) следует сходимость почти всюду ряда (13). Это означает, что в силу леммы 2 и ряд (12) сходится почти всюду. Следовательно, ряд (21) является почти всюду $|C,\alpha|$-суммируемым при $-1 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Теорема 4 доказана.

1. *Грепачевская Л. В.* Абсолютная суммируемость ортогональных рядов // Мат. сб. – 1964. – **65 (107)**, № 3. – С. 370 – 389.
2. *Грепачевская Л. В.* Об абсолютной суммируемости методами Чезаро, Рисса и Зигмунда // Докл. АН СССР. – 1964. – **155**, № 3. – С. 173 – 179.

3. *Leindler L.* Uber die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1961. – **22**. – S. 243 – 268.
4. *Tandori K.* Über die orthogonalen Funktionen IX. (Absolute Summation) // Ibid. – 1960. – S. 292 – 299.
5. *Тиман М. Ф.* Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР. – 1961. – **26**, № 6. – С. 641 – 646.
6. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960.
7. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 2. – С. 37 – 40.
8. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехтеориздат, 1953.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.
10. *Хасанов Ю. Х.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических в смысле Безиковича функций // Докл. АН Республики Таджикистан. – 1996. – **39**, № 9-10. – С. 42 – 47.
11. *Sunouchi G.* On the absolute summability of Fourier series // J. Math. Soc. Jap. – 1949. – **1**, № 2. – P. 57 – 65.
12. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – Т. 1.
13. *Хасанов Ю. Х.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций // Тез. докл. конф. „Конструктивная теория функций”. – Санкт-Петербург, 1992. – С. 66 – 68.
14. *Барон С. А.* Введение в теорию суммируемости рядов. – Таллинн: Валгус, 1977.
15. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
16. *Хасанов Ю. Х.* Модуль гладкости — аппарат исследования абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций // Дифференц. и интеграл. уравнения и их прил. – Душанбе, 1996. – С. 67 – 72.

Получено 12.03.09