УДК 517.968.78

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян (Ин-т математики НАН Армении, Ереван)

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТИПА СВЕРТКИ НА ПОЛУОСИ

We investigate one class of vector integro-differential equations of a type of convolution on a semiaxis, by which a number of applied problems of the mathematical physics are described. By using the special three-factor decomposition of the initial matrix integro-differential operator, we prove the solvability of considered equations in certain functional spaces.

Досліджено один клас векторних інтегро-диференціальних рівнянь типу згортки на півосі, якими описується низка прикладних задач математичної фізики. З допомогою спеціального трифакторного розкладу вихідного математичного інтегро-диференціального оператора доведено розв'язність цих рівнянь у конкретних функціональних просторах.

1. Введение. Векторным интегро-дифференциальным уравнением вида

$$-\frac{d\varphi_i}{dx} + A_i\varphi_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{m}\int_0^\infty k_{ij}(x-t)\,\lambda_j(t)\,\varphi_j(t)\,dt, \tag{1.1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in (0, +\infty),$$

описываются ряд прикладных задач естествознания [1 – 4]. В частности, уравнения вида (1.1) возникают в эконометрике, кинетической теории металлов, в теории вероятностей и др. [1, 2, 4]. Исходя из прикладных соображений естественно предположить, что искомая вектор-функция $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)^T \in \mathfrak{M}$, где T — знак транспонирования, $\mathfrak{M}$ — класс абсолютно непрерывных вектор-функций на $(0, +\infty)$ медленного роста, т. е.

$$\varphi \in \mathfrak{M} \overset{\text{df}}{=} \Big\{ f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T : f_j \in AC(0, +\infty),\ \forall\, \varepsilon > 0 :$$

$$e^{-\varepsilon x} f_j(x) \to 0,\ x \to +\infty,\ j = 1, 2, \ldots, m \Big\}.$$

Здесь $AC(0, +\infty)$ — пространство абсолютно непрерывных на $(0, +\infty)$ функций. Числа $A_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, являются параметрами уравнения (1.1). Функции g_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, неотрицательны на $(0, +\infty)$ и принадлежат пространству $L(0, +\infty)$, функции λ_j: $0 \le \lambda_j \le 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, измеримы на $(0, +\infty)$. Ядерные матрицы-функции k_{ij} неотрицательны на $(0, +\infty)$, причем

$$k_{ij} \in L_1(R) \bigcap M(R), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} k_{ij}(x)\,dx = a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.2}$$

где матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^{m\times m}$ удовлетворяет условию субстохастичности

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overset{\text{df}}{=} \mu_j \le 1, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad \max_{1\le j\le m} \mu_j = 1. \tag{1.3}$$

Скалярное уравнение (1.1) рассматривалось в конкретных случаях, а именно, когда $\lambda = \mathrm{const}$, а ядро k представляет собой вполне монотонную функцию вида

$$k(x) = \int_a^b e^{-|x|s}\, d\sigma(s), \quad 0 < a < b \le +\infty,$$

где σ — монотонно неубывающая функция на $[a, b)$, удовлетворяющая равенству [2 – 8]

$$2\int_a^b \frac{1}{s}\, d\sigma(s) = 1.$$

В настоящей работе исследуются системы (1.1) в предположении, что искомая вектор-функция φ принадлежит классу $\mathfrak{M}$. В ряде случаев свойства соответствующего интегро-дифференциального оператора уравнения (1.1) описываются свойствами его символа. Наиболее сложным и интересным является уравнение в тех особых (неэллиптических) случаях, когда символ уравнения вырождается на вещественной оси. В предлагаемой работе мы как раз и рассматриваем уравнение (1.1) в неэллиптическом случае. Основной подход к решению системы (1.1) — это факторизация исходного интегро-дифференциального оператора в виде произведения одного простейшего матричного дифференциального оператора и двух матричных интегральных операторов типа свертки. Построенная факторизация сводит решение задачи (1.1) – (1.3) к решению трех более простых систем уравнений. Первая из них — система дифференциальных уравнений первого порядка диагонального типа, решение которой записывается автоматически. Вторая — диагональная система интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. Соответствующий матричный оператор этой системы в ряде случаев является обратимым в конкретных функциональных пространствах. Норма обратного оператора контролируется с помощью введенного свободного параметра $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$. И, наконец, третье уравнение представляет собой векторное интегральное уравнение почти сверточного типа. Здесь, используя методы теории векторных интегральных уравнений Винера – Хопфа, теории функций действительной переменной и ряд других методов, доказываем разрешимость этой системы в классе $\mathfrak{M}$.

2. Некоторые классы интегральных операторов. Пусть E_+ — одно из следующих банаховых пространств: $L_p(0, +\infty)$, $p \ge 1$, $M(0, +\infty)$, $C_u(0, +\infty)$, … (здесь $C_u(0, +\infty)$ — пространство непрерывных функций на $(0, +\infty)$, имеющих конечный предел в $+\infty$), а $L_1 \equiv L_1(-\infty, +\infty)$. Обозначим через Ω класс матричных интегральных операторов Винера – Хопфа [9]: $K \in \Omega$, если

$$(\mathbb{K}f)(x) = \int_0^{+\infty} K(x-t)\, f(t)\, dt, \tag{2.1}$$

где

$$K(x) = \left(k_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{m\times m}, \quad k_{ij} \in L_1, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.2}$$

а

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T \in E_+^{\times m} \equiv \underbrace{E_+ \times E_+ \times \ldots \times E_+}_{m}. \tag{2.3}$$

Нетрудно убедиться, что оператор $\mathbb{K}$ переводит $E_+^{\times m}$ в себя, причем в любом из пространств $E_+^{\times m}$ имеет место неравенство

$$\left\| \mathbb{K} \right\|_{E_+^{\times m}} \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| k_{ij}(x) \right| dx. \tag{2.4}$$

Действительно, пусть $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T \in E_+^{\times m}$ — произвольная функция. Имеем

$$\left\| \mathbb{K} f \right\|_{E_+^{\times m}} \equiv \sum_{i=1}^{m} \left\| (\mathbb{K} f)_i \right\|_{E_+} = \sum_{i=1}^{m} \left\| \sum_{j=1}^{m} \int_0^{+\infty} k_{ij}(x-t) f_j(t)\, dt \right\|_{E_+} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left\| \int_0^{+\infty} k_{ij}(x-t) f_j(t)\, dt \right\|_{E_+} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left\| (K_{ij} f_j)(x) \right\|_{E_+} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left\| K_{ij} \right\|_{E_+} \left\| f_j \right\|_{E_+}.$$

С другой стороны, известно, что норма скалярного интегрального оператора Винера – Хопфа в любом из пространств E_+ удовлетворяет неравенству [9 – 11]

$$\left\| K_{ij} \right\|_{E_+} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| k_{ij}(x) \right| dx, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.5}$$

Следовательно, с учетом (2.5) имеем

$$\left\| \mathbb{K} f \right\|_{E_+^{\times m}} \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{m} \left\| K_{ij} \right\|_{E_+} \sum_{j=1}^{m} \left\| f_j \right\|_{E_+} \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| k_{ij}(x) \right| dx \left\| f \right\|_{E_+^{\times m}},$$

откуда, в свою очередь, следует неравенство (2.4).

Введем следующие подклассы $\Omega^{\pm} \subset \Omega$ верхних и нижних матричных интегральных операторов типа Вольтерра: $\mathbb{V}^{\pm} \in \Omega^{\pm}$, если

$$(\mathbb{V}^+ f)(x) = \int_0^x V^+(x-t) f(t)\, dt, \qquad (\mathbb{V}^- f)(x) = \int_x^{\infty} V^-(t-x) f(t)\, dt, \tag{2.6}$$

где

$$V^{\pm}(x) = \left(v_{ij}^{\pm}(x) \right)_{i,j=1}^{m \times m}, \quad v_{ij}^{\pm} \in L_1(0, +\infty), \quad f \in E_+^{\times m}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.7}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\Omega = \Omega^{+} \oplus \Omega^{-}. \tag{2.8}$$

Известно также [11, 12], что если $\mathbb{K} \in \Omega$, $\mathbb{V}^{\pm} \in \Omega^{\pm}$, то $\mathbb{V}^{-}\mathbb{K} \in \Omega$, $\mathbb{K}\mathbb{V}^{+} \in \in \Omega$.

Пусть Ω^{Λ} — следующий расширенный класс матричных интегральных операторов: $\mathbb{K}^{\Lambda} \in \Omega^{\Lambda}$, если

$$(\mathbb{K}^{\Lambda} f)(x) = \int_0^{+\infty} K(x-t)\,\Lambda(t)\,f(t)\,dt, \quad f \in E_{+}^{\times m}, \tag{2.9}$$

где K задается посредством формулы (2.2), а матрица-функция Λ имеет вид

$$\Lambda = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_m(x)\big), \tag{2.10}$$

$0 \le \lambda_j(x) \le 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — измеримые функции на $(0, +\infty)$.

Операторы из класса Ω^{Λ} и их свойства будут использованы в дальнейших рассуждениях. Убедимся, что если $\mathbb{V}^{-} \in \Omega^{-}$, $\mathbb{K}^{\Lambda} \in \Omega^{\Lambda}$, то $\mathbb{V}^{-}\mathbb{K}^{\Lambda} \in \Omega^{\Lambda}$. Действительно, пусть $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T \in E_{+}^{\times m}$ — произвольная функция. Имеем

$$\left(\mathbb{V}^{-}\mathbb{K}^{\Lambda} f\right)(x) = \int_x^{+\infty} V^{-}(t-x) \int_0^{+\infty} K(t-y)\,\Lambda(y)\,f(y)\,dy\,dt,,$$

откуда, меняя порядок интегрирования, получаем

$$\left(\mathbb{V}^{-}\mathbb{K}^{\Lambda} f\right)(x) = \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} V^{-}(t-x)\,K(t-y)\,dt\right)\Lambda(y)\,f(y)\,dy =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} V^{-}(z)\,K(x-y+z)\,dz\right)\Lambda(y)\,f(y)\,dy = \int_0^{+\infty} T(x-y)\,\Lambda(y)\,f(y)\,dy,$$

где

$$T(x) = \int_0^{+\infty} V^{-}(z)\,K(x+z)\,dz. \tag{2.11}$$

Из теоремы Фубини (см. [13]) следует, что функция $T(x) = \left(T_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{m\times m}$, $T_{ij} \in L_1$. Следовательно, $\mathbb{V}^{-}\mathbb{K}^{\Lambda} \in \Omega^{\Lambda}$. Очевидно, что включение $\mathbb{V}^{-}\mathbb{K} \in \Omega$ является непосредственным следствием последнего при $\Lambda = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$. Что касается $\mathbb{K}^{\Lambda}\mathbb{V}^{+} \in \Omega^{\Lambda}$, то это не всегда верно.

3. Вспомогательные факты. Для дальнейшего изложения необходимы следующие факты.

Лемма 3.1. 1. *Пусть* $f \in W_p^{n-1}(0, +\infty)$, $p \geq 1$, n, $p \in \mathbb{N}$, *— вещественная функция на* $(0, +\infty)$. *Тогда при любом* $\alpha > 0$ *функция* $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} \times$ $\times\, f(t)\,dt$, $x > 0$, *имеет следующее свойство гладкости*: $F \in W_p^n(0, +\infty)$.

2. *Если* $f \in W_p^{n-1}(-\infty, +\infty)$, $p \geq 1$, p, $n \in \mathbb{N}$, *то при любом* $\alpha > 0$ $\Phi(x) =$ $= \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} f(t)\,dt \in W_p^n(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. По индукции можно легко проверить справедливость формулы

$$F^{(k)}(x) = -f^{(k-1)}(x) - \alpha f^{(k-2)}(x) - \ldots - \alpha^{k-1} f(x) + $$
$$+ \alpha^k \int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} f(t)\,dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

1. Пусть $f \in W_p^{n-1}(0, +\infty)$, тогда для завершения доказательства п. 1 достаточно показать, что $F \in L_p(0, +\infty)$, $p \geq 1$. Сначала рассмотрим случай $p > 1$. Для произвольного $\delta > 0$ рассмотрим интеграл

$$I_\delta = \int\limits_0^\delta \left| \int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} f(t)\,dt \right|^p dx.$$

Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$I_\delta \leq \int\limits_0^\delta \left(\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} |f(t)|\,dt \right)^p dx = \int\limits_0^\delta \left(\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)/p} |f(t)| e^{-\alpha(t-x)/q}\,dt \right)^p dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\delta \left(\left(\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \left(\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)}\,dt \right)^{1/q} \right)^p dx =$$

$$= \int\limits_0^\delta \int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} |f(t)|^p\,dt\,dx \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{p-1}, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, получаем

$$I_\delta \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{p-1} \left(\int\limits_0^\delta \int\limits_x^\delta e^{-\alpha(t-x)} |f(t)|^p\,dt\,dx + \int\limits_0^\delta \int\limits_\delta^\infty e^{-\alpha(t-x)} |f(t)|^p\,dt\,dx \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{p-1} \left(\int\limits_0^\delta |f(t)|^p e^{-\alpha t} \int\limits_0^t e^{\alpha x} dx\,dt + \int\limits_\delta^\infty |f(t)|^p e^{-\alpha t} \int\limits_0^\delta e^{\alpha x}\,dx\,dt \right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{p-1} \left(\frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\delta |f(t)|^p\,dt + \frac{1}{\alpha} \int\limits_\delta^\infty |f(t)|^p e^{-\alpha t} e^{\alpha\delta}\,dt \right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^p \left(\int_0^\delta |f(t)|^p\, dt \;+\; \int_\delta^\infty |f(t)|^p\, dt\right) \;=\; \left(\frac{1}{\alpha}\right)^p \int_0^\infty |f(t)|^p\, dt \;<\; +\infty,$$

откуда в силу произвольности числа $\delta > 0$ заключаем, что F принадлежит $L_p(0, +\infty)$. Пусть теперь $p = 1$. Тогда, используя равенство (3.1) и теорему Фубини, можно также доказать, что F принадлежит $L_p(0, +\infty)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$. Справедливость п. 2 доказывается аналогично.

Лемма доказана.

4. Задача факторизации. ***4.1. Постановка задачи.*** Пусть все элементы матрицы $A = \mathrm{diag}\,(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ положительны, т. е. $A_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Уравнение (1.1) запишем в операторной форме

$$(\mathbb{D} - A\mathbb{J} + \mathbb{K}^\Lambda)\varphi + g \;=\; 0, \tag{4.1}$$

где $\mathbb{D}$ — матричный дифференциальный оператор вида $\mathbb{D} = \mathrm{diag}\,(D, D, \ldots$ $\ldots, D)$, $(D\rho)(x) = \dfrac{d\rho}{dx}$, $\mathbb{J}$ — единичный матричный оператор порядка $m \times m$, а $\mathbb{K}^\Lambda$ задается посредством формул (2.1) – (2.3).

Рассмотрим следующую задачу факторизации: для каждой диагональной матрицы $\alpha = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и заданных операторов $A\mathbb{J}$ и $\mathbb{K}^\Lambda \in \Omega^\Lambda$ найти такие операторы $\mathbb{U} \in \Omega^-$, $\mathbb{W}^\Lambda \in \Omega^\Lambda$, чтобы имело место разложение

$$\mathbb{D} - A\mathbb{J} + \mathbb{K}^\Lambda \;=\; (\mathbb{D} - \alpha\mathbb{J})(\mathbb{J} - \mathbb{U})(\mathbb{J} - \mathbb{W}^\Lambda). \tag{4.2}$$

Факторизацию (4.2) будем понимать как равенство интегральных операторов, действующих в

$$W_1^1(0, +\infty) \times W_1^1(0, +\infty) \times \ldots \times W_1^1(0, +\infty) \;\equiv\; H_{1,1}^{\times m}(0, +\infty). \tag{4.3}$$

4.2. Основная факторизационная теорема. Основным результатом настоящей работы является следующая факторизационная теорема.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathbb{K}^\Lambda \in \Omega^\Lambda$, $A \succ 0$ — *диагональная матрица с положительными элементами. Тогда для каждого* $\alpha = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, *имеет место факторизация* (4.2), *где* $\mathbb{U} \in \Omega^-$, $\mathbb{W}^\Lambda \in \Omega^\Lambda$ — *операторы, ядра которых задаются соответственно по формулам*

$$U(x) \;=\; \mathrm{diag}\big(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)\big), \qquad u_j(x) \;=\; (\alpha_j - A_j)\, e^{-A_j x}\theta(x),$$
$$\theta(x) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$W^\Lambda(x, t) \;=\; W(x - t)\,\Lambda(t), \qquad W(x) \;=\; \big(w_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^{m\times m},$$
$$w_{ij}(x) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-A_i t} k_{ij}(x + t)\, dt \in W_1^1(-\infty, +\infty), \quad i, j = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.5}$$

а $\Lambda(t)$ *— диагональная матрица, задаваемая посредством* (2.10). *Кроме того, имеют место следующие априорные оценки*:

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x)\,dx \;\le\; \max_{1\le i\le m}\left(\frac{1}{A_i}\right)\mu_j\,, \tag{4.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{dw_{ij}}{dx}\right|dx \;\le\; 2\mu_j\,, \quad j=1,2,\ldots,m. \tag{4.7}$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{Y}^{\alpha}$ — обратный оператор матричного дифференциального оператора $\alpha\mathbb{J}-\mathbb{D}$ в пространстве $H_{1,1}^{\times m}(0,+\infty)$. Заметим, что $\mathbb{Y}^{\alpha}\in\Omega^{-}$ и имеет вид

$$\mathbb{Y}^{\alpha} \;=\; \operatorname{diag}\left(Y^{\alpha_1}, Y^{\alpha_2},\ldots,Y^{\alpha_m}\right), \qquad \left(Y^{\alpha_j}\rho\right)(x) \;=\; \int_{x}^{+\infty} e^{-\alpha_j(t-x)}\rho(t)\,dt\,,$$
$$\alpha_j>0\,, \quad \rho\in E_+\,, \quad j=1,2,\ldots,m. \tag{4.8}$$

Обозначим через $\mathbb{P}^{\Lambda}$ произведение операторов $\mathbb{Y}^{\alpha}$ и $\mathbb{K}^{\Lambda}$: $\mathbb{P}^{\Lambda}=\mathbb{Y}^{\alpha}\mathbb{K}^{\Lambda}$. Из результатов п. 2 следует, что $\mathbb{P}^{\Lambda}\in\Omega^{\Lambda}$, ядро которого имеет вид

$$P^{\Lambda}(x,t) \;=\; P(x-t)\,\Lambda(t)\,, \qquad P(x) \;=\; \left(p_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{m\times m},$$
$$p_{ij}(x)=\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha_i t}\,k_{ij}(t+x)\,dt\,, \quad i,j=1,2,\ldots,m. \tag{4.9}$$

Покажем, что функции p_{ij} удовлетворяют двум оценкам

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{ij}(x)\,dx \;\le\; \max_{1\le i\le m}\left(\frac{1}{\alpha_i}\right)\mu_j\,, \tag{4.10}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{dp_{ij}}{dx}\right|dx \;\le\; 2\mu_j\,, \quad j=1,2,\ldots,m. \tag{4.11}$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{ij}(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x}^{+\infty} e^{-\alpha_i(\tau-x)}\,k_{ij}(\tau)\,d\tau\,dx\,,$$

где, изменяя порядок интегрирования, с использованием теоремы Фубини и с учетом (1.2) получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{ij}(x)\,dx \;=\; \frac{1}{\alpha_i}\,a_{ij}\,,$$

откуда и следует неравенство (4.10).

Докажем неравенство (4.11). Из (4.9) видно, что

$$\frac{dp_{ij}}{dx} = -k_{ij}(x) + \alpha_i \int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha_i (t-x)}\, k_{ij}(t)\, dt\,,$$

откуда имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dp_{ij}}{dx} \right| dx \;\le\; 2\, a_{ij}\,, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.12}$$

Очевидно, что из (4.12) следует неравенство (4.11). Оператор $\mathbb{D} - A\mathbb{J} + \mathbb{K}^{\Lambda}$ представим в виде

$$\mathbb{D} - A\mathbb{J} + \mathbb{K}^{\Lambda} = \mathbb{D} - \alpha\mathbb{J} + \alpha\mathbb{J} - A\mathbb{J} + \mathbb{K}^{\Lambda}.$$

С учетом (4.8), (4.9) из последнего равенства находим

$$\mathbb{D} - A\mathbb{J} + \mathbb{K}^{\Lambda} = (\mathbb{D} - \alpha\mathbb{J})\Big(\mathbb{J} - \mathbb{P}^{\Lambda} - (\alpha - A)\,\mathbb{Y}^{\alpha}\Big). \tag{4.13}$$

Обозначим через $\mathbb{J} + \mathbb{R}^{\alpha}$ резольвенту матричного оператора $\mathbb{J} - (\alpha - A)\,\mathbb{Y}^{\alpha}$ в пространстве $H_{1,1}^{\times m}(0, +\infty)$. Тогда нетрудно убедиться, что $\mathbb{R}^{\alpha} \in \Omega^{-}$ и $\mathbb{R}^{\alpha} = \operatorname{diag}(R^{\alpha_1}, R^{\alpha_2}, \ldots, R^{\alpha_m})$, где

$$(R^{\alpha_i}\rho)(x) = (\alpha_i - A_i) \int\limits_x^{+\infty} e^{-A_i (t-x)}\, \rho(t)\, dt\,, \quad \rho \in E_+\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.14}$$

Используя (2.11), заключаем, что $\mathbb{R}^{\alpha}\mathbb{P}^{\Lambda} \in \Omega^{\Lambda}$. Следовательно,

$$\mathbb{W}^{\Lambda} \equiv \mathbb{P}^{\Lambda} + \mathbb{R}^{\alpha}\mathbb{P}^{\Lambda} \in \Omega^{\Lambda}. \tag{4.15}$$

Простыми вычислениями можно убедиться, что ядро оператора $\mathbb{W}^{\Lambda}$ задается посредством (4.5). Таким образом, из (4.13) с учетом (4.14), (4.15) получаем факторизацию (4.2). Нетрудно убедиться, что матричный оператор $\mathbb{W}^{\Lambda}$ действует в пространстве $H_{1,1}^{\times m}(0, +\infty)$. Оценки (4.6) и (4.7) доказываются, как и (4.10), (4.11).

Теорема доказана.

4.3. Связь между первыми моментами ядер K и W. Для дальнейшего изложения нам существенно понадобятся существование и знак первого момента матричного ядра W (в компонентном смысле). С этой целью в следующей лемме мы установим связь между первыми моментами матричных ядер K и W.

Лемма 4.1. *Если $A \succ 0$ и существует $\nu(K) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)\, dt < +\infty$, то существует и $\nu(W)$, причем для их элементов имеют место соотношения*

$$\nu(w_{ij}) = \frac{\nu(k_{ij})}{A_i} - \frac{a_{ij}}{A_i^2}\,, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство. Из (4.5) на основании теоремы Фубини имеем

$$\nu(w_{ij}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x w_{ij}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{0}^{+\infty} e^{-A_i t} k_{ij}(x+t)\,dt\,dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-A_i t} \int_{-\infty}^{+\infty} x k_{ij}(x+t)\,dx\,dt,$$

откуда, обозначая $\tau = x + t$, окончательно получаем

$$\nu(w_{ij}) = \int_{0}^{+\infty} e^{-A_i t} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau - t)\, k_{ij}(\tau)\,d\tau\,dt = \frac{\nu(k_{ij})}{A_i} - \int_{-\infty}^{+\infty} k_{ij}(\tau)\,d\tau \int_{0}^{+\infty} t e^{-A_i t} dt =$$

$$= \frac{\nu(k_{ij})}{A_i} - \frac{a_{ij}}{A_i^2}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Лемма доказана.

5. Разрешимость уравнений (1.1) – (1.3). В этом пункте будем рассматривать вопросы разрешимости системы (1.1). При этом воспользуемся факторизацией (4.2).

Введем суммы

$$\rho_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij}}{A_i}, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.1}$$

и обозначим

$$\rho = \max_{1 \le j \le m} \rho_j. \tag{5.2}$$

Если $\rho < 1$, то задачу (1.1) – (1.3) условно назовем диссипативной, если $\rho = 1$ — консервативной, а если $\rho > 1$ — критической. Рассмотрим эти случаи отдельно.

***5.1. Диссипативная задача* (1.1) – (1.3).** Пусть число ρ, задаваемое посредством (5.1), (5.2), меньше единицы. Тогда, используя факторизацию (4.2), уравнение (1.1) записываем в виде

$$(\mathbb{D} - \alpha\mathbb{J})(\mathbb{J} - \mathbb{U})(\mathbb{J} - \mathbb{W}^{\Lambda})\varphi + g = 0. \tag{5.3}$$

Решение системы (5.3) сводится к последовательному решению следующих связанных систем уравнений:

$$(\mathbb{D} - \alpha\mathbb{J})\psi = -g, \tag{5.4}$$

$$(\mathbb{J} - \mathbb{U})\chi = \psi, \tag{5.5}$$

$$(\mathbb{J} - \mathbb{W}^{\Lambda})\varphi = \chi. \tag{5.6}$$

Сначала рассмотрим уравнение (5.4). Запишем его в виде

$$\frac{d\psi_i}{dx} + g_i(x) = \alpha_i \psi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.7}$$

С учетом леммы 3.1 нетрудно убедиться, что диагональная система дифференциальных уравнений (5.7) в пространстве $H_{1,1}^{\times m}(0, +\infty)$ имеет единственное решение вида

$$\psi(x) = \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_m(x)\big)^T, \qquad \psi_j = \int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha_j(t-x)} g_j(t)\, dt, \quad (5.8)$$

$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

Рассмотрим теперь систему уравнений (5.5):

$$\chi_i(x) = \psi_i(x) + (\alpha_i - A_i) \int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha_i(t-x)} \chi_i(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \quad (5.9)$$

Используя лемму 3.1, простыми вычислениями можно убедиться, что уравнение (5.9) в $H_{1,1}^{\times m}(0, +\infty)$ имеет единственное решение, задаваемое посредством формулы

$$0 \le \chi_i(x) = \int\limits_x^{+\infty} e^{-A_i(t-x)} g_i(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \quad (5.10)$$

Перейдем к рассмотрению системы (5.6):

$$\varphi_i(x) = \chi_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_0^{+\infty} \omega_{ij}(x-t)\, \lambda_j(t)\, \varphi_j(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad (5.11)$$

или в матричной форме

$$\varphi(x) = \chi(x) + \int\limits_0^{+\infty} W(x-t)\, \Lambda(t)\, \varphi(t)\, dt, \quad (5.12)$$

где $\varphi(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)\big)^T$, $\chi(x) = \big(\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_m(x)\big)^T$, а матрицы-функции W и Λ задаются посредством формул (4.5) и (2.10) соответственно.

Для этой системы рассмотрим следующие итерации:

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \chi(x) + \int\limits_0^{+\infty} W(x-t)\, \Lambda(t)\, \varphi^{(n)}(t)\, dt, \quad (5.13)$$

где $\varphi^{(k)} = \Big(\varphi_1^{(k)}(x), \varphi_2^{(k)}(x), \ldots, \varphi_m^{(k)}(x)\Big)^T$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\varphi^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Заметим, что последовательность вектор-функций $\varphi^{(n)} = \Big(\varphi_1^{(n)}(x), \varphi_2^{(n)}(x), \ldots, \varphi_m^{(n)}(x)\Big)^T$ монотонно возрастает по n: $\varphi^{(n+1)} \succeq \varphi^{(n)}$, т. е. $\varphi_j^{(n+1)}(x) \ge \varphi_j^{(n)}(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Этот простой факт докажем по индукции. Пусть $n = 0$, тогда из (5.10) видно, что $\varphi^{(1)}(x) = \chi(x) \succeq$

$\succeq \varphi^{(0)}(x)$. Предположим теперь, что при $n = k$ утверждение верно, и докажем его при $n = k + 1$. Имеем

$$\varphi^{(k+2)}(x) = \chi(x) + \int_0^{+\infty} W(x-t)\,\Lambda(t)\,\varphi^{(k+1)}(t)\,dt. \tag{5.14}$$

Поскольку ядро $W^{\Lambda}(x, t)$ представляет собой неотрицательную матрицу-функцию, из (5.14) окончательно получаем

$$\varphi^{(k+2)}(x) \succeq \chi(x) + \int_0^{+\infty} W(x-t)\,\Lambda(t)\,\varphi^{(k)}(t)\,dt = \varphi^{(k+1)}(x). \tag{5.15}$$

Используя (1.2), (5.13), аналогичным образом можно доказать следующее:

$$\chi \preceq \varphi^{(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots; \qquad \varphi^{(n)} \in H_{1,1}^{\times m}(0, +\infty), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.16}$$

В силу (5.16) с учетом монотонности $\varphi^{(n)} = \left(\varphi_1^{(n)}(x), \varphi_2^{(n)}(x), \ldots, \varphi_m^{(n)}(x)\right)^T$ из (5.13) получим

$$\left\|\varphi^{(n+1)}\right\|_{L_1^{\times m}(0,+\infty)} = \|\chi\|_{L_1^{\times m}(0,+\infty)} + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \int_0^{+\infty} w_{ij}(x-t)\,\lambda_j(t)\,\varphi_j^{(n)}(t)\,dt\,dx \le$$

$$\le \|\chi\|_{L_1^{\times m}(0,+\infty)} + \rho\left\|\varphi^{(n+1)}\right\|_{L_1^{\times m}(0,+\infty)}, \tag{5.17}$$

где через $\|f\|_{L_1^{\times m}(0,+\infty)}$ обозначена норма

$$\|f\|_{L_1^{\times m}(0,+\infty)} = \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L_1(0,+\infty)}, \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T.$$

Следовательно, из (5.17) имеем $\left\|\varphi^{(n+1)}\right\|_{L_1^{\times m}(0,+\infty)} \le \dfrac{\|\chi\|_{L_1^{\times m}(0,+\infty)}}{1-\rho}$. Таким образом, используя теорему Б. Леви о монотонной сходимости (см. [14]), заключаем, что последовательность вектор-функций $\varphi^{(n)} = \left(\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_m^{(n)}\right)^T$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, почти всюду в $(0, +\infty)$ имеет предел $\varphi(x) = \left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \right.$ $\left.\ldots, \varphi_m(x)\right)^T \in L_1^{\times m}(0, +\infty)$.

Докажем, что предельная вектор-функция является решением системы (5.11). Из (5.13) следует, что

$$\varphi_i^{(n+1)}(x) \le \chi_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{+\infty} w_{ij}(x-t)\,\lambda_j(t)\,\varphi_j(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

откуда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\varphi_i(x) \;\le\; \chi_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{+\infty} w_{ij}(x-t)\,\lambda_j(t)\,\varphi_j(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (5.18)$$

С другой стороны,

$$\chi_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{+\infty} w_{ij}(x-t)\,\lambda_j(t)\,\varphi_j^{(n)}(t)\,dt \;\le\; \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

откуда в силу теоремы Лебега (см. [14]) имеем

$$\chi_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{+\infty} w_{ij}(x-t)\,\lambda_j(t)\,\varphi_j(t)\,dt \;\le\; \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (5.19)$$

Таким образом, из неравенств (5.18) и (5.19) следует, что $\varphi(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)\big)^T$ является решением системы (5.11). Теперь убедимся, что $\varphi \in H_{1,1}^{\times m}(0, +\infty)$. Поскольку функции k_{ij} принадлежат $L_1(R) \bigcap M(R)$, $i, j = 1, \ldots, m$, используя равенства

$$\frac{dw_{ij}}{dx} \;=\; -k_{ij}(x) + A_i \int_x^{+\infty} e^{-A_i(t-x)}\,k_{ij}(t)\,dt, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

с учетом известной теоремы и дифференцируемости под знаком интеграла (см. [15]) получаем

$$\frac{d\varphi_i}{dx} \;=\; \frac{d\chi_i}{dx} + \sum_{j=1}^{m} \int_0^{+\infty} \frac{\partial w_{ij}(x-t)}{\partial x}\,\lambda_j(t)\,\varphi_j(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (5.20)$$

Далее, так как $\chi_i \in W_1^1(0, +\infty)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, с учетом (4.5) из (5.20) получаем $\varphi \in H_{1,1}^{\times m}(0, +\infty)$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Предположим, что* $0 \preceq g \in L_1^{\times m}(0, +\infty)$, $0 \le \lambda_j(x) \le 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, *— измеримые функции. Тогда если* $\rho < 1$, *то задача* (1.1) – (1.3) *в пространстве* $H_{1,n}^{\times m}(0, +\infty)$ *имеет положительное решение*.

Используя лемму 3.1, получаем такое следствие.

Следствие. *Предположим, что* $0 \preceq g \in L_p^{\times m}(0, +\infty)$, $0 \le \lambda_j(x) \le 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, *— измеримые функции,* $k_{ij} \in W_p^{n-1}(R) \bigcap W_\infty^{n-1}(R)$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, *и удовлетворяют условию* (1.2). *Тогда если* $\rho < 1$, *то задача* (1.1) – (1.3) *в пространстве* $H_{p,n}^{\times m}(0, +\infty)$ *имеет положительное решение, где* $H_{p,n}^{\times m}(0, +\infty) \equiv W_p^n(0, +\infty) \times W_p^n(0, +\infty) \times \ldots \times W_p^n(0, +\infty)$.

5.2. ***Консервативная задача*** **(1.1) – (1.3).** Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.2. *Предположим, что* $0 \preceq g \in L_1^{\times m}(0, +\infty)$, $0 \le \lambda_j(x) \le 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$, *— измеримые функции на* $(0, +\infty)$. *Тогда в случае* $\rho = 1$, *если* $\nu(k_{ij}) \le$

$\leq \dfrac{a_{ij}}{A_i}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, *задача* (1.1) – (1.3) *в классе* $\mathfrak{M}$ *имеет покомпонентно положительное решение с асимптотикой*

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = o\left(\int_0^x S(t)\,dt\right), \quad x \to +\infty,$$

где $S(x)$ — *положительная покомпонентно возрастающая вектор-функция, для которой* $S(0) = (1, 1, \ldots, 1)^T$, *причем если* $\nu(k_{ij}) = \dfrac{a_{ij}}{A_i}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, *то* $S(x) = O(x)$, $x \to +\infty$, *а если* $\nu(k_{ij}) < \dfrac{a_{ij}}{A_i}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, *то* $S(x) = O(1)$, $x \to +\infty$.

Доказательство. Используя факторизацию (4.2) и последовательно решая уравнения (5.4) и (5.5) (как в доказательстве теоремы 5.1), получаем систему уравнений (5.11).

Заметим, что в этом случае $\rho = \max\limits_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{+\infty} w_{ij}(x)\,dx = 1$. Наряду с уравнением (5.11) рассмотрим вспомогательное матричное уравнение

$$F_i(x) = \chi_i(x) + \sum_{j=1}^m \int_0^{+\infty} w_{ij}(x - t)\,F_j(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

или в матричной форме

$$F(x) = \chi(x) + \int_0^{+\infty} W(x - t)\,F(t)\,dt. \tag{5.21}$$

В работах [10, 16] доказано, что если существует $\nu(W) \preceq 0$, то уравнение (5.21) имеет положительное локально интегрируемое решение, и итерации

$$\begin{gathered} F^{(n+1)}(x) = \chi(x) + \int_0^{+\infty} W(x - t)\,F^{(n)}(t)\,dt, \\ F^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)^T, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{5.22}$$

почти всюду в $(0, +\infty)$ сходятся к минимальному (покомпонентно) неотрицательному решению уравнения (5.21), причем

$$\int_0^x F(t)\,dt = o\left(\int_0^x S(t)\,dt\right), \quad x \to +\infty$$

(о свойствах функции S см. в формулировке теоремы 5.2).

Сравним итерации (5.13) с итерациями (5.22). С учетом $\chi \succeq 0$ получаем $\chi \preceq \varphi^{(n)} \uparrow$ по n и $\varphi^{(n)} \preceq F^{(n)} \preceq F$ почти всюду в $(0, +\infty)$. Следовательно, существует почти всюду в $(0, +\infty)$ предел $\varphi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi^{(n)}(x)$, причем $0 \preceq$

$\preceq \varphi(x) \preceq F(x)$. Нетрудно убедиться, что предельная вектор-функция φ является решением уравнения (5.11), причем

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt = o\left(\int_0^x S(t)\,dt\right), \quad x \to +\infty. \tag{5.23}$$

Аналогичным образом проверяется, что φ — абсолютно непрерывная функция. Из интегральной асимптотики (5.23) следует, что $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)^T \in \mathfrak{M}$.

Теорема доказана.

***5.3. Критическая задача* (1.1) – (1.3).** Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.3. *Предположим, что выполнены следующие условия*:

1) $0 \preceq g \in L_1^{\times m}(0,+\infty)$,

2) $0 \le \lambda_j(x) \le 1$, $\lambda_j \in W_\infty^1(0, +\infty)$, *причем* $c = \max\limits_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^m c_{ij} < 1$, *где*

$$c_{ij} = \operatorname{vrai}\max_{t\in(0,+\infty)} \int_{-t}^{+\infty} \lambda_i(t+\tau)\, w_{ij}(\tau)\, d\tau, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда задача (1.1) – (1.3) *в случае* $\rho > 1$ *в пространстве Соболева* $H_{1,1,\Lambda}^{\times m}(0,+\infty)$ *с весом* $\Lambda(x)$ *имеет положительное решение. Здесь* $H_{1,1,\Lambda}^{\times m}(0,+\infty) = W_{1,\lambda_1}^1(0,+\infty) \times \ldots \times W_{1,\lambda_m}^1(0,+\infty)$, *где* $W_{1,\lambda_j}^1(0,+\infty)$ — *пространство Соболева с весом* λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство. Здесь также сначала решаем уравнения (5.4) и (5.5), затем переходим к рассмотрению уравнения (5.11). Умножим слева обе части этой системы на матрицу-функцию $\Lambda(x)$. Тогда, обозначая $\xi_i(x) = \lambda_i(x)\varphi_i(x)$, $q_i(x) = \lambda_i(x)\chi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, получаем следующую систему интегральных уравнений относительно искомой вектор-функции $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^T$:

$$\xi_i(x) = q_i(x) + \lambda_i(x) \sum_{j=1}^m \int_0^{+\infty} w_{ij}(x-t)\,\xi_j(t)\,dt, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

или в матричной форме

$$\xi(x) = q(x) + \Lambda(x) \int_0^{+\infty} W(x-t)\,\xi(t)\,dt. \tag{5.24}$$

Рассмотрим итерации

$$\xi^{(n+1)}(x) = q(x) + \Lambda(x) \int_0^{+\infty} W(x-t)\,\xi^{(n)}(t)\,dt,$$

$$\xi^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)^T, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Легко проверить, что $q \preceq \xi^{(n)} \uparrow$ по n (покомпонентно) и $\xi^{(n)} \in L_1^{\times m}(0, +\infty)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно, с учетом изложенного имеем

$$\left\|\xi^{(n+1)}\right\|_{L_1^{\times m}(0,\,+\infty)} \leq \|q\|_{L_1^{\times m}(0,\,+\infty)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int_0^{+\infty}\lambda_i(x)\sum_{j=1}^{m}\int_0^{+\infty}w_{ij}(x-t)\,\xi_j^{(n+1)}(t)\,dt\,dx =$$

$$= \|q\|_{L_1^{\times m}(0,\,+\infty)} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\int_0^{+\infty}\lambda_i(x)\int_0^{+\infty}w_{ij}(x-t)\,\xi_j^{(n+1)}(t)\,dt\,dx,$$

откуда, изменяя порядок интегрирования, с учетом теоремы Фубини получаем

$$\left\|\xi^{(n+1)}\right\|_{L_1^{\times m}(0,\,+\infty)} \leq \|q\|_{L_1^{\times m}(0,\,+\infty)} +$$

$$+\left\|\xi^{(n+1)}\right\|_{L_1^{\times m}(0,\,+\infty)}\sum_{i=1}^{m}c_{ij} \leq \|q\|_{L_1^{\times m}(0,\,+\infty)} + c\left\|\xi^{(n+1)}\right\|_{L_1^{\times m}(0,\,+\infty)}.$$

Тогда

$$\left\|\xi^{(n+1)}\right\|_{L_1^{\times m}(0,\,+\infty)} \leq \frac{1}{1-c}\|q\|_{L_1^{\times m}(0,\,+\infty)}.$$

Таким образом, из полученного с учетом теоремы Б. Леви следует, что последовательность вектор-функций $\xi^{(n)} = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}\right)^T$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, почти всюду в $(0, +\infty)$ сходится к суммируемой функции $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_m)^T$. Как в доказательстве теоремы 5.1, здесь проверяется, что ξ является решением уравнения (5.24) и $\xi \in H_{1,1}^{\times m}(0, +\infty)$. Поскольку $0 \leq \lambda_j(x) \leq 1$, $\lambda_j(x) \in W_\infty^1(0, +\infty)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, нетрудно убедиться, что $\varphi \in$ $\in H_{1,1,\Lambda}^{\times m}(0, +\infty)$.

Теорема доказана.

1. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. М.* Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979. – Т. 10.
2. *Sargan J. D.* The distribution of wealth // Econometrica. – 1957. – № 25. – P. 568 – 590.
3. *Хачатрян Х. А.* О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях, возникающих в физической кинетике // Изв. НАН Республики Армения. Математика. – 2004. – **39**, № 3. – С. 72 – 80.
4. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Электронная плазма в полубесконечном металле при наличии переменного электрического поля // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2001. – **41**, № 8. – С. 1229 – 1241.
5. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* О разрешимости одной краевой задачи физической кинетики // Изв. НАН Республики Армения. Математика. – 2004. – **41**, № 6. – С. 65 – 74.
6. *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A.* On solvability of some integral-differential equation with sum-difference kernels // Int. J. Pure and Appl. Math. (India). – 2005. – **2**, № 1. – P. 1 – 13.
7. *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh.* A. On structure of solution of one integral-differential equation with completely monotonic kernel // Int. Conf. "Harmonic Analysis and Approximations." – 2005. – P. 42, 43.
8. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* К вопросу разрешимости одного интегро-дифференциального уравнения с почти суммарно-разностным ядром // Математика в высшей школе. – 2006. – **2**, № 4. – С. 26 – 31.

9. *Wiener N., Hopf N.* Über eine Klasse singularer Integral eichungen Sitzing. – Berlin, 1931. – S. 696 – 706.
10. *Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1984. – **22**. – С. 175 – 242.
11. *Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А.* Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения // Мат. сб. – 1975. – **97**. – С. 35 – 58.
12. *Енгибарян Н. Б., Арабаджян Л. Г.* О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 8. – С. 1442 – 1452.
13. *Колмогоров А. Н., Фомин В. С.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981.
14. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
15. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1966. – Т. 2.
16. *Арабаджян Л. Г.* Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 9. – С. 1618 – 1622.

Получено 11.03.08