УДК 517. 98

М. Ф. Городній, О. В. Вятчанінов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ ОДНІЄЇ РЕКУРЕНТНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We establish necessary and sufficient conditions under which the sequence $x_0 = y_0$, $x_{n+1} = Ax_n + y_{n+1}$, $n \ge 0$, is bounded for every bounded sequence $\{y_n : n \ge 0\} \subset \left\{ x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} D(A^n) \,\middle|\, \sup_{n \ge 0} \| A^n x \| < \infty \right\}$. Here, A is a closed operator with the domain $D(A)$ in a complex Banach space.

Установлены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых последовательность $x_0 = y_0$, $x_{n+1} = Ax_n + y_{n+1}$, $n \ge 0$, ограничена для каждой ограниченной последовательности $\{y_n : n \ge 0\} \subset \left\{ x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} D(A^n) \,\middle|\, \sup_{n \ge 0} \| A^n x \| < \infty \right\}$. Здесь A — замкнутый оператор в комплексном банаховом пространстве с областью определения $D(A)$.

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $\overline{0}$ — нульовий елемент у просторі B, $\mathcal{L}(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють із B в B. Нехай A — замкнений оператор, що діє в B, з областю визначення $D(A)$.

Покладемо $D^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$. Якщо $\{y_n : n \ge 0\} \subset D^{\infty}$, то коректно визначеною є така рекурентно задана послідовність:

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0, \\ x_{n+1} &= Ax_n + y_{n+1}, \quad n \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Покладемо

$$V := \left\{ y \in D^{\infty} \,\middle|\, \| y \|_* := \sup_{n \ge 0} \| A^n y \| < \infty \right\}.$$

Далі вважатимемо, що $V \ne \{\overline{0}\}$.

Зазначимо, що якщо оператор A має таку спектральну множину σ, що $\sigma \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, D_{σ} — інваріантний підпростір A, що відповідає σ, то звуження A_{σ} оператора A на D_{σ} є лінійним обмеженим оператором із спектром σ [1] (гл. 7), а отже, $D_{\sigma} \subset V$.

Мета цієї роботи — вказати необхідні та достатні умови на оператор A, при виконанні яких виконується така умова.

Умова обмеженості. Для довільної обмеженої за нормою $\|\cdot\|$ послідовності $\{y_n : n \ge 0\}$ із V визначена за правилом (1) рекурентна послідовність $\{x_n : n \ge 0\}$ теж є обмеженою за цією нормою.

Зауважимо, що для випадку $A \in \mathcal{L}(B)$ аналогічне питання досліджено, наприклад, в [2].

1. Допоміжні твердження.

Лема 1. $(V, \|\cdot\|_*)$ — *комплексний банахів простір.*

Доведення. Неважко перевірити, що V — лінійна множина і $\|\cdot\|_*$ — норма на V. Доведемо повноту.

Нехай послідовність $\{x_m\}$ фундаментальна в $(V, \|\cdot\|_*)$. Тоді

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \quad \forall\, n \ge N \quad \forall\, m \ge N:$$

$$\|x_n - x_m\|_* = \sup_{p \ge 0} \left\| A^p (x_n - x_m) \right\| < \varepsilon. \tag{2}$$

Тому послідовності $\{x_m\}$ та $\{Ax_m\}$ фундаментальні за нормою $\|\cdot\|$. Із повноти B та замкненості оператора A випливає, що знайдеться такий елемент $x \in D(A)$, що $x_m \to x$, $Ax_m \to Ax$ при $m \to \infty$ за нормою $\|\cdot\|$.

Нехай тепер $A^k x_m \to A^k x$, $m \to \infty$, при фіксованому $k \ge 1$. Внаслідок (2) послідовність $\left\{A^{k+1} x_m : m \ge 0\right\}$ є фундаментальною, а отже, з урахуванням замкненості A, $x \in D(A^{k+1})$ і $A^{k+1} x_m \to A^{k+1} x$, $m \to \infty$. Таким чином, за індукцією $x \in D^\infty$.

Здійснюючи граничний перехід у (2) при $m \to \infty$, отримуємо, що $x \in V$ та $x_n \to x$, $n \to \infty$, за нормою $\|\cdot\|_*$.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай A — замкнений оператор. $(V, \|\cdot\|)$ — повний простір тоді і лише тоді, коли $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_*$, тобто*

$$\exists\; 0 < c_1 \le c_2 \qquad \forall\, x \in V: \quad c_1 \|x\| \le \|x\|_* \le c_2 \|x\|. \tag{3}$$

Доведення. Якщо виконується умова (3), то, використовуючи лему 1, неважко переконатись, що простір $(V, \|\cdot\|)$ є повним.

Навпаки, нехай $(V, \|\cdot\|)$ — повний простір. Для кожного $x \in V$ виконується нерівність $\|x\|_* \ge \|x\|$. Отже, досить довести, що

$$\exists\, c_2 \ge 1 \qquad \forall\, x \in V: \quad \|x\|_* \le c_2 \|x\|.$$

Розглянемо оператор $\tilde{A}$, який є звуженням оператора A на V. Тоді $\tilde{A}$: $V \to V$ та $\tilde{A} \in \mathcal{L}\left((V, \|\cdot\|_*)\right)$, $\|\tilde{A}\|_* \le 1$. Тут і в подальшому через $\|\tilde{A}\|_*$ та $\|\tilde{A}\|$ будемо позначати норму оператора $\tilde{A}$ у просторах $(V, \|\cdot\|_*)$ та $(V, \|\cdot\|)$ відповідно. Для кожного $x \in V$ послідовність $\left\{\tilde{A}^n x\right\}$ обмежена за нормою $\|\cdot\|_*$, а отже, і за нормою $\|\cdot\|$. Враховуючи, що простір $(V, \|\cdot\|)$ є повним, за принципом рівномірної обмеженості отримуємо

$$\exists\, c > 0 \qquad \forall\, n \ge 0: \quad \left\|\tilde{A}^n\right\| \le c.$$

Тому

$$\forall\, x \in V: \quad \|x\|_* \;\le\; \sup_{n\ge 0}\|\tilde{A}^n\|\,\|x\| \;\le\; c\|x\|.$$

Лему 2 доведено.

Наслідок. *Простір* $(V, \|\cdot\|)$ *є повним тоді і лише тоді, коли послідовність* $\left\{\|\tilde{A}^n\|,\, n \ge 0\right\}$ *обмежена.*

2. Основні результати.

Теорема 1. *При виконанні умови обмеженості справджуються такі твердження*:

1. *Простір* $(V, \|\cdot\|)$ *є повним.*

2. *Для спектрального радіуса* $r_{\tilde{A}}$ *оператора* $\tilde{A}$, *який розглядається у просторі* $(V, \|\cdot\|)$, *виконується нерівність* $r_{\tilde{A}} < 1$.

Доведення. 1. Доведемо, що при виконанні умови обмеженості послідовність $\left\{\|\tilde{A}^n\| : n \ge 0\right\}$ є обмеженою.

Якщо, від супротивного, ця послідовність не є обмеженою, то існують такі послідовності $\{k_m : m \ge 1\} \subset \mathbb{N}$, $\{u_m : m \ge 1\} \subset V$, що $\|u_m\| = 1$ для кожного $m \ge 1$, $\|\tilde{A}^{k_1}u_1\| > 1$, а також

$$\forall\, m \ge 2: \quad \|\tilde{A}^{k_m}u_m\| \;>\; m \;+\; \sum_{i=1}^{m-1}\|u_i\|_*\,.$$

Покладемо $y_0 = u_1$, $y_{k_1+k_2+\ldots+k_n+n} = u_{n+1}$, $n \ge 1$, $y_j = \overline{0}$ для інших $j \in \mathbb{N}$. Доведемо, що послідовності $\{y_n : n \ge 0\}$ відповідає необмежена послідовність $\{x_n : n \ge 0\}$ із (1), що суперечить умові обмеженості.

Справді, $\|x_{k_1}\| = \|\tilde{A}^{k_1}u_1\| > 1$ і для кожного $n \ge 2$

$$x_{k_1+k_2+\ldots+k_n+n-1} \;=\; \tilde{A}^{k_n}u_n \;+\; \sum_{j=1}^{n-1}\tilde{A}^{k_j+k_{j+1}+\ldots+k_n+n-j}u_j\,,$$

а отже,

$$\|x_{k_1+k_2+\ldots+k_n+n-1}\| \;\ge\; \|\tilde{A}^{k_n}u_n\| \;-\; \sum_{j=1}^{n-1}\|u_j\|_* \;>\; n\,.$$

Тобто умова обмеженості не виконується.

2. Згідно з пунктом 1 $\left\{\|\tilde{A}^n\| : n \ge 0\right\}$ — обмежена послідовність. Зафіксуємо $u \in V$ і покладемо $y_n = \tilde{A}^n u$, $n \ge 0$. Послідовність $\{y_n : n \ge 0\}$ обмежена і їй згідно з (1) відповідає обмежена послідовність $\left\{x_n = (n+1)\tilde{A}^n u :\ n \ge 0\right\}$. Звідси за принципом рівномірної обмеженості випливає, що $\left\{(n+1)\|\tilde{A}^n\| :\ n \ge 0\right\}$ — обмежена послідовність. Тому $\|\tilde{A}^n\| \to 0$, $n \to \infty$. Оскільки на підставі теореми Данфорда про відображення спектра

$$\forall\, n \geq 1: \quad \left(r_{\tilde{A}}\right)^n = r_{\tilde{A}^n} \leq \left\| \tilde{A}^n \right\|,$$

то $r_{\tilde{A}} < 1$.

Теорему 1 доведено.

Згідно з [2], у випадку $A \in \mathcal{L}(B)$ з умови $r_A < 1$ випливає, що відповідна до довільної обмеженої послідовності $\{y_n : n \geq 0\}$ послідовність $\{x_n : n \geq 0\}$ із (1) є обмеженою. Тому справджується така теорема.

Теорема 2. *Умова обмеженості виконується тоді і лише тоді, коли множина V є замкненою в $(B, \|\cdot\|)$ і для спектра $\sigma(\tilde{A})$ звуження $\tilde{A}$ оператора A на V виконується включення* $\sigma(\tilde{A}) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$.

Зауваження. Твердження теореми 2 є новим і у випадку, коли $A \in \mathcal{L}(B)$.

1. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теорема. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
2. *Томілов Ю. В.* Асимптотична поведінка однієї рекурентної послідовності в банаховому просторі // Асимптотичне інтегрування нелінійних рівнянь. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1992. – С. 146 – 153.

Одержано 16.07.08,
після доопрацювання — 22.05.09