УДК 517.5

В. Ф. Бабенко
(Днепропетр. нац. ун-т; Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
Р. О. Биличенко (Днепропетр. нац. ун-т)

УТОЧНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ – ЛИТТЛВУДА – ПОЛИА ДЛЯ СТЕПЕНЕЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The well-known Taikov refinements of the Hardy – Littlewood – Polya inequality for L_2-norms of intermediate derivatives of a function defined on the real line are extended to the case of powers of self-adjoint operators in the Hilbert space.

Відомі уточнення Тайкова нерівності Харді – Літтлвуда – Поліа для L_2-норм проміжних похідних функції, заданої на дійсній осі, узагальнено на випадок степенів самоспряжених операторів у гільбертовому просторі.

Обозначим через $L^r_{2,2}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, пространство всех функций $x \in L_2(\mathbb{R})$, $(r - 1)$-я производная которых локально абсолютно непрерывна и r-я производная принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$. Для $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ известно неравенство Харди – Литтлвуда – Полиа (см., например, [1], [2], § 1.6):

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \leq \| x \|_2^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_2^{k/r}, \quad 0 < k < r,$$

или эквивалентное ему неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \leq \frac{r-k}{r} h^{-k} \| x \|_2 + \frac{k}{r} h^{r-k} \left\| x^{(r)} \right\|_2, \quad h > 0. \tag{1}$$

В 1991 г. Л. В. Тайков [3] предложил следующее уточнение неравенства (1). Если $r, k \in \mathbb{N}$, $k < r$ (причем $r > 2$ при $k = 1$) и $h > 0$, то для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ выполняется неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \leq \frac{r-k}{r} h^{-k} \frac{1}{2} \left\| \Delta_{\pi h} x \right\|_2 + \frac{k}{r} h^{r-k} \left\| x^{(r)} \right\|_2. \tag{2}$$

В случае $k = 1$, $r = 2$ имеет место неравенство

$$\| x' \|_2 \leq \frac{1}{h} \frac{1}{\pi} \left\| \Delta_{\pi h} x \right\|_2 + \frac{1}{2} h \| x'' \|_2 .$$

Здесь $\Delta_h x(t) := x(t) - x(t+h)$ для $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ и $h > 0$.

В 1992 г. Л. В. Тайков [4] распространил неравенство (2) на произвольный порядок n, $n \in \mathbb{N}$, $n < k < r$, разности функции x:

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \;\le\; \frac{r-k}{r} h^{-k} \frac{1}{2^n} \left\| \Delta^n_{\pi h} x \right\|_2 + \frac{k}{r} h^{r-k} \left\| x^{(r)} \right\|_2 . \qquad (3)$$

Здесь $\Delta^n_h x(t) = \Delta_h \left(\Delta^{n-1}_h x(t) \right)$ для $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ и $h > 0$.

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, A — линейный, неограниченный, самосопряженный оператор в H, $D(A)$ — область его определения.

Для $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, и для любого $x \in D(A^r)$ выполняется неравенство (см., например, [2], § 5.1)

$$\left\| A^k x \right\| \;\le\; \|x\|^{1-k/r} \left\| A^r x \right\|^{k/r}, \qquad (4)$$

представляющее собой неравенство типа Харди – Литтлвуда – Полиа для степеней самосопряженного оператора, или эквивалентное ему (для любого $h > 0$) неравенство

$$\left\| A^k x \right\| \;\le\; \frac{r-k}{r} h^{-k} \|x\| + \frac{k}{r} h^{r-k} \left\| A^r x \right\|. \qquad (5)$$

В данной работе мы получим естественный аналог неравенств (2) и (3) для степеней самосопряженного оператора A, уточняющий неравенство (5).

Приведем некоторые сведения из спектральной теории самосопряженных операторов, которые можно найти, например, в [5] (§ 67, 75, 88).

Разложением единицы называется однопараметрическое семейство проектирующих операторов E_t, заданное в конечном или бесконечном интервале $[\alpha, \beta]$ (если отрезок $[\alpha, \beta]$ бесконечен, то, по определению, принимается $E_{-\infty} = \lim_{t \to -\infty} E_t$, $E_{\infty} = \lim_{t \to \infty} E_t$ в смысле сильной сходимости) и удовлетворяющее следующим условиям:

а) $E_u E_v = E_s \; \forall\, u, v \in [\alpha, \beta]$, где $s = \min\{u, v\}$,

б) в смысле сильной сходимости

$$E_{t-0} = E_t, \quad \alpha < t < \beta,$$

в) $E_\alpha = 0$, $E_\beta = I$ (I — тождественный оператор: $Ix = x \; \forall\, x \in H$).

Полагаем $E_t = 0$ при $t \le \alpha$ и $E_t = I$ при $t \ge \beta$.

Из определения следует, что для любого $x \in H$ функция

$$\sigma(t) = (E_t x, x), \quad -\infty < t < \infty,$$

является непрерывной слева, неубывающей функцией ограниченной вариации, для которой

$$\sigma(\alpha) = 0, \qquad \sigma(\beta) = (x, x).$$

Согласно спектральной теореме каждому самосопряженному оператору A соответствует разложение единицы E_t, $t \in \mathbb{R}$, такое, что вектор x принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t x, x) < \infty,$$

и если $x \in D(A)$, то

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t x.$$

Приведенный здесь интеграл — это операторный интеграл Стилтьеса (см., например, [5], § 72). При этом

$$\|Ax\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t x, x) < \infty.$$

Функцией $\varphi(A)$ *от оператора* A называется оператор, определяемый формулой

$$\varphi(A) x = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dE_t x$$

на всех тех векторах $x \in H$, для которых выполнено соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 d(E_t x, x) < \infty.$$

При этом

$$\|\varphi(A) x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 d(E_t x, x).$$

В частности, для $x \in D(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k x = \int_{-\infty}^{\infty} t^k dE_t x$$

и

$$\left\|A^k x\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} d(E_t x, x).$$

Следующие сведения, касающиеся спектральной теории унитарных операторов, можно найти в [5] (§ 73).

Линейный оператор $U: H \to H$ называется *унитарным*, если:

а) $(Ux, Uy) = (x, y) \quad \forall x, y \in H$,

б) область значений оператора U совпадает с H.

Пусть дано семейство унитарных операторов U_s, зависящих от одного параметра $s, -\infty < s < \infty$, и удовлетворяющее следующим условиям:

1) $U_s U_t = U_{s+t}$,

2) $U_0 = I$,

3) $(U_t x, y)$ — непрерывная функция от t при любых $x, y \in H$.

Из условий 1 и 2 следует, что $U_t^{-1} = U_{-t}$. А так как $U_t^* = U_t^{-1}$ (см., например, [5], § 40), то $U_t^* = U_{-t}$.

Очевидно, что рассматриваемое семейство представляет собой непрерывную абелеву группу.

Любому разложению единицы E_s, $-\infty < s < \infty$, в гильбертовом пространстве соответствует группа унитарных операторов E_t, $-\infty < t < \infty$, так что для любого $x \in H$

$$U_t x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}\, dE_s x. \tag{6}$$

И наоборот, каждой группе унитарных операторов U_t соответствует некоторое разложение единицы E_s, так что для любого $x \in H$ справедливо равенство (6).

Следующая теорема является обобщением неравенств (2) и (3).

Теорема. *Пусть A — самосопряженный, в общем случае неограниченный оператор в гильбертовом пространстве H, E_t — разложение единицы, принадлежащее оператору A, U_s — группа унитарных операторов, которая соответствует разложению единицы E_t. Пусть также n, k, $r \in \mathbb{N}$, причем $n = k = 1$ и $r > 2$ или $n < k < r$. Тогда для любого $h > 0$ и любого $x \in D(A^r)$ выполняется неравенство*

$$\left\| A^k x \right\| \le \frac{r-k}{r} h^{-k} \frac{1}{2^n} \left\| (U_{\pi h} - I)^n x \right\| + \frac{k}{r} h^{r-k} \left\| A^r x \right\|. \tag{7}$$

Если оператор A таков, что для любых действительных u, z, $-\infty \le u < z \le \infty$,

$$(E_z - E_u)\, D\left(A^{2r}\right) \ne \{\theta\}, \tag{8}$$

то для любого $h > 0$ неравенство (7) является точным в том смысле, что оно перестанет быть верным для некоторого $x \in D(A^r)$, если хотя бы одну из констант в правой части (7) заменить меньшей.

Доказательство. Поскольку E_t — разложение единицы, соответствующее оператору A, то

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dE_t.$$

Рассмотрим функцию от оператора $\varphi(A)$, где

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^k - \dfrac{k}{r} h^{r-k} t^r \operatorname{sign}\left\{t^{r-k}\right\}, & |t| \le \left(\dfrac{r}{k}\right)^{1/(r-k)} \dfrac{1}{h}, \\ 0, & |t| \ge \left(\dfrac{r}{k}\right)^{1/(r-k)} \dfrac{1}{h}. \end{cases} \tag{9}$$

Выберем $x \in D(A^r)$. Справедлива оценка

$$\left\| A^k x \right\| \le \left\| \varphi(A) x \right\| + \left\| A^k x - \varphi(A) x \right\|. \tag{10}$$

Оценим величину второго слагаемого в правой части (10):

$$\left\| A^k x - \varphi(A)\,x \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} t^k dE_t\, x - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dE_t\, x \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \left(t^k - \varphi(t)\right) dE_t x \right\| =$$

$$= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| t^k - \varphi(t) \right|^2 d(E_t x,\, x) \right\}^{1/2} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| t^k - \varphi(t) \right|^2}{t^{2r}}\, t^{2r}\, d(E_t x,\, x) \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \max_t \left| \frac{t^k - \varphi(t)}{t^r} \right| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t^{2r}\, d(E_t x,\, x) \right\}^{1/2} = \frac{k}{r} h^{r-k} \left\| A^r x \right\|. \tag{11}$$

Равенство

$$\max_t \left| \frac{t^k - \varphi(t)}{t^r} \right| = \frac{k}{r} h^{r-k}$$

проверяется непосредственным вычислением.

Оценивая слагаемое $\|\varphi(A)\,x\|$, воспользуемся спектральным разложением функции от оператора $\varphi(A)$ и равенством $\varphi(t) = 0$ при $|t| \ge \left(\frac{r}{k}\right)^{1/(r-k)} \frac{1}{h}$.

Полагая $\tau = \tau(r, k, h) = \left(\frac{r}{k}\right)^{1/(r-k)} \frac{1}{h}$, имеем

$$\varphi(A)\,x = \int_{|t| \le \tau} \varphi(t)\, dE_t x =$$

$$= \int_{|t| \le \tau} \frac{t^k - \frac{k}{r} h^{r-k}\, t^r \ \mathrm{sign}\left\{t^{r-k}\right\}}{(1 - e^{i\pi h t})^n} (1 - e^{i\pi h t})^n\, dE_t\, x,$$

$$\|\varphi(A)\,x\| = \left\{ \int_{|t| \le \tau} \left| \frac{t^k - \frac{k}{r} h^{r-k}\, t^r \ \mathrm{sign}\left\{t^{r-k}\right\}}{(1 - e^{i\pi h t})^n} \right|^2 \left| 1 - e^{i\pi h t} \right|^{2n} d(E_t x,\, x) \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \max_{|t| \le \tau} \left| \frac{t^k - \frac{k}{r} h^{r-k}\, t^r \ \mathrm{sign}\left\{t^{r-k}\right\}}{(1 - e^{i\pi h t})^n} \right| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| 1 - e^{i\pi h t} \right|^{2n} d(E_t x,\, x) \right\}^{1/2} =$$

$$= \max_{0 < t \le \tau} \frac{\left| t^k - \frac{k}{r} h^{r-k}\, t^r \right|}{\left| 1 - e^{i\pi h t} \right|^n} \left\| (U_{\pi h} x - x)^n \right\|.$$

Здесь

$$U_{\pi h} x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi h t}\, dE_t x,$$

исходя из интегрального представления (6).

Учитывая установленное в [4] для случая $n < k < r$ и в [3] для случая $n = k = 1$ при $r > 2$ неравенство

$$\max_{0<t\le\tau} \frac{\left| t^k - \frac{k}{r} h^{r-k} t^r \right|}{\left| 1 - e^{i\pi h t} \right|^n} \le \frac{1}{2^n} \frac{r-k}{r} \frac{1}{h^k},$$

имеем оценку

$$\|\varphi(A)x\| \le \frac{r-k}{r} h^{-k} 2^{-n} \left\| (U_{\pi h}x - x)^n \right\|. \tag{12}$$

Объединяя (11) и (12), получаем требуемое неравенство (7).

Предположим, что неравенство (7) не является точным, т. е. для некоторого $h > 0$ и для некоторого $\delta > 0$ при всех $x \in D(A^r)$ выполняется неравенство

$$\left\| A^k x \right\| \le (1-\delta) \frac{r-k}{r} h^{-k} \frac{1}{2^n} \left\| (U_{\pi h} - I)^n x \right\| + \frac{k}{r} h^{r-k} \left\| A^r x \right\|. \tag{13}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ из условия

$$(1 + h\varepsilon)^r < 1 + \frac{\delta}{2k}. \tag{14}$$

Используя (8), для данных h и ε выберем элемент $x_{h,\varepsilon} \in D(A^{2r})$:

$$x_{h,\varepsilon} = \int_{1/h}^{1/h+\varepsilon} dE_t x.$$

Тогда

$$A^k x_{h,\varepsilon} = \int_{1/h}^{1/h+\varepsilon} t^k \, dE_t x_{h,\varepsilon}$$

и

$$\left\| A^k x_{h,\varepsilon} \right\| = \left\{ \int_{1/h}^{1/h+\varepsilon} t^{2k} \, d(E_t x_{h,\varepsilon}, x_{h,\varepsilon}) \right\}^{1/2} \ge \frac{1}{h^k} \left\| x_{h,\varepsilon} \right\|. \tag{15}$$

Аналогично можно показать, что

$$\left\| A^r x_{h,\varepsilon} \right\| \le \left(\frac{1}{h} + \varepsilon \right)^r \left\| x_{h,\varepsilon} \right\|. \tag{16}$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\left\| (U_{\pi h} - I)^n x_{h,\varepsilon} \right\| = \left\{ \int_{1/h}^{1/h+\varepsilon} \left| 1 - e^{it\pi h} \right|^{2n} d(E_t x_{h,\varepsilon}, x_{h,\varepsilon}) \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \max_{\left[\frac{1}{h}, \frac{1}{h}+\varepsilon\right]} \left| 1 - e^{it\pi h} \right|^n \left\| x_{h,\varepsilon} \right\| = \left| 1 - e^{i\pi} \right|^n \left\| x_{h,\varepsilon} \right\| = 2^n \left\| x_{h,\varepsilon} \right\|. \tag{17}$$

Подставляя (15) – (17) в неравенство (13), имеем

$$\frac{1}{h^k}\left\| x_{h,\varepsilon} \right\| \;\le\; (1-\delta)\frac{r-k}{r}h^{-k}\frac{1}{2^n}\cdot 2^n\left\| x_{h,\varepsilon} \right\| + \frac{k}{r}h^{r-k}\left(\frac{1}{h}+\varepsilon\right)^r\left\| x_{h,\varepsilon} \right\|.$$

Учитывая (14), получаем неравенство

$$r \;\le\; k+\frac{1}{2},$$

а это противоречит тому, что $k,\, r \in \mathbb{N}$, $k < r$. Полученное противоречие показывает, что коэффициент при первом слагаемом в правой части неравенства (7) уменьшить нельзя. Аналогично можно показать, что нельзя уменьшить коэффициент при втором слагаемом в правой части. Следовательно, неравенство (7) является точным.

Теорема доказана.

1. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Комкнига, 2006. – 456 с.
2. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
3. *Тайков Л. В.* Уточнение неравенства Харди, содержащего оценку величины промежуточной производной функции // Мат. заметки. – 1991. – **50**, № 4. – С. 114 – 122.
4. *Тайков Л. В.* О неравенствах Харди // Там же. – 1992. – **52**, № 4. – С. 106 – 111.
5. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.

Получено 02.03.09