УДК 515.124.4

А. А. Довгошей, Д. В. Дордовский
(Ін-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОТНОШЕНИЕ ЛЕЖАТЬ МЕЖДУ И ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЛОЖЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

We give an elementary proof of the classical Menger result according to which every metric space X with cardinality more than four can be isometrically embedded in $\mathbb{R}$ if all three-point subspaces of X have the same embeddings in $\mathbb{R}$. A number of corollaries of this theorem are obtained. New criteria for the ability of finite metric spaces to be isometrically embedded in $\mathbb{R}$ are found.

Наведено елементарне доведення класичного результату К. Менгера про те, що будь-який метричний простір X, що складається більш ніж з чотирьох точок, ізометрично вкладається в $\mathbb{R}$, якщо кожний триточковий підпростір X ізометрично вкладається в $\mathbb{R}$. Отримано ряд наслідків з цієї теореми. Встановлено нові критерії ізометричної вкладеності в $\mathbb{R}$ скінченних метричних просторів.

1. Введение и формулировка результатов. Тернарное отношение „лежать между” в явной форме впервые было определено Д. Гильбертом в его знаменитых „Основаниях геометрии” [1]. Аналогичные отношения естественным образом возникают в различных областях математики: теории частично упорядоченных множеств, линейных пространств, упорядоченных полей и т. д. (см., например, [2, 3]). В теории метрических пространств понятие „metric betweenness”, исходное для настоящей работы, было введено К. Менгером [4] в следующей форме.

Определение 1.1. *Пусть* (X, d) — *метрическое пространство, а* x, y, z — *различные точки* X. *Будем говорить, что* y *лежит между* x *и* z, *если*

$$d(x,z) = d(x,y) + d(y,z).$$

Так определенное отношение „лежать между” является фундаментальным в теории геодезических на метрических пространствах (см., например, [5]) и естественным образом возникает при изучении наилучших приближений в метрических пространствах [6].

Характеристические свойства тернарных отношений, являющихся отношением „metric betweenness” для (действительнозначных) метрик были найдены А. Вальдом [7]. В дальнейшем проблемы метризации отношения „лежать между” (не обязательно действительнозначными метриками) рассматривались в работах [8 – 10]. Недавно для „metric betweenness” были найдены аналоги классических теорем Сильвестра – Галлаи и Брайна – Эрдеша [11 – 13].

***Замечание* 1.1.** Легко проверить, что для трех различных точек $x, y, z \in X$ равенство

$$2\max\{d(x,y), d(x,z), d(y,z)\} = d(x,y) + d(x,z) + d(y,z)$$

выполняется тогда и только тогда, когда одна из этих точек лежит между двумя другими. Другим необходимым и достаточным условием является равенство нулю определителя Кэли – Менгера (см., например, [14, с. 290])

$$\det \begin{vmatrix} 0 & d^2(x,y) & d^2(x,z) & 1 \\ d^2(y,x) & 0 & d^2(y,z) & 1 \\ d^2(z,x) & d^2(z,y) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Наиболее сложная часть работы К. Менгера [4] связана с доказательством того, что метрическое пространство X с $\operatorname{card} X \geq n+4$ изометрично вкладывается в евклидово пространство E^n, если любое $A \subseteq X$ с $\operatorname{card} A = n+2$ имеет это свойство. Теорема 1.1, сформулированная ниже, по сути эквивалентна приведенному результату К. Менгера для случая $n = 1$ (элементарное доказательство этой теоремы дано во второй части настоящей статьи).

Определение 1.2. *Метрическое пространство* (X, d) *имеет* М*-свойство, если среди любых трех его различных точек найдется одна, лежащая между двумя другими.*

Через $\mathfrak{M}$ будем обозначать класс всех метрических пространств, имеющих М-свойство.

Если пространство (X, d) изометрично вкладывается в $(\mathbb{R}, |\cdot,\cdot|)$, то оно, очевидно, имеет М-свойство, но обратное, вообще говоря, неверно.

***Пример* 1.1.** Пусть t и s — положительные действительные числа. Обозначим через $A_4(t,s)$ четырехточечное метрическое пространство $\{a, b, c, f\}$, расстояния между точками которого удовлетворяют равенствам

$$d(a,b) = d(c,f) = s, \quad d(b,c) = d(f,a) = t, \quad d(a,c) = d(b,f) = s+t.$$

Легко проверить, что данное пространство имеет М-свойство. Однако $A_4(t,s)$ не вкладывается в $\mathbb{R}$, так как $\operatorname{diam}(A_4(t,s)) = d(a,c) = d(b,f)$, где все четыре точки a, b, c, f попарно различны, что невозможно для подмножества $\mathbb{R}$.

Теорема 1.1. *Пусть* X *— метрическое пространство, имеющее* М*-свойство. Тогда либо найдутся* $t, s > 0$ *такие, что* X *изометрично* $A_4(t,s)$, *либо* X *изометрично некоторому подмножеству* $\mathbb{R}$.

***Следствие* 1.1.** *Пусть* $X \in \mathfrak{M}$ *и* $\operatorname{card} X \geq 5$, *тогда* X *изометрично вкладывается в* $\mathbb{R}$.

***Следствие* 1.2.** *Пусть* $X \in \mathfrak{M}$, *тогда для любой точки* $a \in X$ *найдется окрестность* $U \ni a$, *изометрично вложимая в* $\mathbb{R}$.

Теорема 1.1 позволяет также утверждать наличие в $\mathfrak{M}$ „максимальных по вложению" элементов.

Определение 1.3. *Будем говорить, что пространство* $X \in \mathfrak{M}$ *максимально по вложению, если любое изометрическое вложение* $f : X \to Y$ *с* $Y \in \mathfrak{M}$ *является изометрией.*

***Следствие* 1.3.** *Пространства* $A_4(t,s)$ *и* $\mathbb{R}$ *максимальны по вложению в классе* $\mathfrak{M}$ *и любой элемент* $X \in \mathfrak{M}$ *изометрично вложим либо в* $\mathbb{R}$, *либо в* $A_4(t,s)$ *для некоторых* $t, s > 0$.

Доказательство. Проверим максимальность $\mathbb{R}$ (остальное легко следует из теоремы 1.1). Пусть $f : \mathbb{R} \to X$, $X \in \mathfrak{M}$, — изометричное вложение такое, что

$$X \backslash f(\mathbb{R}) \neq \varnothing.$$

Выберем $a \in X \backslash f(\mathbb{R})$ и $b \in f(\mathbb{R})$. Пусть $s := d(a,b)$, где d — метрика на X. Тогда существуют две различные точки $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, для которых

$$\left| f^{-1}(b) - p_1 \right| = \left| f^{-1}(b) - p_2 \right| = s.$$

Следовательно, $|b - f(p_1)| = |b - f(p_2)| = |b - a| = s > 0$. В силу следствия 1.1

X изометрично вложимо в $\mathbb{R}$. Пусть $g : X \to \mathbb{R}$ — такое вложение. Тогда точки $g(a)$, $g(f(p_1))$, $g(f(p_2))$ различны и лежат на расстоянии $s > 0$ от точки $g(b)$. Последнее невозможно, так как любая „сфера" в $\mathbb{R}$ состоит ровно из двух точек.

Следствие доказано.

Перед тем как перейти к следующему следствию напомним, что линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ будет строго выпуклым тогда и только тогда, когда равенство

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|, \qquad x, y \in X,$$

влечет линейную зависимость x и y [15, с. 496].

***Следствие* 1.4.** *Пусть X — метрическое пространство, имеющее* М*-свойство, а* $(Y, \|\cdot\|)$ *— строго выпуклое, нормированное пространство с* $\operatorname{card} Y > 1$. *Тогда либо X изометрично вложимо в Y, либо найдутся $t, s > 0$ такие, что X изометрично $A_4(t, s)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что из вложимости X в Y следует вложимость X в $\mathbb{R}$. Рассмотрим вначале случай, когда Y — линейное пространство над полем действительных чисел. Если $f : X \to Y$ — изометрия и $p \in X$, то отображение

$$g : X \to Y, \qquad g(x) := f(x) - f(p)$$

тоже является изометрией, для которой $g(p) = 0$. Если $x_1 \in X$ и $x_1 \neq p$, то приведенный выше критерий строгой выпуклости показывает, что для любого $x \in X$ существует единственное $\lambda = \lambda(x) \in \mathbb{R}$ такое, что $g(x) = \lambda g(x_1)$. Нетрудно проверить, что отображение

$$X \ni x \mapsto \lambda \|g(x_1)\| \in \mathbb{R}$$

является искомым изометрическим вложением в $\mathbb{R}$.

Если Y — линейное пространство над $\mathbb{C}$, то, рассуждая аналогично, получаем изометрическое вложение X в $\mathbb{C}$. Осталось заметить, что комплексная плоскость $\mathbb{C}$ есть строго выпуклое пространство над $\mathbb{R}$.

Следствие доказано.

Следующие примеры показывают, что условие строгой выпуклости пространства Y, вообще говоря, не может быть опущено в следствии 1.4.

***Пример* 1.2.** Рассмотрим пространство l_2^∞ двучленных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2)$ с нормой $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Тогда легко проверить, что его четырехточечное подмножество

$$\{(0, 0), (s, s), (t, -t), (s + t, s - t)\}$$

с индуцированной из l_2^∞ метрикой изометрично $A_4(t, s)$.

***Пример* 1.3.** Другой моделью пространства $A_4(t, s)$ является четырехточечное подмножество $\{(0, 0), (0, t), (s, 0), (s, t)\}$ пространства l_2^1 с нормой $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$.

Условия равенства в неравенстве Минковского (см., например, [16, с. 42]) показывают, что пространства l_n^p являются строго выпуклыми при $1 < p < \infty$. Отсюда, из следствия 1.4 и примеров 1.2, 1.3 получаем такое следствие.

***Следствие* 1.5.** *Пусть n — натуральное число ≥ 2 или $n = \operatorname{card}\mathbb{N}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

i) *любое $X \in \mathfrak{M}$ вложимо в l_n^p*;

ii) $p = 1$ *или* $p = \infty$.

***Замечание* 1.2.** Совпадение выпуклости с „метрической выпуклостью" является характеристическим свойством строго выпуклых линейных нормированных пространств (см. [17, 18]).

2. Доказательства и вспомогательные утверждения. Вначале приведем техническую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ — четырехточечное метрическое пространство с метрикой d, имеющей* M-*свойство, и такое, что*

$$\operatorname{diam} A = d(x_1, x_2) > d(x_3, x_4). \tag{2.1}$$

Тогда

$$d(x_3, x_4) < \max\{d(x_2, x_3), d(x_2, x_4)\}. \tag{2.2}$$

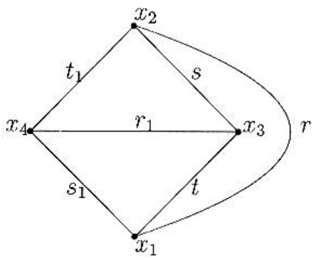

Рис. 1

Доказательство. Положим $r := d(x_1, x_2)$, $s := d(x_2, x_3)$, $t := d(x_3, x_1)$, r_1 $:= := d(x_4, x_3)$, $s_1 := d(x_4, x_1)$, $t_1 := d(x_4, x_2)$ (см. рис. 1, на котором вершины графа представляют собой точки метрического пространства $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а веса над ребрами — расстояния между точками).

Предположим, что (2.2) не выполняется, тогда $r_1 \geq \max\{t_1, s\}$. Из последнего неравенства и из (2.1), используя M-свойство, выводим

$$r = s + t, \qquad r = t_1 + s_1, \qquad r_1 = s + t_1. \tag{2.3}$$

Кроме того, применяя M-свойство к треугольнику с вершинами x_1, x_3 и x_4, получаем одно из равенств

$$r_1 = s_1 + t, \qquad s_1 = r_1 + t, \qquad t = s_1 + r_1. \tag{2.4}$$

Если $r_1 = s_1 + t$, то, используя последнее равенство в (2.3), имеем $2r_1 = s_1 + + t_1 + t + s$, а складывая два первых равенства в (2.3), получаем $2r = s_1 + t_1 + t + + s$. Отсюда $r_1 = r$, что противоречит (2.1). Аналогично, из второго равенства в (2.4) и последнего в (2.3) имеем $s_1 = s + t + t_1$, а из первых двух равенств из (2.3) находим $s_1 = s + t - t_1$. Следовательно, $t_1 = 0$, что невозможно, так как $x_4 \neq x_2$. Наконец, равенство $t = s_1 + r_1$ и (2.3) приводят к

$$s + s_1 + t_1 = t = -s + s_1 + t_1.$$

что противоречит условию $x_2 \neq x_3$.

Лемма доказана.

Напомним, что точка p метрического пространства (X, d) называется диаметральной для X, если

$$\sup_{x \in X} d(p, x) = \operatorname{diam} X$$

(см., например, [15, с. 497]). Аналогично, будем говорить, что пара $\{p, q\} \subseteq X$ является диаметральной, если

$$d(p, q) = \operatorname{diam} X.$$

Как показывает следующее утверждение, единственность диаметральной пары и вложимость в $\mathbb{R}$ эквивалентны для конечных метрических пространств $X \in \mathfrak{M}$.

Утверждение 2.1. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, содержащее конечное число точек. Пространство X изометрично вкладывается в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathfrak{M}$ и для любого $A \subseteq X$ с $\operatorname{card} A \geq 2$ существует единственная пара $\{a_1, a_2\} \subseteq A$, для которой*

$$\operatorname{diam} A = d(a_1, a_2). \tag{2.5}$$

Доказательство. Если X — конечное подмножество $\mathbb{R}$, то единственность диаметральной пары и M-свойство очевидны. Проверим достаточность этих условий. Поскольку при $\operatorname{card} X \leq 3$ вложимость эквивалентна M-свойству, далее предполагаем $n := \operatorname{card} X \geq 4$.

Заметим, что из леммы 2.1, M-свойства и единственности диаметральной пары получаем следующее. Если $A \subseteq X$, $\operatorname{card} A \geq 3$, $a_1, a_2 \in A$ и имеет место (2.5), то для любого $B \subseteq A$ равенства $1 + \operatorname{card} B = \operatorname{card} A$ и $\operatorname{diam} B = d(b_1, b_2)$ влекут

$$\{b_1, b_2\} \cap \{a_1, a_2\} \neq \varnothing. \tag{2.6}$$

Обозначим через x_1, x_n точки из X, для которых

$$\operatorname{diam} X = d(x_1, x_n).$$

Положим $X_1 := X \setminus \{x_n\}$, тогда в силу (2.6) и единственности диаметральной пары имеется единственная точка $x_{n-1} \in X_1$, для которой $\operatorname{diam} X_1 = d(x_1, x_{n-1})$. Аналогично определяется x_{n-2} как единственная точка из $X_2 \setminus \{x_n, x_{n-1}\}$, для которой $\operatorname{diam} X_2 = d(x_1, x_{n-2})$ и т. д. В результате получаем нумерацию $X = = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Искомое вложение $f \colon X \to \mathbb{R}$ определим по правилу $f(x_k) = d(x_1, x_k)$ при $1 \leq k \leq n$. Тогда $f(x_k) = \operatorname{diam} X_{n-k}$ (при $k = n$ считаем $X_0 := X$) и, в силу единственности диаметральной пары, имеем строгие неравенства

$$f(x_1) < f(x_2) < \ldots < f(x_n).$$

Осталось проверить, что f сохраняет расстояние, т. е.

$$|f(x_k) - f(x_m)| = d(x_k, x_m) \tag{2.7}$$

для $x_k, x_m \in X$. Не уменьшая общности считаем $1 \leq k < m \leq n$, тогда в соответствии с индуктивными построениями имеем $x_1, x_k, x_m \in X_{n-m}$ и $\operatorname{diam} X_{n-m} =$

$= d(x_1, x_m) \geq \max\{d(x_1, x_k), d(x_k, x_m)\}$. Следовательно, x_k лежит между x_1 и x_m, т. е. $f(x_m) = d(x_1, x_m) = d(x_1, x_k) + d(x_k, x_m) = f(x_k) + d(x_k, x_m)$, откуда получаем (2.7).

***Следствие* 2.1.** *Пусть* (X, d) *— конечное метрическое пространство, имеющее* М*-свойство. Тогда* X *не вложимо в* $\mathbb{R}$ *в том и только в том случае, когда найдется четырехточечное множество* $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq X$ *такое, что*

$$\operatorname{diam} A = d(x_1, x_2) = d(x_3, x_4). \tag{2.8}$$

Доказательство. Если X не вложимо в $\mathbb{R}$, то из утверждения 2.1 следует, что для некоторого $B \subseteq X$ имеем

$$d(x_1, x_2) = d(x_3, x_4) = \operatorname{diam} B,$$

где $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_3, x_4\}$ — различные двухточечные подмножества B. Вследствие М-свойства $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_3, x_4\}$ не пересекаются. Тогда $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ — четырехточечное множество, для которого имеет место (2.8).

Следствие доказано.

Заметим, что приведенное следствие и теорема 1.1 позволяют дать более сильную форму утверждения 2.1.

Утверждение 2.1*. *Пусть* $X \in \mathfrak{M}$ *и* $1 \leq \operatorname{card} X < \infty$. *Тогда* X *изометрично вложимо в* $\mathbb{R}$, *если и только если для* X *существует единственная диаметральная пара.*

Следующее утверждение показывает, что для конечных $X \in \mathfrak{M}$ изометрическая вложимость в $\mathbb{R}$ эквивалентна существованию точки $p \in X$, диаметральной для всех A таких, что $p \in A \subseteq X$.

Утверждение 2.2. *Пусть* (X, d) *— конечное непустое метрическое пространство. Тогда вложимость в* $\mathbb{R}$ *эквивалентна тому, что* X *имеет* М*-свойство и существует точка* $p \in X$, *являющаяся диаметральной для любого* $B \ni p$, *т. е. такая, что равенство*

$$\operatorname{diam} B = \max\{d(p, x) : x \in B\} \tag{2.9}$$

выполнено для любого $B \subseteq X$, *содержащего точку* p.

Доказательство. Если X — подмножество $\mathbb{R}$, то в качестве p можно взять наименьшее число из X, что, очевидно, гарантирует (2.9). Пусть теперь X имеет М-свойство и существует $p \in X$ такое, что (2.9) выполнено, как только $p \in B \subseteq X$. Используя М-свойство, убеждаемся, что существует единственная точка $b \in B$, для которой $\operatorname{diam} B = d(p, b)$. Теперь искомое изометрическое вложение $f: X \to \mathbb{R}$ строится, как в утверждении 2.1.

Опишем все возможные вложения метрических пространств в $\mathbb{R}$.

Лемма 2.2. *Пусть* (Y, d) *— метрическое пространство, изометрично вложимое в* $\mathbb{R}$, $\operatorname{card} Y \geq 2$, *а* x_1 *и* x_2 *— различные точки из* Y. *Тогда для любого изометрического вложения* $f: Y \to \mathbb{R}$ *и любого* $x \in Y$ *система*

$$\begin{aligned} |t - t_1| &= d(x, x_1), \\ |t - t_2| &= d(x, x_2), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $t_i := f(x_i)$, $i = 1, 2$, *имеет единственное решение* $t = f(x)$. *Обратно, если* $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ *и* $|t_1 - t_2| = d(x_1, x_2)$, *то для любого* $x \in X$ *система* (2.10) *имеет единственное решение* $t \in \mathbb{R}$, *а отображение* $Y \ni x \mapsto t \in \mathbb{R}$ *есть изометрическое вложение*.

Доказательство леммы основано на том, что любые две различные „сферы" в $\mathbb{R}$ или не пересекаются, или их пересечение содержит ровно одну точку.

Теперь установим необходимые и достаточные условия вложимости в $\mathbb{R}$ произвольного $X \in \mathfrak{M}$.

Утверждение 2.3. *Для любого метрического пространства* (X, d) *следующие предложения являются эквивалентными*:

i) (X, d) *изометрично некоторому подмножеству прямой* $\mathbb{R}$;

ii) (X, d) *имеет* M*-свойство и для любых* $t, s > 0$ *не содержит никакого четырехточечного подмножества, изометричного* $A_4(t, s)$;

iii) *если* $A \subseteq X$ *и* $\operatorname{card} A \le 4$, *то* A *изометрично вкладывается в* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Будем проводить доказательство по схеме

$$\text{i)} \rightleftarrows \text{iii)} \rightleftarrows \text{ii)}.$$

Импликация i) $\Rightarrow$ iii) очевидна. Рассуждения, приведенные в примере 1.1, показывают что и импликация iii) $\Rightarrow$ ii) является истинной. Предположим теперь, что предложение iii) истинно, и докажем предложение i). Будем считать, что $\operatorname{card} X \ge 4$, так как в противном случае истинность предложения i) очевидна. Зафиксируем пару различных точек $x_1, x_2 \in X$ и пару чисел $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, для которых $|t_1 - t_2| = d(x_1, x_2)$. В силу предложения iii) тройка x, x_1, x_2 изометрично вкладывается в $\mathbb{R}$. Следовательно, в соответствии со второй частью леммы 2.2 существует единственное $t = t(x) \in \mathbb{R}$, для которого

$$|t - t_1| = d(x, x_1) \quad \text{и} \quad |t - t_2| = d(x, x_2). \tag{2.11}$$

Проверим, что отображение $X \ni x \mapsto t(x) \in \mathbb{R}$ является изометрическим вложением, т. е.

$$|t(x_3) - t(x_4)| = d(x_3, x_4) \tag{2.12}$$

для всех $x_3, x_4 \in X$. Последнее равенство следует из (2.11), если пары x_3, x_4 и x_1, x_2 имеют хотя бы одну общую точку. Если все четыре точки x_1, x_2, x_3, x_4 различны, то для доказательства (2.12) достаточно положить $Y = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ во второй части леммы 2.2.

Осталось проверить импликацию ii) $\Rightarrow$ iii). Предположим, что предложение ii) истинно, а предложение iii) ложно. Тогда найдется $A \subseteq X$ с $\operatorname{card} A \le 4$, не вложимое в $\mathbb{R}$. В силу M-свойства любое A с $\operatorname{card} A \le 3$ вложимо в $\mathbb{R}$. Следовательно, существует не вложимое в $\mathbb{R}$ четырехточечное $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. В силу следствия 2.3 можно считать, что

$$\operatorname{diam} A = d(x_1, x_2) = d(x_3, x_4). \tag{2.13}$$

Пусть $s := d(x_2, x_3)$, $t := d(x_3, x_1)$, $s_1 := d(x_4, x_1)$, $t_1 := d(x_4, x_2)$, $r := d(x_1, x_2) = d(x_4, x_3)$ (см. рис. 1), полагаем $r_1 = r$.

Из М-свойства и (2.13) получаем равенства

$$r = t + s = t_1 + s_1 = t + s_1,$$

откуда $t = t_1$ и $s = s_1$. Следовательно, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ изометрично $A_4(t, s)$, что противоречит предположению об истинности предложения ii).

Утверждение доказано.

Анализируя проверку истинности импликации iii) $\Rightarrow$ i) в доказательстве утверждения 2.3, получаем следующий признак вложимости метрических пространств в $\mathbb{R}$.

Лемма 2.3. *Пусть* (X, d) — *метрическое пространство*, $\operatorname{card} X \geq 4$ *и* x_1, x_2 — *фиксированные точки из* X. *Тогда если любое четырехточечное подмножество* $A \subseteq X$, *содержащее* x_1 *и* x_2, *изометрично вкладывается в* $\mathbb{R}$, *то и само* X *вкладывается в* $\mathbb{R}$.

Если A — ограниченное подмножество метрического пространства (X, d), имеющего М-свойство, а $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$ — диаметральные пары для A, то либо $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$, либо $\{x_1, x_2\} \bigcap \{y_1, y_2\} = \varnothing$, так как в противном случае $\operatorname{diam}(\{x_1, x_2\} \bigcup \{y_1, y_2\}) > \operatorname{diam} A$.

Это наблюдение приводит к следующей лемме.

Лемма 2.4. *Пусть* (X, d) — *метрическое пространство, имеющее* М-*свойство. Если* $\operatorname{card} X = 5$, *то либо найдется ровно одна диаметральная пара* $\{x_1, x_2\} \subseteq X$, *либо таких пар ровно две и они не пересекаются.*

Действительно, если даны три произвольных двухточечных подмножества множества X, то по крайней мере два из них пересекаются.

Лемма 2.5. *Пусть* $X = \{a, b, c, p, f\}$ — *пятиточечное метрическое пространство с метрикой* d, *имеющее* М-*свойство. Тогда* X *изометрично вкладывается в* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Будем считать, что

$$\operatorname{diam} X = d(a, f).$$

Пусть $d(a, f) > d(x, y)$ для всех двухточечных множеств $\{x, y\} \subseteq X$, отличных от a, f, и B — четырехточечное подмножество X такое, что $\{a, f\} \subseteq B$. Тогда для любых $t, s > 0$ B не содержит $A_4(t, s)$. Следовательно, по утверждению 2.3 B вложимо в $\mathbb{R}$, а применяя лемму 2.3, видим, что и само X вложимо в $\mathbb{R}$. Значит, если X не вложимо в $\mathbb{R}$, то существует еще одна диаметральная пара $\{x_2, x_2\} \subseteq X$, причем по лемме 2.4 $\{x_2, x_2\} \bigcap \{a, f\} = \varnothing$, и такая пара единственна. Будем считать, что $\{x_2, x_2\} = \{b, p\}$. Четырехточечное пространство $\{a, b, p, f\}$ не вложимо в $\mathbb{R}$, а значит, по утверждению 2.3, оно изометрично $A_4(t, s)$ для некоторых $t, s > 0$.

Таким образом получаем систему равенств

$$d(a, b) = s, \quad d(b, f) = t, \quad d(a, c) = u, \quad d(b, c) = x,$$

$$d(a, p) = t, \quad d(p, f) = s, \quad d(f, c) = v, \quad d(c, p) = y, \tag{2.14}$$

$$d(a,f) = s+t, \quad d(b,p) = s+t, \quad d(a,f) = u+v, \quad d(b,p) = x+y,$$

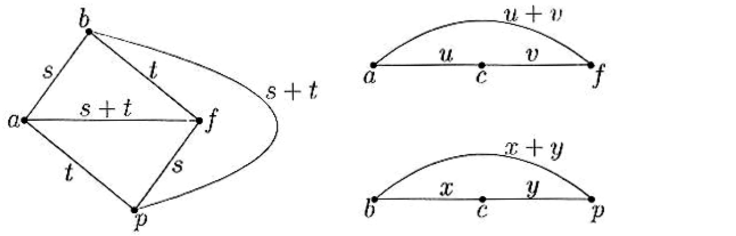

Рис. 2

причем

$$x+y = u+v = s+t = \operatorname{diam} X \tag{2.15}$$

(см. рис. 2, на котором приведены подпространства $\{a, b, p, f\}$, $\{a, c, f\}$ и $\{b, c, p\}$). При сделанных выше предположениях подпространства $\{a, p, c, f\}$ и $\{a, b, c, f\}$ вложимы в $\mathbb{R}$ в силу предложений i) и ii) из утверждения 2.3. Рассмотрим вложения $\{a, p, c, f\} \to \mathbb{R}$. Возможны следующие варианты (рис. 3):

a_1) c лежит между a и p,

a_2) c лежит между p и f.

Аналогично для вложения $\{a, b, c, f\} \to \mathbb{R}$ (рис. 4) имеет место одно из двух:

b_1) c лежит между a и b,

b_2) c лежит между b и f.

Если реализовано сочетание a_1) и b_1), то из a_1) и (2.14) получаем $y+u=t$ и $y+x=s+t$, значит, $t-u=s+t-x$ и, следовательно, $x=u+s$. Кроме того, из b_1) имеем $u+x=s$, т. е. $x=2u+x$, что невозможно. Пусть реализовано сочетание a_1) и b_2). Тогда $y+u=t=x+v$, т. е. $y=x+v-u$, а из (2.15) $y=u+v-x$. Следовательно, $x+v-u=v-x+u$, т. е. $u=x$, но, как отмечено выше, (2.14) и a_1) влекут равенство $x=s+u$, что противоречит соотношениям $s=d(a,b)>0$.

Очевидная модификация проведенных рассуждений показывает, что сочетания a_2) и b_1), a_2) и b_2) тоже ведут к противоречиям.

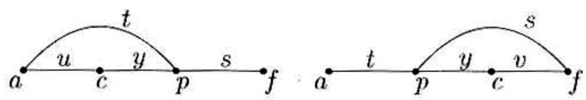

Рис. 3

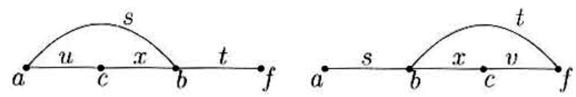

Рис. 4

***Доказательство теоремы* 1.1.** Пусть $X \in \mathfrak{M}$. Возможны три случая: $\operatorname{card} X \geq 5$, $\operatorname{card} X \leq 3$ и $\operatorname{card} X = 4$. В первом случае по лемме 2.5 X изометрично вложимо в $\mathbb{R}$. При $\operatorname{card} X \leq 3$ вложимость X тривиально следует в силу М-свойства.

Рассмотрим случай $\operatorname{card} X = 4$. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $\operatorname{diam} X = d(x_1,$

x_2). Если $d(x_1, x_2) > d(x_3, x_4)$, то в силу следствия 2.1 X изометрично вложимо в $\mathbb{R}$. Из равенства $d(x_1, x_2) = d(x_3, x_4)$ следует, что X изометрично $A_4(t, s)$ (см. доказательство утверждения 2.3).

1. *Hilbert D.* Grundlagen der Geometrie. – Leipzig: Teubner, 1903. – 175 p.
2. *Birkhoff G.* Lattice theory. – 3rd ed. – Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Providence. RI., 1967. – Vol. 25. – 418 p.
3. *Smiley M. F.* A comparision of algebraic, metric and lattice betweeness // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 246 – 252.
4. *Menger K.* Untersuchungen über allgemeine Metrik. I – III // Math. Ann. – 1928. – **100**. – P. 75 – 163.
5. *Papadopoulos A.* Metric space, convexity and nonpositive curvature // Eur. Math. Soc. – 2005. – 287 p.
6. *Dress A. W. M., Scharlau R.*. Gated sets in metric space // Aequat. math. – 1987. – **34**, № 1. – P. 112 – 120.
7. *Wald A.* Axiomatik des Zwischenbegriffers in metrischen Räumen // Math. Ann. – 1931. – **104**. – P. 476 – 484.
8. *Moszynska M.* Theory of equidistance and betweenness relations in regular metric spaces // Fund. math. – 1977. – **96**. – P. 17 – 29.
9. *Mendris R., Zlatoš P.* Axiomatization and undecidability rezults for metrizable betweenness relations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1995. – **123**. – P. 873 – 882.
10. *Simko J.* Metrizable and $\mathbb{R}$-metrizable betweenness spaces // Ibid. – 1999. – **127**. – P. 323 – 325.
11. *Chvatal V.* Sylvestr – Gallai theorem and metric betweenness // Discrete Comput. Geom. – 2004. – **31**, № 2. – P. 175 – 195.
12. *Chen X.* The Sylvestr – Chvatal theorem // Ibid. – 2006. – **35**, № 2. – P. 193 – 199.
13. *Chen X., Chvatal V.* Problems related to be Bruijn – Erdös theorem // Discrete Appl. Math. – 2008. – **156**, № 11. – P. 2101 – 2108.
14. *Берже М.* Геометрия. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 559 с.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд.-во иностр. лит., 1962. – 896 с.
16. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
17. *Bumerot R. J.* Algebraic versus metric concepts in a normed linear space // Simon Stevin. – 1967/1968. – **41**. – P. 252 – 255.
18. *Toranzos F. A.* Metric betweenness in normed linear spaces // Colloq. math. – 1971. – **23**. – P. 99 – 102.

Получено 13.03.09