УДК 517.5

Т. В. Ломако (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЙ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ГРАНИЦУ

In the present paper, a class of ring Q-homeomorphisms is studied. We formulate conditions on a function $Q(x)$ and a boundary on a domain, under which every ring Q-homeomorphism admits a homeomorphic extension to the boundary. Moreover, for arbitrary ring Q-homeomorphism $f\colon D \to D'$ with $Q \in L^1(D)$, the question about extention of inverse mappings to the boundary is studied. It is proved that an isolated singularity is removable for ring Q-homeomorphisms provided that Q has finite mean oscillation at a point.

Роботу присвячено вивченню кільцевих Q-гомеоморфізмів. Сформульовано умови на функцію $Q(x)$ і межу області, при яких будь-який кільцевий Q-гомеоморфізм допускає гомеоморфне продовження на межу. Крім того, для довільного кільцевого Q-гомеоморфізму $f\colon D \to D'$ з $Q \in L^1(D)$ досліджено питання про продовження на межу обернених відображень. Показано, що ізольована особливість є усувною для кільцевих Q-гомеоморфізмів при умові, що Q має скінченне середнє коливання у точці.

1. Введение. В последнее время интенсивно изучаются так называемые *уравнения Бельтрами с вырождением*, которые имеют широкое применение в науке и технике. Следует отметить, например, работы [1, 2], в которых изучается некоторый класс отображений, тесно связанный с решениями упомянутых выше уравнений. Более подробно, *кольцевые Q-гомеоморфизмы* являются решениями уравнений типа Бельтрами, поэтому их изучение с точки зрения геометрической теории функций является важным.

Данная статья посвящена проблеме распространения кольцевых Q-гомеоморфизмов на границу.

Кольцевые гомеоморфизмы введены В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым на плоскости (см., например, [2, 3]). Введение указанного класса отображений связано с техникой исследования пространственных отображений в целом, в частности с методом модулей (см., например, [1 – 9]). Известно, что при соответствующих условиях семейства таких отображений нормальны [4] и удовлетворяют теоремам типа Пикара – Сохоцкого – Вейерштрасса и Лиувилля в окрестности изолированных существенно особых точках границы [5, 10].

Основные методы, которые используются в данной статье, применялись ранее для исследования различных вопросов, связанных с изучением Q-гомеоморфизмов (см. [6, 7]).

Основными аспектами работы являются: 1) граничное поведение гомеоморфизмов, 2) поведение обратных отображений, 3) отдельно рассмотрен случай изолированной особенности. Результаты имеют обширные приложения к уравнениям Бельтрами [1, 2, 9, 11] и к классам Соболева (см. замечание 4.10 в [12]).

2. Предварительные сведения. Приведем основные обозначения и определения, которые будут использованы в дальнейшем. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < 1\}$, $m(x)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $m(A)$ — мера Лебега множества $A \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} A$ обозначает евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами A и B в $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $E, F \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$.

Напомним, что борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в D, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,|dx| \geq 1$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. В этом случае пишем $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{D} \rho^n(x)\,dm(x).$$

Напомним, что топологическое пространство X *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества [13, с. 136]. Компактные связные пространства называются *континуумами* [13, с. 176]. Топологическое пространство T будем называть *линейно связным*, если любые точки x_1 и x_2 можно соединить непрерывным путем $\gamma\colon [0,\,1] \to T$, $\gamma(0) = x_1$ и $\gamma(1) = x_2$.

Пусть $d_0 = \operatorname{dist}(x_0,\,\partial D)$ и $Q\colon D \to [0,\,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(r_1,\,r_2,\,x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0,\,r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Следующее понятие (см. [2]) мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу и тесно связано с решением вырожденных уравнений типа Бельтрами на плоскости. Говорят, что гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in D$, если соотношение

$$M\big(f(\Gamma(S_1,\,S_2,\,A))\big) \leq \int\limits_{A} Q(x)\eta^n\big(|x - x_0|\big)\,dm(x) \tag{1}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1,\,r_2,\,x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1,\,r_2) \to [0,\,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \geq 1. \tag{2}$$

В работе [9] введено более общее понятие кольцевого Q-гомеоморфизма нежели то, что касается соотношения (1). Указанное выше определение связано с изучением поведения отображений на границе. Гомеоморфизм $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если соотношение

$$M\big(f(\Gamma(K_1,\,K_2,\,D))\big) \leq \int\limits_{A\cap D} Q(x)\eta^n\big(|x - x_0|\big)dm(x) \tag{3}$$

выполнено для любых двух континуумов K_1, K_2 из D, которые принадлежат разным компонентам дополнения в $\mathbb{R}^n$ кольца $A = A(r_1,\,r_2,\,x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и для каждой измеримой функции $\eta\colon (r_1,\,r_2) \to [0,\,\infty]$ такой, что выполняется условие (2).

Напомним, что область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ связно [13, с. 232]. Аналогично, область D *локально линейно связна в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap D$ линейно связно. Следует отметить (см. [6], следствие 2.1), что в $\mathbb{R}^n$ для открытых множеств понятия связности и линейной связности совпадают.

Согласно [6] (п. 3), будем говорить, что ∂D *сильнодостижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдутся компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M\big(\Gamma(E, F, D)\big) \geq \delta$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Граница ∂D области D называется *слабоплоской* в точке $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M\big(\Gamma(E, F, D)\big) \geq P$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Граница области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *сильнодостижимой*, или *слабоплоской*, если соответствующие свойства выполнены в каждой точке границы.

Напомним, что *сферическое* (*хордальное*) расстояние между точками x и y в $\overline{\mathbb{R}^n}$ есть величина $h(x,y) = \big|\pi(x) - \pi(y)\big|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n\left(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, & x,\ y \neq \infty, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}, & x \neq \infty, \quad y = \infty. \end{cases}$$

Хордальным диаметром множества $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(E) = \sup_{x,\, y \in E} h(x,y).$$

3. О непрерывном продолжении на границу.

Лемма 1. *Пусть D локально связна в $x_0 \in \partial D$, $\overline{D'}$ — компакт, а $f\colon D \to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм, $D' = f(D)$, такой, что $\partial D'$ сильнодостижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \Big\{y \in \mathbb{R}^n \colon y = \lim_{k\to\infty} f(x_k),\ x_k \to x_0,\ x_k \in D\Big\}. \tag{4}$$

Предположим, что найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\int\limits_{D(x_0,\,\varepsilon)} Q(x)\psi^n\big(|x-x_0|\big)\, dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) \tag{5}$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* $D(x_0, \varepsilon) = \{x \in D\colon \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$ *и* $\psi(t)$ — *неотрицательная измеримая функция на* $(0, \infty)$ *такая, что*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon') = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \psi(t)dt < \infty$$

для всех (фиксированных) $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0]$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение в точку* x_0.

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $\infty \notin D'$. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0, f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E \neq \varnothing$ вследствие компактности $\overline{D'}$. По условию леммы $\partial D'$ сильно-достижима в некоторой точке $y_0 \in E$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $y^* \in E$. Пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < |y_0 - y^*|$.

В силу локальной связности области D в точке x_0 найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0 такая, что $D_m = D \cap V_m$ — области и $\operatorname{diam}(V_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда найдутся точки y_m и $y_m^* \in F_m = fD_m$, близкие к y_0 и y^* соответственно, для которых $|y_0 - y_m| < r_0$ и $|y_0 - y_m^*| > r_0$, которые можно соединить непрерывными кривыми C_m в областях F_m. По построению

$$C_m \cap \partial B(y_0, r_0) \neq \varnothing$$

вследствие связности C_m. По условию сильной достижимости найдутся компакт $C \in D'$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Gamma(C, C_m, D')) \geq \delta \tag{6}$$

для больших m, так как $\operatorname{dist}(y_0, C_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Выберем континуум C' такой, что $C \subset C'$ и $C' \subset D$.

Заметим, что $\Gamma(C, C_m, D') \subseteq \Gamma(C', C_m, D')$, поэтому

$$M\big(\Gamma(C', C_m, D')\big) \geq M\big(\Gamma(C, C_m, D')\big) \geq \delta. \tag{7}$$

Множество $K = f^{-1}(C')$ является континуумом как непрерывный образ континуума. Таким образом, $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}\operatorname{dist}(x_0, K) > 0$.

Обозначим $B_\varepsilon = B(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Для функции

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon, \varepsilon_0), & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0), \end{cases}$$

выполняется

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)dt = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{\psi(t)}{I(\varepsilon, \varepsilon_0)}dt = 1.$$

Обозначим $A = A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)$. Возьмем континуумы $K_1 \subset B_\varepsilon \cap D$ и $K_2 = K$, тогда согласно (5)

$$M(f(\Gamma(K_1,K_2,D)))\le\int\limits_{A\cap D}Q(x)\eta^n(|x-x_0|)dm(x)=$$

$$=\int\limits_{D(x_0,\,\varepsilon)}\frac{Q(x)\psi^n(|x-x_0|)}{I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)}\,dm(x)\to 0 \tag{8}$$

при $\varepsilon\to 0$.

С другой стороны, для любого $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0)$ при больших m имеет место включение $D_m\subset B_\varepsilon$, и поскольку $fD_m=F_m\subset fB_\varepsilon$ и $C_m\subset F_m$, то $C_m\subset fB_\varepsilon$, откуда следует, что $f^{-1}C_m\subset B_\varepsilon$. Возьмем континуумы $K_1=f^{-1}(C_m)$ и $K_2=K$, причем $K_1\subset B(x_0,\,\varepsilon)\cap D$, $K_2\subset(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B(x_0,\,\varepsilon_0))\cap D$. Тогда согласно (7) получим

$$M(f(\Gamma(K_1,K_2,D)))\ge\delta,$$

что противоречит (8). Полученное противоречие доказывает, что f имеет непрерывное продолжение в точку x_0.

Лемма доказана.

4. Основные следствия.

Теорема 1. *Пусть D локально связна в точке $x_0\in\partial D$, $\overline{D'}$ — компакт и $f\colon D\to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм такой, что $f(D)=D'$ и $\partial D'$ сильнодостижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C\,(x_0,f)=\Big\{y\in\mathbb{R}^n\colon y=\lim_{k\to\infty}f(x_k),\ x_k\to x_0,\ x_k\in D\Big\}.$$

Предположим, что

$$q_{x_0}(r)=O\left(\left[\log\frac{1}{r}\right]^{n-1}\right)$$

при $r\to 0$, где $q_{x_0}(r)$ — среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $\{x\in\in D\colon |x-x_0|=r\}$. Будем считать, что $Q(x)$ равна 0 вне D. Тогда f продолжим в точку x_0 в $\mathbb{R}^n$ по непрерывности.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0=0$. Зафиксируем $\varepsilon_0<1$. Положим $\psi(t)=\dfrac{1}{t\,\log\left(1/t\right)}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0}\frac{Q(x)dm(x)}{\left(|x|\log\dfrac{1}{|x|}\right)^n}=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\left(\int\limits_{|x|=r}\frac{Q(x)}{\left(|x|\log\dfrac{1}{|x|}\right)^n}\,dS\right)dr\le$$

$$\le\omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{r\log\dfrac{1}{r}}=\omega_{n-1}\log\frac{\log\dfrac{1}{\varepsilon}}{\log\dfrac{1}{\varepsilon_0}}=\omega_{n-1}I(\varepsilon,\varepsilon_0),$$

где $I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt$. Нужное заключение следует теперь непосредственно из леммы 1.

С целью упрощения обозначаем в дальнейшем $\displaystyle\fint_A f(x)\,dm(x)\ :=\ :=\frac{1}{|A|}\int_A f(x)\,dm(x)$, где, как обычно, $|A|$ обозначает лебегову меру множества

$A \subseteq \mathbb{R}^n$. Следуя работе [7], говорим, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in D$ (пишем $\varphi \in FMO(x_0)$), если $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty$, где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0,\,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$. Также говорим, что $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ — функция *конечного среднего колебания* в D (пишем $\varphi \in FMO(D)$), если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in D$.

Также напомним (см. раздел 2 в [7]), что область $D \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию удвоения меры в точке $x_0 \in \overline{D}$, если

$$m\left(B(x_0, 2\varepsilon) \cap D\right) \le cm\left(B(x_0, \varepsilon) \cap D\right)$$

для некоторого $c > 0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Лемма 2. *Пусть в точке* $x_0 \in \overline{D}$

$$m\big(D \cap B(x_0,\, 2r)\big) \le \gamma \log^{n-2} \frac{1}{r} m\big(D \cap B(x_0,\, r)\big)$$

для всех $r \in (0,\, r_0)$, *где* $\gamma = \mathrm{const}$. *Тогда для любой неотрицательной функции* $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, *имеющей конечное среднее колебание в точке* x_0,

$$\int\limits_{D\cap A(\varepsilon,\,\varepsilon_0,\,x_0)} \frac{\varphi(x) dm(x)}{\left(|x - x_0| \log \frac{1}{|x-x_0|}\right)^n} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

при $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 \in (0,\, \delta_0)$, *где* $\delta_0 = \min\{e^{-e},\, d_0\}$, $d_0 = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$ (*см. лемму* 4.1 *в* [6]).

Теорема 2. *Пусть область* D *локально связна в точке* $x_0 \in \partial D$ *и*

$$m(D \cap B(x_0,\, 2r)) \le \gamma \log^{n-2} \frac{1}{r} m(D \cap B(x_0,\, r))$$

для всех $r \in (0,\, r_0)$, $\overline{D'}$ — *компакт, а* $f\colon D \to D'$ — *кольцевой* Q*-гомеоморфизм,* $D' = f(D)$, *такой, что* $\partial D'$ *сильнодостижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C\left(x_0, f\right) = \Big\{y \in \mathbb{R}^n\colon y = \lim_{k\to\infty} f(x_k),\ \ x_k \to x_0,\ \ x_k \in D\Big\}.$$

Предположим, что $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \partial D$. *Тогда* f *продолжим в точку* x_0.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Пусть $\varepsilon_0 \in (0,\, \delta_0)$, где $\delta_0 = \min\{e^{-e},\, d_0\}$, $d_0 = \sup\limits_{x\in D} |x - x_0|$. На основании леммы 2 для функции $0 < \psi(t) = \dfrac{1}{t\, \log\left(1/t\right)}$ имеем

$$\int\limits_{D\cap A(\varepsilon,\,\varepsilon_0,\,0)} Q(x)\psi^n(|x|)\, dm(x) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Заметим также, что

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt = \log \frac{\log \dfrac{1}{\varepsilon}}{\log \dfrac{1}{\varepsilon_0}}.$$

Оставшаяся часть утверждения следует теперь из леммы 1.

5. О продолжении на границу обратных отображений.

Лемма 3. *Пусть $f\colon D\to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q\in L^1(D)$, где $D'=f(D)$. Если область D локально связна в точках x_1 и $x_2\in\partial D$, $x_1\neq x_2$, а D' имеет слабоплоскую границу, то $C(x_1,\,f)\cap C(x_2,\,f)=\varnothing$.*

Доказательство. Пусть $E_i=C(x_i,\,f)$, $i=1,\,2$, и $\delta=|x_1-x_2|$. Предположим, что $E_1\cap E_2\neq\varnothing$. Поскольку область D локально связна в точках x_1 и x_2, существуют окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2 соответственно такие, что $W_1=D\cap U_1$ и $W_2=D\cap U_2$ — области и $U_1\subset B\left(x_1,\,\dfrac{\delta}{3}\right)$ и $U_2\subset\overline{\mathbb{R}^n}\setminus B\left(x_1,\,\dfrac{2\delta}{3}\right)$. Тогда по неравенству треугольника $\operatorname{dist}(W_1,\,W_2)\geq\dfrac{\delta}{3}$ и функция

$$\eta(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{\delta}, & t\in\left(\dfrac{\delta}{3},\,\dfrac{2\delta}{3}\right),\\[2ex] 0, & t\notin\left(\dfrac{\delta}{3},\,\dfrac{2\delta}{3}\right).\end{cases}$$

Имеем $\displaystyle\int\limits_{\delta/3}^{2\delta/3}\eta(t)dt=1$, следовательно, для любых континуумов $K_1\subset W_1$ и $K_2\subset W_2$

$$M\big(f(\Gamma(K_1,\,K_2,\,D))\big)\leq\int\limits_{A(\delta/3,\,2\delta/3,\,x_1)\cap D}Q(x)\eta^n\big(|x-x_1|\big)dm(x)\leq$$

$$\leq\frac{3^n}{\delta^n}\int\limits_{A(\delta/3,\,2\delta/3,\,x_1)\cap D}Q(x)dm(x)<\infty,$$

так как $Q\in L^1(D)$.

Однако последняя оценка противоречит условию слабой плоскости. Действительно, $y_0\in\overline{fW_1}\cap\overline{fW_2}$ и в областях $W_1^*=fW_1$ и $W_2^*=fW_2$ найдется по непрерывной кривой, пересекающей любые наперед заданные сферы $\partial B(y_0,\,r_0)$ и $\partial B(y_0,\,r_*)$ с достаточно малыми радиусами r_0 и r_*. Поэтому предположение, что $E_1\cap E_2\neq\varnothing$, неверно.

Лемма доказана.

Из леммы 3 следует такое заключение.

Теорема 3. *Пусть D локально связна во всех своих граничных точках, $\overline{D}$ — компакт, D' имеет слабоплоскую границу и $f\colon D\to D'$ — кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q\in L^1(D)$, где $f(D)=D'$. Тогда обратный гомеоморфизм $g=f^{-1}\colon D'\to\to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g}\colon\overline{D'}\to\overline{D}$.*

6. Устранение изолированной особенности. Как видно из леммы 4, для устранения изолированной особенности кольцевых Q-гомеоморфизмов достаточно потребовать интегрируемость $Q(x)$ с подходящим весом.

Лемма 4. *Пусть $f\colon\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, — кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0=0$. Предположим, что существует ε_0, $0<\varepsilon_0<\dfrac{1}{2}$, такое, что для любого $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0)$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0}Q(x)\psi^n(|x|)dm(x)=o(I(\varepsilon)^n) \tag{9}$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* $\psi(t)$ — *неотрицательная измеримая функция на* $(0, \infty)$, *такая, что*

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \tag{10}$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение на* $\mathbb{B}^n$, *которое является кольцевым* Q*-гомеоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку модуль семейства путей, проходящих через фиксированную точку, равен 0, достаточно показать, что $f(x)$ имеет предел при $x \to 0$. Положим

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon), & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0). \end{cases}$$

Заметим, что $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t)dt = 1$. Следовательно, для сфер $S_1 = S\left(0, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ и $S_2 = S(0, 2\varepsilon_0)$

$$M\big(f(\Gamma(S_1, S_2, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}))\big) \leq \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\eta_\varepsilon^n\big(|x|\big)\, dm(x),$$

т. е. согласно (9) $M\big(f(\Gamma(S_1, S_2, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}))\big) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

По лемме Геринга [14, с. 225 – 227]

$$M\big(f(\Gamma(S_1, S_2, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}))\big) \geq \frac{a_n}{\left(\log \dfrac{b_n}{\delta_0\delta_\varepsilon}\right)^{n-1}},$$

где a_n и b_n зависят только от n, δ_0 и δ_ε — сферические (хордальные) диаметры fS_2 и fS_1. Таким образом, $\delta_\varepsilon \to 0$ и fS_1 стягивается в точку при $\varepsilon \to 0$. То, что f — гомеоморфизм в $\mathbb{B}^n$, вытекает из следствия 5.2 в [7].

Лемма доказана.

В частности, выбирая в лемме 4 $\psi = \dfrac{1}{t\log(1/t)}$, получаем согласно лемме 2 следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $f\colon D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *является кольцевым* Q*-гомеоморфизмом в точке* $x_0 = 0$, *где* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in D$ *либо логарифмические особенности порядка не выше* $n - 1$. *Тогда* f *допускает кольцевое* Q*-гомеоморфное продолжение на* D.

1. *Bojarski B., Gutlyanskii V., Ryazanov V.* General Beltrami equations and BMO // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, № 3. – P. 305 – 326.
2. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal. Math. – 2005. – **96.** – P. 117 – 150.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 2005. – **30**, № 1. – P. 49 – 69.
4. *Севостьянов Е. А.* Теория модулей, емкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление // Укр. мат. вестн. – 2007. – **4**, № 4. – С. 582 – 604.
5. *Севостьянов Е. А.* Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений // Там же. – 2008. – **5**, № 3. – С. 366 – 381.

6. *Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Там же. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199 – 234.
7. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Там же. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.
8. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397 – 1420.
9. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations // Ukr. Math. Bull. – 2008. – **5**, № 4. – P. 524 – 535.
10. *Севостьянов Е. А.* Устранение особенностей и аналоги теоремы Сохоцкого – Вейерштрасса для Q-отображений // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 1. – С. 116 – 126.
11. *Gutlyanski V., Martio O., Sugava T., Vuorinen M.* On the degenerate Beltrami equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 2005. – **357**, № 3. – P. 875 – 900.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. – 2004. – **93.** – P. 215 – 236.
13. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 624 с.
14. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings // Complex Anal. and Appl. – 1976. – Vol. 2.

Получено 23.03.09,
после доработки — 22.05.09